

一阶模糊谓词逻辑公式的有限解释真度和可数解释真度的理论及其应用^{*})

张兴芳 孟广武

(聊城大学数学科学学院 山东聊城 252059)

摘 要 通过引进公式变元集赋值的新概念给出了一阶模糊谓词逻辑(或一阶模糊语言)公式的有限解释真度及可数解释真度的定义,并讨论了它们的一系列性质及其在近似推理中的应用,从而为一阶谓词逻辑的近似推理理论提供了一种带度量的框架。

关键词 一阶模糊谓词逻辑,公式变元集的赋值,有限解释真度,可数解释真度

Theory of Truth Degree of First-order Fuzzy Predicate Logics Formulas Based on the Finite Interpretation and Enumerable Interpretation and its Application

ZHANG Xing-Fang MENG Guang-Wu

(School of Mathematics Science, Liaocheng University, Liaocheng, Shandong, 252059)

Abstract In this paper we gave the definition of truth degree based on finite and enumbe interpretation of first-order fuzzy predicate logic (or first-order language) formulas by introducing the new concept of evaluation of set of variable of formulas, and discuss its a series of properties and applications in approximate reasoning. Consequently we offered a theoretic basis for reasoning of first-order fuzzy predicate logic.

Keywords First-order fuzzy predicate logic, Valuation of set of formulas variable, Truth degree of finite interpretation, Truth degree of enumerable interpretation

1 引言

关于区分命题逻辑公式的可靠程度的思想,早在 1952 年就有 Rosser 与 Turquette^[1]从不同的角度提出了公式的程度化真确度的方法^[2,3]。文[3]就格值逻辑的情形基于公式的多种不同的被知值概念展开了知识逻辑的研究。以上所提到的方法是在赋值域含多个值的情形下展开的。文[4]提出了赋值域为 $[0,1]$ 的模糊命题逻辑公式的真度理论,之后文[5]又提出了二值命题逻辑真度的理论。这些理论都是关于命题逻辑公式的真度理论。但是关于模糊谓词逻辑公式的真度理论至今无人涉及。究其原因或许是由于谓词逻辑公式中量词的使用,导致了问题认识的难度。本文基于模糊谓词逻辑的基本理论^[6-8],通过引进公式变元集的赋值的概念,给出了一阶模糊谓词逻辑公式的有限解释真度和可数解释真度的定义,并讨论了它们的一系列性质及其在近似推理中的应用。从而,为引进公式间的相似度概念,导出全体公式集上的一种伪距离提供了依据,进而为模糊谓词逻辑的近似推理提供了一种带度量的理论框架。通俗地讲,公式的解释真度就是命题的真实程度,而这对判断一个命题的真实程度是必要的。因此本文所建立的理论有较强的应用背景。

2 准备

一阶模糊谓词逻辑的基本理论请读者参见文[6~8]。

定义 1 一阶模糊语言 ϕ 含有以下符号:(i)变元符号: $x_1, x_2, \dots$;(ii)某些个体常元符号 $a_1, a_2, \dots$;(iii)某些函数

符号 f_i ;(iv)某些谓词符号 A_i^n ;(v)连接词: $\neg, \vee, \rightarrow, \dots$ 。(vi)标点符号: $(,)$;(vii)全称量词符号: $\forall$ 。

注 1:(i)一阶模糊语言 ϕ 中项,原子公式,公式,公式的约束变元及自由变元的概念与经典一阶语言^[9]中对应的概念相同。

(ii)记 ϕ 的全体变元之集为 $Var(\phi)$,全体个体常元之集为 $Const(\phi)$,全体项之集为 $Term(\phi)$,全体公式之集为 $F(\phi)$ 。

(iii)设 $A, B \in F(\phi)$,用 $(\exists x_i)A$ 表示 $\neg(\forall x_i)\neg A, A \wedge B$ 表示 $\neg(\neg A \vee \neg B)$ 。

定义 2 设 M 是 $(\neg, \vee, \rightarrow)$ 型 MV-代数^[10](或 R_0 -代数^[10]),一阶模糊语言 ϕ 的 M -解释 I 组成如下:

(i)一个非空集 D_I 。我们称它为解释 I 的论域。

(ii) D_I 中一组与 ϕ 中的个体常元 $a_1, a_2, \dots$, 相对应的特定元 $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots$ 。

(iii) D_I 上的一组与 ϕ 中的谓词符号 $\{A_i^n\}$ 相对应的 n 元模糊关系 $\{A_i^n\}$,其中隶属函数 $\mu_{A_i^n}: D_I^n \rightarrow M$ 。

(iv) D_I 上的一组与 ϕ 中的函数符号 $\{f_i^n\}$ 相对应的函数 $\{f_i^n\}$,这里 $f_i^n: D_I^n \rightarrow D_I$ 。

注 2:在 $F(\phi)$ 的每个公式中,管辖范围不同的约束变元要用不同的字符表示,约束变元也不允许与自由变元有相同的名字。例如 $A = (\forall x_1)A_1(x_1) \rightarrow (\exists x_1)B_1^2(x_1, x_2)$ 。由于 $\forall$ 与 $\exists$ 两个量词后面的变元的名字相同,所以 A 可改为 $A = (\forall x_1)A_1(x_1) \rightarrow (\exists x_3)B_1^2(x_3, x_2)$ 。在此约定下,若在 A 中出现的所有变元是 $x_1, x_2, \dots, x_n$,则 A 可记作 $A(x_1, x_2, \dots, x_n)$,记 $Var(A) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ 。

^{*})山东省自然科学基金资助课题。张兴芳 教授,研究生导师,主要研究领域为逻辑。孟广武 教授,研究生导师,主要研究领域为拓扑与逻辑。

定义 3 设 I 是一阶模糊语言 ϕ 的一个 M -解释, $A(x_1, x_2, \dots, x_n) \in F(\phi)$.

