

广义取样定理及其应用

张维玺

(常州技术师范学院 江苏 213001)

摘要 本文从应用观点出发,构造出广义取样(抽样)的模型,并用统一观点说明信号取样定理的产生过程。同时指出在系统分析中的使用方法。

关键词 广义抽样,信号,恢复

1 前言

取样原理是信息数字化的基础,它奠定了计算机工程应用的革命。从通号、信号处理、工业控制广泛施用的低通、带通信号采用的取样原理,以及多抽样率的取样方法等人们对取样定理的统一概念有时理解不是很深,尤其在物理意义方面。本文试图从广义抽样的应用观点出发,提出其物理模型,并在理论与实际上做出应用讨论研究。

2 广义取样原理

信号 $f(t)$ 与系统输出值取样值 $y(nT)$ 之间存在以下关系:

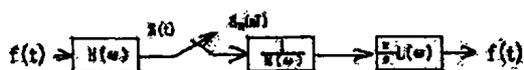
$$S(t) = \frac{1}{2\sigma} \int_{-\sigma}^{\sigma} \frac{1}{H(\omega)} e^{j\omega t} d\omega$$

$$\begin{cases} H_1(\omega)Y_1(\omega, t) + \dots + H_m(\omega)Y_m(\omega, t) = 1 \\ H_1(\omega+c)Y_1(\omega, t) + \dots + H_m(\omega+c)Y_m(\omega, t) = e^{jct} \\ \vdots \\ H_1([\omega+(m-1)c])Y_1(\omega, t) + \dots + H_m[\omega+(m-1)c]Y_m(\omega, t) = e^{j(m-1)t} \end{cases}$$

其中 $c = \frac{2\sigma}{m} = \frac{2\pi}{T}$, 那么取样周期 $T = \frac{m\pi}{\sigma}$ 是奈奎斯特取样间隔的 m 倍。

3 模型

首先考虑 $m = 1$ 时的情况,我们知道 $f(t)$ 通过一个传输函数 $H(\omega)$ 的系统后的输出 $S(t)$ 进行采样。而想恢复 $f(t)$, 我们设想将抽样序列再通过一个传输函数为 $\frac{1}{H(\omega)}$ 的系统。于是,总的系统函数为 $H(\omega) \frac{1}{H(\omega)} = 1$, 再通过一个低通滤波器 $L(\omega)$ 就可能恢复出 $f(t)$ 。下面给出这种过程的示意图并证明其正确性。



这里 $y(nT)$ 是 $f(t)$ 通过 $H(\omega)$ 得到的响应。

$$f(t) \rightarrow \boxed{H(\omega)} \rightarrow s(t)$$

设 $f(t)$ 是 m 个子系统 $H_1(\omega), H_2(\omega), \dots, H_m(\omega)$ 的共同输入, 对应的输出为 $S_1(t), S_2(t), \dots, S_m(t)$, 于是 $f(t)$ 与 m 个系统输出的取样值之间有下面的关系:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [y_1(nT)S_1(t-nT) + \dots + y_m(nT)S_m(t-nT)]$$

$$S(t) = \frac{1}{c} \int_{-\sigma}^{-\sigma+c} y_k(\omega, t) e^{j\omega t} d\omega \quad k = 1, 2, 3, \dots, m$$

而 $y_k(\omega, t)$ 是在 $(-\sigma, -\sigma+c)$ 区间内取值, 由下列方程组解出:

我们称虚线框内为恢复系统, 其中

$$L(\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| \leq \sigma \\ 0 & |\omega| > \sigma \end{cases}$$

因为 $S(t) \leftrightarrow G(\omega) = F(\omega)H(\omega)$

其抽样可看成是信号与冲激串相乘, 即

$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT)$$

$$S(t)\delta_T(t) \leftrightarrow \frac{1}{T} [F(\omega)H(\omega)] * \delta_{\omega 0}(\omega) \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

令抽样结果通过我们构造的系统 $\frac{1}{H(\omega)}$, 其输出频率是:

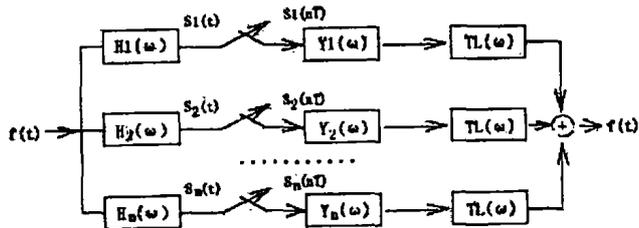
$$\frac{1}{T} [F(\omega)H(\omega)] * \delta_{\omega 0}(\omega) \cdot \frac{1}{H(\omega)} = \frac{1}{T} F(\omega) * \delta_{\omega 0}(\omega)$$

$$\omega \leftrightarrow f(t)\delta_T(t)$$

最后通过低通滤波器得到输出:

$$\frac{1}{T} [F(\omega)H(\omega)] \cdot TL(\omega) = F(\omega) \leftrightarrow f(t)$$