(i) 1° 称每个映射 $v: \text{Var}(A) \rightarrow D_I$ (D_I 为解释 I 的论域) 为公式 A 的变元集的一个 I -赋值, 记为

$V_A = v((x_1, x_2, \dots, x_n)) = (v(x_1), \dots, v(x_n)) = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ 或简记为 v .

A 的变元集的全体 I -赋值之集记作 $\Omega_A(I)$. 其中 $\Omega_A(I)$ 为幂集 $(D_I)^{\text{Var}(A)}$.

2° 称每个映射 $v: \text{Term}(\phi) \rightarrow D_I$ (D_I 为解释 I 的论域) 为 ϕ 的项集 $\text{Term}(\phi)$ 上的一个 I -赋值, 或简称为 ϕ 的一个 I -赋值, 如果 $v(a_i) = \bar{a}_i$ (这里 $\bar{a}_i$ 是 ϕ 中的个体常元) 且 $v(f_i^n(t_1, \dots, t_n)) = \bar{f}_i^n(v(t_1), \dots, v(t_n))$ (这里 f_i^n 是 ϕ 中的函数符号). 其 ϕ 的全体 I -赋值之集记作 $\Omega(I)$.

(ii) 1° 两个 A 的变元 (或 ϕ) 的 I -赋值 v, v' 称为是 i -等价的, 记为 $v \equiv_{x_i} v'$, 若对于任何 $x_j \in \text{Var}(A) \setminus \{x_i\}$ (或 $x_j \in \text{Var}(\phi) \setminus \{x_i\}$), 总有 $v(x_j) = v'(x_j), j \neq i$.

2° 两个的变元 (或 ϕ) 的 I -赋值 v, v' 称为是 $1-2-\dots-k$ -等价的, 记为 $v \equiv_{x_1=x_2=\dots=x_k} v'$, 若对于任何 $x_j \in \text{Var}(A) \setminus \{x_1, \dots, x_k\}$ (或 $x_j \in \text{Var}(\phi) \setminus \{x_1, \dots, x_k\}$), 总有 $v(x_j) = v'(x_j), j \neq 1, 2, \dots, k$.

(iii) 项 t 在赋值 $v \in \Omega_A(I)$ (或 $v \in \Omega(I)$) 下的赋值 $v(t)$ 定义如下:

$t \in \text{const}(\phi), v(t) = \bar{t}; t \in \text{Var}(\phi), v(t) = v(t); t = f_i^n(x_1, \dots, x_n), v(t) = \bar{f}_i^n(v(x_1), \dots, v(x_n))$

(iv) 若 $v \in \Omega(I)$, 则公式 A 关于 v 的真值 $v(A) = \|A\|_{v,v}$ 递归地定义如下:

1° 当 A 为原子公式 $P(t_1, t_2, \dots, t_n)$ 时, $\|P\|_{v,v} = \bar{P}(v(t_1), v(t_2), \dots, v(t_n))$;

2° 当 $A = \neg B, B \vee C, B \rightarrow C$ 时, $\|A\|_{v,v}$ 分别地定义为 $1 - \|B\|_{v,v}, \|B\|_{v,v} \vee \|C\|_{v,v}, \|B\|_{v,v} \rightarrow \|C\|_{v,v}, v \in \Omega(I)$;

3° 当 $A = (\forall x_i)B(x_i)$ 时, 定义

$v(A) = \inf\{v'(B(x_i)) \mid v' \equiv_{x_i} v, v' \in \Omega_A(I)\}, v \in \Omega_A(I)$;

当 $A = (\exists x_i)B(x_i)$ 时, 定义

$v(A) = \sup\{v'(B) \mid v' \equiv_{x_i} v, v' \in \Omega_A(I)\}, v \in \Omega_A(I)$.

称满足这些要求的 M -解释 I 为安全的 M -解释^[2,3].

注 3: 在经典一阶谓词逻辑理论中, 只有一阶语言 L 的 I -赋值的概念. 这里增添了公式集变元赋值的新概念, 作者认为此概念的产生至关重要. 它不但是建立模糊谓词逻辑公式真度理论的关键, 而且在命题逻辑理论中, 若增添公式的命题变量的赋值的新概念, 将会有助于某些理论的简化 (另文讨论).

定义 4 设 $A \in F(\phi), I$ 为安全的 M -解释.

(i) 称 $\|A\|_I^M = \{\|A\|_{v,v} \mid v \in \Omega(I)\}$ 为 A 在 I 中的值域, $\|A\|_I^M = \inf\{\|A\|_{v,v} \mid v \in \Omega(I)\}$ 为 A 在 I 中的下值, $\|A\|_I^M = \sup\{\|A\|_{v,v} \mid v \in \Omega(I)\}$ 为 A 在 I 中的上值.

(ii) 称 A 在 I 中是真的, 记作 $I \models A$, 如果 $\|A\|_I^M = 1$; 称 A 在 I 中是假的, 如果 $\|A\|_I^M = 0$. 称 A 为 $\alpha[I]$ -真公式, 如果 $\|A\|_I^M = \alpha (0 < \alpha < 1)$.

(iii) 称 A 是 M -逻辑有效的, 或称 A 在 I 中赋值有效的, 如果 A 在任何安全的 M -解释中是真的. 特别地, 当 $M = [0, 1]$ 时, 简称 A 为逻辑有效的.