同理,对于广义抽样展开式它是由 $S_1(nT), S_2(nT) \dots S_n(nT)$ 分别通过 n 个冲激响应为 $\frac{1}{T}y_1(t), \frac{1}{T}y_2(t) \dots \frac{1}{T}y_n(t)$ 的系统后相加得到。我们构造 m 个恢复系统来得到输入信号 $f(t)$, 系统的模型如下:



当然,也可用一个低通滤波器接在加法器后面实现。不难证明此框图与表达式一致。其中

$$y_i(\omega)TL(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} y_i(t)e^{-j\omega t} dt$$

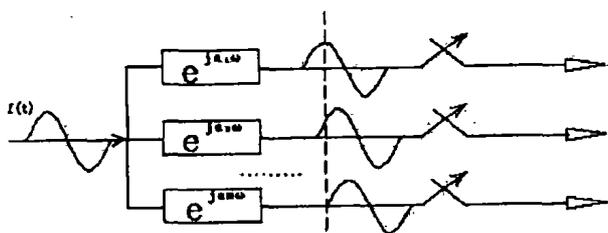
$$y_i(t) = \frac{m}{2\sigma} \int_{-\sigma}^{-\sigma+c} y_i(\omega, t)e^{j\omega t} d\omega$$

$y_i(\omega, t)$ 是由方程组求出。其中, $i = 1, 2, \dots, n$ 。

至此,我们完成了广义抽样定理中,参数 $y_i(\omega, t)$ 只是导出我们恢复系统的中间变量,而不直接代表物理意义。从这里看出,该参数是个时变参数,与实际不符;另外,其定义区间是 $(-\sigma, -\sigma+c)$ 不可能是某个系统的传输函数。

广义取样对 m 路 $H_i(\omega)$ 的输出 $S_i(t)$ 同时取样。也就是说,对应的普通抽样是在每个周期中的 m 个抽样点同时获取的。但值得注意的是,这 m 个抽样点并不对应波形的同一点,因为信号通过 m 个系统,已面目全非了。它可用聚束取样来表述。

聚束取样实际上是让信号 $f(t)$ 通过 m 个相移器,然后进行采样,如下所示。



可见,在 iT 时刻,取样所对应的 m 个点并不是原波形的同一点。

4 应用

以上分析可以看出,一切取样形式都是广义取

样形式的特例:

普通抽样是广义取样的在 $m = 1, H(\omega) = 1$ 的情况;

聚束取是广义取样在 $H_i(\omega) = e^{j\alpha_i \omega}$ 的情况;

对于带通信号它的最大取样间隔不是 $\frac{\pi}{\omega_0 + \sigma}$ 而是 $\frac{\pi}{2\sigma - \omega_0}$, 这是因为带通信号总可以被分解成同相分量与正交分量之和。即

$$f(t) = f_s(t) \sin \omega_0 t + f_c(t) \cos \omega_0 t \quad \text{其中, } f_s(t) \text{ 和 } f_c(t) \text{ 都是带宽为 } \sigma \text{ 的低通信号。}$$

利用广义抽样的原理构造两个系统,取出其同相分量和正交分量 $f_s(t)$ 和 $f_c(t)$, 分别对这两个低通信号进行抽样,则可以实现以低的速率对带通信号采样。

从实用观点看,由于对每一路采样速率大大降低,而且人为受到控制(m 可以随便选取),对某些特殊场合,如理想取样的速率达不到要求时带来好处,因为它的取样周期是普通取样的 m 倍。对某些收集到的已经发生畸变的信号,要想恢复原始信号的本来面目时,可把这种畸变信号看成原始信号通过某个系统 $H(\omega)$ 后的输出。通过广义抽样理论,求出合适的恢复系统 $y_i(\omega, t)$ 恢复出原始信号,如地震信号的采集。

通常地震震源只有一个,但观测点可以有許多。而且每个观测点采集到的震波信号不尽相同。原因是从震源到各观测点的地质结构不同,地震信号经过这些不同结构的地质层就会发生不同的畸变。为了恢复地震源信号,可以把这些形式各异的衰减效应模拟成具有某种传输函数的系统,并由广义抽样定理推导出恢复系统,就可得到原始信号。

反之,在地质勘探中,我们需要知道的是地质结构。同样可以应用广义抽样定理,在具有不同地质结构呈现不同频率特性的先验知识基础上,发出一组信号,并将采集到的信号通过模拟系统恢复成原始信号,从而得到恢复系统的传输函数,求得地质层的频率特性以确定其结构。

总之,利用广义取样原理可以恢复发生畸变的信号,亦可探知系统的传输特性。

参考文献

1 Papualis A. Genesaliged Sanpling Expansion. IEEE Trans. Circuits Systems, 1977. 11