本文仅讨论 $M = [0, 1]$ 时, $\|A\|_{v,v}$ 简记为 $\|A\|_{I,v}$ 或 $\|A\|_v$ 或 $v(A)$.

例 1 设公式 $A(x_1, x_2) = A_1^2(x_1, x_2), B(x_1, x_2) =$

$(\forall x_1)A_1^2(x_1, x_2), C(x_1) = (\forall x_1)CA_1^2(x_1, a_1)$.

解释 I :

$D_I = \{\text{张芳, 张红, 张伟}\}$,

记 $D_I = \{b_1, b_2, b_3\}$.

$\bar{a} = b_1$

那么

$\Omega_A(I) = \Omega_B(I) = \{v_{11}, v_{12}, v_{13}, v_{21}, v_{22}, v_{23}, v_{31}, v_{32}, v_{33}\}$
 $= \{(b_1, b_1), (b_1, b_2), (b_1, b_3), (b_2, b_1), (b_2, b_2),$
 $(b_2, b_3), (b_3, b_1), (b_3, b_2), (b_3, b_3)\},$

$\Omega_C(I) = \{v_1, v_2, v_3\} = \{b_1, b_2, b_3\}$

$\bar{A}_1^2(x_1, x_2)$	b_1	b_2	b_3
b_1	1	0.7	0.8
b_2	0.7	1	0.9
b_3	0.8	0.9	1

则

$\|A\|_{I,v_{11}} = 1, \|A\|_{I,v_{21}} = 0.7, \|A\|_{I,v_{31}} = 0.8,$

$\|A\|_{I,v_{21}} = 0.7, \|A\|_{I,v_{22}} = 1, \|A\|_{I,v_{23}} = 0.9,$

$\|A\|_{I,v_{31}} = 0.8, \|A\|_{I,v_{32}} = 0.9, \|A\|_{I,v_{33}} = 1,$

$\|B\|_{I,v_{11}} = \|B\|_{I,v_{21}} = \|B\|_{I,v_{31}} = \inf\{\|A_1^2(x_1, x_2)\|_{I,v_j} \mid j=1, 2, 3\} = 0.7,$

$\|B\|_{I,v_{12}} = \|B\|_{I,v_{22}} = \|B\|_{I,v_{32}} = \inf\{\|A_1^2(x_1, x_2)\|_{I,v_j} \mid j=1, 2, 3\} = 0.7,$

$\|B\|_{I,v_{13}} = \|B\|_{I,v_{23}} = \|B\|_{I,v_{33}} = \inf\{\|A_1^2(x_1, x_2)\|_{I,v_j} \mid j=1, 2, 3\} = 0.8,$

$\|C\|_{I,v_1} = \|C\|_{I,v_2} = \|C\|_{I,v_3} = \inf\{\|A_1^2(x_1, c)\|_{I,v_i} \mid v_i \in \Omega(I), i=1, 2, 3\} = 0.7.$

例 2 公式 $C(x_1, x_2) = A_1^2(x_1, a_1) \rightarrow (\exists x_2)B_1^1(x_2)$.

解释 I :

论域 $D_I = \{b_1, b_2, b_3\}, \bar{a}_1 = b_1$

赋值集 $\Omega_A(I) = \Omega_B(I) = \{v_{11}, v_{12}, v_{13}, v_{21}, v_{22}, v_{23}, v_{31}, v_{32}, v_{33}\} = \{(b_1, b_1), (b_1, b_2), (b_1, b_3), (b_2, b_1), (b_2, b_2), (b_2, b_3), (b_3, b_1), (b_3, b_2), (b_3, b_3)\}.$

	b_1	b_2	b_3
$\bar{A}(x_1, c)$	0.9	0.8	1
$\bar{B}_1^1(x_2)$	0.8	0.77	0.9

我们取蕴涵算子 R^0 , 则

$\|(\exists x_2)B_1^1(x_2)\|_{I,v} = \sup\{\|B_1^1(x_2)\|_{I,v} \mid v \in \Omega(I)\} = 0.9, \forall v \in \Omega(I).$

$\|C\|_{I,v_{1j}} = 0.9 \rightarrow 0.9 = 1, \|C\|_{I,v_{2j}} = 0.8 \rightarrow 0.9 = 1.$

$\|B\|_{I,v_{3j}} = 1 \rightarrow 0.9 = 0.9, j=1, 2, 3.$

3 公式的有限解释真度

3.1 平均值不变性定理

设 $A(x_1, x_2, \dots, x_n) \in F(L)$, 它也可看作包含 $n+m$ 个变元的公式 $B(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+m}) = A(x_1, x_2, \dots, x_n)$, 称公式 B 为公式 A 的 m 元扩张, 记作 $A^{(m)}$.

定理 1 (平均值不变性定理) 设 $A(x_1, x_2, \dots, x_n) \in F(L), A^{(m)}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 是公式 A 的 m 元扩张, I 是一阶模糊语言 ϕ 的有限解释. 则

$$\frac{\sum_{v \in \Omega_A^{(m)}(I)} v(A^{(m)})}{|\Omega_A^{(m)}(I)|} = \frac{\sum_{v \in \Omega_A(I)} v(A)}{|\Omega_A(I)|}.$$

其中 $|\Omega_A^{(m)}(I)|$ 与 $|\Omega_A(I)|$ 分别表示集合 $\Omega_A^{(m)}$ 与 $\Omega_A(I)$ 的势。

证明: 设解释 I 的论域为 k 个元素, 记 $B=A^{(m)}$ 。因为任取 $v_A \in \Omega_A(I)$ 及 $v_B \in \Omega_B(I)$, 若 $v_A(x_1)=v_B(x_1), \dots, v_A(x_n)=v_B(x_n)$, 有 $v_A(A)=v_B(B)$, 所以

$$\frac{\sum_{v \in \Omega_B(I)} v(A)}{|\Omega_B(I)|} = \frac{\sum_{v \in \Omega_A(I)} k^m v(A)}{k^{n+m}} = \frac{k^m \sum_{v \in \Omega_A(I)} v(A)}{k^m \times k^n} = \frac{\sum_{v \in \Omega_A(I)} v(A)}{|\Omega_A(I)|}。$$

3.2 公式的有限解释真度

定义 5 设 $A \in F(\phi)$, I 为一阶模糊语言 ϕ 的解释。若 I 的论域 D_I 是有限集(或可数集), 则称 I 为 A 的有限(或可数)解释。

定义 6 设 I 是一阶模糊语言 ϕ 的有限解释, $A \in F(\phi)$, 则称 $\sum_{v \in \Omega_A(I)} \|A\|_{I,v} / |\Omega_A(I)|$ 为公式 A 的有限解释 I 真度, 记作 $\tau_I(A)$, 其中 $|\Omega_A(I)|$ 表示集合 Ω_A 的势。

例 3 例 1 中的公式 A, B, C 的有限解释 I 真度分别为

$$\tau_I(A) = \frac{1}{9}(1+0.7+0.8+0.7+1+0.9+0.8+0.9+1) = 0.78\bar{8}$$

$$\tau_I(B) = \frac{1}{9}(3 \times 0.7 + 3 \times 0.7 + 3 \times 0.8) = 0.73\bar{3}$$

$$\tau_I(C) = 0.7$$

由定义 3(iv)3°, 容易得到

命题 1 设 $A \in F(L)$, x_i 为 A 的约束变元, 则对任何 $v, v' \in \Omega_A(I)$, $v \equiv_{x_i} v'$, 有

$$\|A\|_{I,v} = \|A\|_{I,v'}。$$

我们再来考察一下上面的例 1。因为 $v_1 \equiv_{x_1} v_2, v_1 \equiv_{x_1} v_3$, 由命题 1,

$$\|C\|_{I,v_1} = \|C\|_{I,v_2} = \|C\|_{I,v_3} = \inf\{\|A_1^2(x_1, c)\|_{I,v_i} | v_i \in \Omega_C(I), i=1, 2, 3\} = 0.7。$$

易知赋值的等价具有传递性, 于是得到:

推论 给定一个有限解释 I 及公式 $A(x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n) \in F(\phi)$, $x_1, x_2, \dots, x_k$ 是 A 的全部约束变元^[6~8]。任取 $v, v' \in \Omega_A(I)$, 若 v' 与 $v \cdot 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot K$ 等价, 即

$$v(x_{k+1}) = v'(x_{k+1}), v(x_{k+2}) = v'(x_{k+2}), \dots, v(x_n) = v'(x_n), \text{ 则}$$

$$\|A(x)\|_{I,v} = \|A(x)\|_{I,v'}。$$

注 4: 由推论知(在推论的假设条件下), 任取 $v \in \Omega_A(I)$, 我们可以把满足 $v \equiv_{x_1} \dots \equiv_{x_k} v'$ (即 $v(x_{k+1}) = v'(x_{k+1}), v(x_{k+2}) = v'(x_{k+2}), \dots, v(x_n) = v'(x_n)$) 的赋值 v' 归为一类, 记作 $[v]$, 就得到一个 $\Omega_A(I)$ 的等价类, 称为解释 I 的赋值类, 记作 $[\Omega_A(I)]$ 。由概率的有关知识得到:

命题 2 设 $A(x_1, x_2, \dots, x_n) \in F(\phi)$, A 包含 m ($0 \leq m \leq n$) 个自由变元, 一阶模糊语言 ϕ 的有限解释 I 的论域的势为 u , $\Omega_A(I)$ 及 $[\Omega_A(I)]$ 分别为 A 的解释 I 的赋值集及赋值类。

(i) 对任何 $v \in \Omega_A(I)$, $[v] \in [\Omega_A(I)]$, 有 $[v]$ 的势都相等且 $|[v]| = u^{n-m}$ (其中 $n-m$ 是公式 A 的全部约束变元的个数)。

(ii) $\Omega_A(I)$ 及 $[\Omega_A(I)]$ 的势分别为

$$|\Omega_A(I)| = u^n \text{ 及 } |[\Omega_A(I)]| = u^m。$$

定理 2 设 $A(x_1, x_2, \dots, x_n) \in F(\phi)$, m ($0 \leq m \leq n$) 是 A 的自由变元^[6~8] 的个数, 一阶模糊语言 ϕ 的解释的论域的势为 u , 则公式 A 的有限解释 I 真度为

$$\tau_I(A) = \frac{\sum_{v \in \Omega_A(I)} \|A\|_{I,v}}{u^n} = \frac{\sum_{[v] \in [\Omega_A(I)]} \|A\|_{I,v}}{u^m}。$$

证明: 由于 A 包含 n 个变元, 其中 m 个自由变元, 则 A 包含 $n-m$ 个约束变元。由命题 2 知 A 的赋值集的势为 u^n , 赋值类的势 $|[\Omega_A(I)]| = u^m$ 。那么将 $\Omega_A(I)$ 分成 u^m 个赋值类, 分别记作 $[v_1], [v_2], \dots, [v_{u^m}]$ 。任取 $[v] \in [\Omega_A(I)]$, 有 $|[v]| = u^{n-m}$, 且 $\|A\|_{I,v} = \|A\|_{I,v'}, \forall v', v' \in [v]$ 。从而

$$u^n = |\Omega_A(I)| = |[\Omega_A(I)]| \times u^{n-m} = u^m \times u^{n-m},$$

$$\tau_I(A) = \frac{\sum_{v \in \Omega_A(I)} \|A\|_{I,v}}{|\Omega_A(I)|} = \frac{\sum_{v \in \Omega_A(I)} \|A\|_{I,v}}{u^n} = \frac{1}{u^n} \left(\sum_{[v] \in [\Omega_A(I)]} \|A\|_{I,v} + \dots + \sum_{[v] \in [\Omega_A(I)]} \|A\|_{I,v} \right) = \frac{1}{u^m u^{n-m}} (u^{n-m} \times$$

$$\sum_{[v] \in [\Omega_A(I)]} \|A\|_{I,v}) = \frac{\sum_{[v] \in [\Omega_A(I)]} \|A\|_{I,v}}{u^m}。$$

注 5: 根据定理 1, 例 1 中公式 B 的有限解释 I 真度为 $\tau_I(B) = \frac{1}{3}(0.7+0.7+0.8) = 0.73\bar{3}$, 这与例 1 由有限解释 I 真度的定义计算的结果是一致的。

命题 3 设 $A \in F(\phi)$, I 为 A 的一阶模糊语言 ϕ 的有限解释, 则 $\exists v \in \Omega_A(I)$, $\|A\|_{I,v} < 1$ (> 0) 当且仅当 $\tau_I(A) < 1$ (> 0)。

证明: 必要性是显然的。下证充分性。

若 $\exists v^* \in \Omega_A(I)$, 使 $\|A\|_{I,v^*} = \alpha < 1$, 则由公式的有限解释真度定义知,

$$\tau_I(A) = \frac{\sum_{v \in \Omega_A(I)} \|A\|_{I,v}}{|\Omega_A(I)|} + \frac{\sum_{v \in \Omega_A(I) - \{v^*\}} \|A\|_{I,v} + \|A\|_{I,v^*}}{|\Omega_A(I)|} = \frac{(|\Omega_A(I)| - 1) + \alpha}{|\Omega_A(I)|} = \frac{(|\Omega_A(I)| - (1 - \alpha))}{|\Omega_A(I)|} < 1。$$

可以证明下述定理:

定理 3 A 是有限解释 I 的真公式(或假公式)当且仅当 $\tau_I(A) = 1$ (或 $\tau_I(A) = 0$)。

定义 7 给定 $F(\phi)$ 中的一个公式集 $\Gamma = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$, I 为一阶模糊语言 ϕ 的某一个给定的解释。若对公式集中的每个公式出现的个体常元、函数及原子公式进行同一的解释 I , 则称这样的解释 I 为公式集 Γ 的解释。

定义 8 设 $A \in F(\phi)$, I 为一阶模糊语言 ϕ 的解释, $D_I^* \subseteq D_I$, P 为 A 中的原子公式。若 $\forall v \in \Omega(I^*)$, 有 $\|p\|_{I,v} = \|p\|_{I^*,v}$, 则称解释 I^* 为 A 关于 I 的子解释。

注 6: 因为模糊谓词逻辑形式系统 K^* 是谓词逻辑形式系统 K 的扩张, 所以由经典谓词逻辑理论^[9] 知, 任何一个公式 A 可证等价一个前束范式。

引理 设 $B, (\forall x_i)B(x_i), (\exists x_i)B(x_i) \in F(\phi)$, $v \in \Omega(I)$, $\alpha \in (0, 1]$ 。则

(i) $\|(\forall x_i)B(x_i)\|_{I,v} < \alpha$ 当且仅当 $\exists v' \in \Omega(I)$, $v' \equiv_{x_i} v$, 使 $\|B(x)\|_{I,v'} < \alpha$;

(ii) 若 $\|(\exists x_i)B(x_i)\|_{I,v} < \alpha$, 则 $\forall v' \in \Omega(I)$, $v' \equiv_{x_i} v$, 有 $\|B(x_i)\|_{I,v'} < \alpha$; 反之, 若 $v \in \Omega(I)$, 使

$\|B(x_i)\|_{I^*,v} < \alpha$ 且 $\|(\exists x_i)B(x_i)\|_{I,v} < \alpha$, $v \equiv_{x_i} v'$, I^* 为 I 子解释, 则 $\|(\exists x_i)B(x_i)\|_{I^*,v} < \alpha$ 。

证明: (i) 设 $\|(\forall x_i)B(x_i)\|_{I,v} < \alpha$ 。因为

$$\|(\forall x_i)B(x_i)\|_{I,v} = \inf\{\|B(x_i)\|_{I,v'} | v' \equiv_{x_i} v, v' \in \Omega(I)\}, \text{ 所以, } \exists v' \in \Omega(I), v' \equiv_{x_i} v, \text{ 使 } \|B(x_i)\|_{I,v'} < \alpha。$$

反之, 若 $\exists v' \in \Omega(I)$, $v' \equiv_{x_i} v$, 使 $\|B(x_i)\|_{I,v'} < \alpha$, 则

$\|(\forall x_i)B(x_i)\|_{I,v} = \inf\{\|B(x_i)\|_{I,v'} \mid v' \equiv_{x_i} v, v' \in \Omega(I)\} < \alpha$,

(ii) 设 $\|(\exists x_i)B(x_i)\|_{I,v} < \alpha$ 。因为

$\|(\exists x_i)B(x_i)\|_{I,v} = \sup\{\|B(x_i)\|_{I,v'} \mid v' \equiv_{x_i} v, v' \in \Omega(I)\}$,

所以

$\forall v' \in \Omega(I), v' \equiv_{x_i} v$, 使 $\|B(x_i)\|_{I,v'} < \alpha$ 。

若 $v' \in \Omega(I)$, 使 $\|B(x_i)\|_{I,v'} < \alpha$ 且

$\|(\exists x_i)B(x_i)\|_{I,v} = \sup_{v(x_i) \in D_{I^*}} \{\|B(x_i)\|_{I,v} \mid v \equiv_{x_i} v', v \in \Omega(I)\} < \alpha$, I^* 为 I 的子解释, 则

$\|(\exists x_i)B(x_i)\|_{I^*,v} = \sup_{v(x_i) \in D_{I^*}} \{\|B(x_i)\|_{I^*,v} \mid v \equiv_{x_i} v', v \in \Omega(I^*)\} \leq \sup_{v(x_i) \in D_I} \{\|B(x_i)\|_{I,v} \mid v \equiv_{x_i} v', v \in \Omega(I)\} < \alpha$ 。

定理 4 A 是逻辑有效公式 当且仅当对一阶模糊语言 ϕ 的任何有限解释 I 真度 $\tau_I(A) = 1$ 。

证明: 根据定理 2, 必要性显然成立。下证充分性。

反证。设 $a_1, \dots, a_l$ 为 $A(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 的个体常元, $t_1, \dots, t_m$ 为 A 的非变元项 (l, m 都可以为零)。若 A 为非逻辑有效公式, 则存在解释 I 及 $v \in \Omega(I)$, 使 $\|A\|_{I,v} < 1$ 。设 A 的可证等价前束范式为 $(Q_1 x_1)(Q_2 x_2) \dots (Q_k x_k) B(x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n)$ 。

当 $k=0$ 时, $\|B\|_{I,v} < 1$ 。

当 $k \geq 1$ 时, 无论 Q_1 是 $\forall$ 量词还是存在量词, 由引理的 (i) 及 (ii) 的必要性知, 总存在

$v' \in \Omega(I), v' \equiv_{x_1} v$, 使 $\|(Q_2 x_2) \dots (Q_k x_k) B(x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n)\|_{I,v'} < 1$

同理 $\exists v'' \in \Omega(I), v'' \equiv_{x_2} v'$, 使 $\|(Q_2 x_2) \dots (Q_k x_k) B(x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n)\|_{I,v''} < 1$

依次递推下去, 总存在 $v^k \in \Omega(I), v^k \equiv_{x_k} v^{k-1}$, 使 $\|B(x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n)\|_{I,v^k} < 1$ 。

构造 I 的子解释 I^* :

记 $E_1 = \{v^k(x_1), \dots, v^k(x_n)\}, E_2 = \{\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_l\}, E_3 = \{v^k(t_1), \dots, v^k(t_m)\}$,

令 $D_{I^*} = E_1 \cup E_2 \cup E_3 / \{E_i \cap E_j \mid i \neq j, i, j = 1, 2, 3\}$

$\forall v \in \Omega(I^*), v(t_i) = v^k(t_i), i = 1, \dots, m$ 。

注意, 这时由 I 的子解释 I^* 的构造知

$\|B\|_{I^*,v^k} = \|B\|_{I,v^k} < 1$ 。

从而由引理的 (i) 及 (ii) 的充分性知, 总存在

$v^k, v_{k-1}, \dots, v_1 \in \Omega(I^*), v^k \equiv_{x_k} v_{k-1}, v_{k-1} \equiv_{x_{k-1}} v_{k-2}, \dots, v_2 \equiv_{x_1} v_1$,

分别使

$\|(Q_k x_k) B(x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n)\|_{I^*,v_{k-1}} < 1$,

$\|A\|_{I^*,v_1} = \|(Q_1 x_1) \dots (Q_k x_k) B(x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n)\|_{I^*,v_1} < 1$ 。

因为 I^* 是有限解释, 所以由 $\|A\|_{I^*,v_1} < 1$ 及命题 3 知 $\tau_{I^*}(A) < 1$, 这与已知矛盾。因此 A 是逻辑有效公式。

容易证明

命题 4 设 $A, B, A \rightarrow B, (\forall x_i)B, (\exists x_j)B \in F(L)$, I 是公式集

$\Gamma = \{A, B, A \rightarrow B, (\forall x_i)B, (\exists x_j)B\}$

的一阶模糊语言 ϕ 的有限解释。则

(i) $\tau_I((\forall x_i)B(x_i)) \leq \tau_I(B(x_i)) \leq \tau_I((\exists x_j)B(x_j))$

(ii) 如果 $\neg A \rightarrow B$, 那么 $\tau_I(A) \leq \tau_I(B)$ 。

(iii) $1^\circ \tau_I((\forall x_i)B(x_i)) = 1$ 当且仅当 $\tau_I(B(x_i)) = 1$ 。

2° 若 $\tau_I(B(x_i)) = 1$, 则 $\tau_I((\exists x_j)B(x_j)) = 1$ 。

为简便计, 下将 τ_I 记为 τ 。

定理 5 设 $A, B, \neg A, A \rightarrow B, A \vee B, A \wedge B \in F(L)$, I 是公式集 $\Gamma = \{A, B, \neg A, A \rightarrow B, A \wedge B, A \vee B\}$ 的一阶模糊语言 ϕ 的有限解释。则

(i) $\tau(\neg A) = 1 - \tau(A)$;

(ii) $\tau(A \rightarrow B) \leq 1 - \tau(A) + \tau(B) = \tau(\neg A) + \tau(B)$;

(iii) $\tau(A \vee B) = \tau(A) + \tau(B) - \tau(A \wedge B)$, $\tau(A \wedge B) = \tau(A) + \tau(B) - \tau(A \vee B)$ 。

证明: (i) 由于 $\forall v \in \Omega_A(I), \|\neg A\|_{I,v} = 1 - \|A\|_{I,v}$, 所以

$$\begin{aligned} \tau(\neg A) &= \frac{\sum_{v \in \Omega_A(I)} \|\neg A\|_{I,v}}{|\Omega_A(I)|} = \frac{\sum_{v \in \Omega_A(I)} (1 - \|A\|_{I,v})}{|\Omega_A(I)|} \\ &= \frac{|\Omega_A(I)| - \sum_{v \in \Omega(I)} \|A\|_{I,v}}{|\Omega_A(I)|} = 1 - \tau(A) \end{aligned}$$

(ii) 设 $|Var(A) \cup Var(B)| = m$, 记 $\Omega_{A \rightarrow B}^{(m)}(I) = \Omega(I)$, 由于 $\forall v \in \Omega(I)$, 有 $v(A \rightarrow B) \leq 1 - v(A) + v(B)$, 则根据平均值不变性定理, 有

$$\begin{aligned} \tau(A \rightarrow B) &= \frac{\sum_{v \in \Omega(I)} \|A \rightarrow B\|_{I,v}}{|\Omega(I)|} \leq \frac{\sum_{v \in \Omega(I)} (1 - v(A) + v(B))}{|\Omega(I)|} \\ &= \frac{|\Omega(I)| - \sum_{v \in \Omega(I)} \|A\|_{I,v} + \sum_{v \in \Omega(I)} \|B\|_{I,v}}{|\Omega(I)|} \\ &= 1 - \frac{\sum_{v \in \Omega_A(I)} \|A\|_{I,v}}{|\Omega_A(I)|} + \frac{\sum_{v \in \Omega_B(I)} \|B\|_{I,v}}{|\Omega_B(I)|} \\ &= 1 - \tau(A) + \tau(B) = \tau(\neg A) + \tau(B) \end{aligned}$$

(iii) 记 $\Omega_{A \vee B}(I) = \Omega_{A \wedge B}(I) = \Omega(I)$ 。因为 $\forall v \in \Omega(I)$,

$$\begin{aligned} \|A \vee B\|_{I,v} &= \max\{\|A\|_{I,v}, \|B\|_{I,v}\} = \|A\|_{I,v} + \|B\|_{I,v} - \min\{\|A\|_{I,v}, \|B\|_{I,v}\} \\ \|A \wedge B\|_{I,v} &= \min\{\|A\|_{I,v}, \|B\|_{I,v}\} = \|A\|_{I,v} + \|B\|_{I,v} - \max\{\|A\|_{I,v}, \|B\|_{I,v}\} \end{aligned}$$

所以根据平均值不变性定理, 有

$$\begin{aligned} \tau(A \vee B) &= \frac{\sum_{v \in \Omega(I)} \|A \vee B\|_{I,v}}{|\Omega(I)|} = \frac{\sum_{v \in \Omega(I)} \|A\|_{I,v} + \sum_{v \in \Omega(I)} \|B\|_{I,v} - \sum_{v \in \Omega(I)} \min\{\|A\|_{I,v}, \|B\|_{I,v}\}}{|\Omega(I)|} \\ &= \tau(A) + \tau(B) - \tau(A \wedge B) \end{aligned}$$

类似证明 $\tau(A \wedge B) = \tau(A) + \tau(B) - \tau(A \vee B)$ 。

定理 6 设 $A, B, C, A \rightarrow B, B \rightarrow C, A \rightarrow C \in F(L)$, I 是公式集

$T = \{A, B, C, A \rightarrow B, B \rightarrow C, A \rightarrow C\}$

的一阶模糊语言 ϕ 的有限解释, $\alpha, \beta \in [0, 1]$ 。

(i) 若 $\tau(A) \geq \alpha, \tau(A \rightarrow B) \geq \beta$, 则 $\tau(B) \geq \alpha + \beta - 1$ 。

(ii) 若 $\tau(A \rightarrow B) \geq \alpha, \tau(B \rightarrow C) \geq \beta$, 则 $\tau(A \rightarrow C) \geq \alpha + \beta - 1$ 。

证明: (i) 因为 $\tau(A) \geq \alpha, \beta \leq \tau(A \rightarrow B) \leq (1 - \tau(A) + \tau(B))$, 所以 $\tau(B) \geq \beta + \tau(A) - 1 = \alpha + \beta - 1$ 。

(ii) 先证 $\forall v \in \Omega(I)$, 有 $v(A \rightarrow C) \geq v(A \rightarrow B) + v(B \rightarrow C) - 1$ 。

1° 当 $v(A) \leq v(C)$ 时,

$$v(A \rightarrow C) = 1 = 1 + 1 - 1 \geq v(A \rightarrow B) + v(B \rightarrow C) - 1;$$

2° 当 $v(A) \geq v(B) \geq v(C)$ 时, 因为

$$v(A \rightarrow B) = 1 - v(A) + v(B),$$

$$v(B \rightarrow C) = 1 - v(B) + v(C),$$

所以

$$v(A \rightarrow c) = 1 - v(A) + v(c) = 1 - v(A) + v(B) - v(B) + v(C) + 1 - 1 = v(A \rightarrow B) + v(B \rightarrow C) - 1;$$

3° 当 $v(B) \geq v(A) \geq v(C)$ 时, 因为

$$v(A \rightarrow B) = 1, v(B) - v(A) > 0, \\ v(B \rightarrow C) = 1 - v(B) + v(C),$$

所以

$$v(A \rightarrow C) = 1 - v(A) + v(c) = 1 - v(A) + v(B) - v(B) + v(C) + 1 - 1 \geq v(A \rightarrow B) + v(B \rightarrow C) - 1;$$

4° 当 $v(A) \geq v(C) \geq v(B)$ 时, 因为

$$v(A \rightarrow B) = 1 - v(A) + v(B), \\ v(B \rightarrow C) = 1, v(C) - v(B) > 0,$$

所以

$$v(A \rightarrow C) = 1 - v(A) + v(c) = 1 - v(A) + v(B) - v(B) + v(C) + 1 - 1 \geq v(A \rightarrow B) + v(B \rightarrow C) - 1$$

记 A, B 及 C 共包含的变元集 $Var(A) \cup Var(B) \cup Var(C)$ 的赋值集为 $\Omega(I)$ 。因此, 由平均值不变性定理及 $\tau(A \rightarrow B) \geq \alpha, \tau(B \rightarrow C) \geq \beta$ 知,

$$\tau(A \rightarrow C) = \frac{\sum_{v \in \Omega(I)} v(A \rightarrow C)}{|\Omega(I)|} \\ \geq \frac{\sum_{v \in \Omega(I)} (v(A \rightarrow B) + v(B \rightarrow C) - 1)}{|\Omega(I)|} = \tau(A \rightarrow B) + \tau(B \rightarrow C) - 1 \geq \alpha + \beta - 1$$

定理 7 设 $\Gamma \subset F(L)$, I 是 Γ 的一阶模糊语言 ϕ 的有限解释。 $\forall A \in \Gamma, \tau(A) \geq \alpha, B$ 是 Γ -推论, 且存在从 Γ 到 B 的长度为 n 的推演, 则 $\tau(B) \geq \mu_n(\alpha - 1) + 1$ 。

这里 μ_n 是 Fibonacci 数列的第 n 项。

证明同文[8]中的定理 1, 略。

4 公式的可数解释真度

定义 9 设 $A \in F(\phi)$, I 为一阶模糊语言 ϕ 的可数解释, 其论域为 $D_I = \{a_1, a_2, \dots, a_m, \dots\}$, A 关于 I 的子解释为 I_m , $D_{I_m} = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}, m = 1, 2, \dots$ 。则

(i) 称 I_m 及 $\tau_{I_m}(A)$ (简记为 $\tau_m(A)$) 分别为 I 的第 m 项子解释及 A 的第 m 项子真度, 并称 $\{\tau_m(A)\}$ 为 A 的解释真度列。

(ii) 称上极限 $\overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \tau_m(A)$ (或下极限 $\underline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \tau_m(A)$) 为 A 的解释 I 的上 (或下) 真度。记作 $\bar{\tau}_I(A)$ (或 $\tau_I(A)$)。称 $\frac{\bar{\tau}_I(A) + \tau_I(A)}{2}$ 为 A 的可数解释 I 真度, 记作 $\tau_I(A)$, 在不至于混淆时简记为 $\tau(A)$ 。

注 7: 在定义 8 中, 为了讨论问题的方便, 假设 A 的个体常元全在 D_I 的子解释内。

命题 5 设 $A \in F(L)$, $\tau(A), \bar{\tau}(A)$ 及 $\tau(A)$ 分别为 A 的一阶模糊语言 ϕ 的上、下解释真度及可数解释真度。则

(i) 若 $\tau(A) \geq \alpha, \bar{\tau}(A) \leq \beta$, 则 $\alpha \leq \tau(A) \leq \beta$ 。

(ii) 1° 若 $\tau(A) \geq \frac{1}{2}$ 则 $\tau(A) \geq \tau(A) - \frac{1}{2}$,

2° 若 $\tau(A) \leq \frac{1}{2}$ 则 $\bar{\tau}(A) \leq \tau(A) + \frac{1}{2}$ 。

(iii) 若 $\bar{\tau}(A) = \tau(A)$, 则 $\tau(A) = \lim_{m \rightarrow \infty} \tau_m(A) = \bar{\tau}(A) = \tau(A)$ 。

(iv) 若 $\tau(A) = \alpha \in [0, 1]$ (或 $\bar{\tau}(A) = \alpha \in [0, 1]$) 则存在

$\{I_m\}_{m=1}^{\infty}$ 的子列 $\{I_{m_k}\}_{k=1}^{\infty}$, 使 $\lim_{k \rightarrow \infty} \tau_{I_{m_k}}(A) = \alpha$ 。

(vi) 1° $\tau(A) = 1$ 当且仅当 $\lim_{m \rightarrow \infty} \tau_m(A) = 1$,

2° $\tau(A) = 0$ 当且仅当 $\lim_{m \rightarrow \infty} \tau_m(A) = 0$ 。

证明: (i), (iii), (iv) 及 (vi) 易证, 下证 (ii)。

1° 因为 $\tau(A) = \frac{1}{2}(\tau(A) + \bar{\tau}(A))$, $\tau(A) \geq \frac{1}{2}$, 所以 $\tau(A)$

$$- \tau(A) = \bar{\tau}(A) - \tau(A) \leq \frac{1}{2}, \text{ 于是 } \tau(A) \geq \tau(A) - \frac{1}{2}。$$

类似证 2°。

例 4 (i) 设公式 $A = A_1^2(x_1, a_1)$, 可数解释 I :

$$D_I = \{1, 2, 2^2, \dots, 2^n, \dots\}, \bar{a}_1 = 1, \bar{A}_1^2(x_1, a_1) = U_{\bar{A}_1^2} : 1 - \frac{v(x_1) - \bar{a}_1}{v(x_1)}, v(x_1) \in D_I, v \in \Omega(I)$$

于是, A 的关于解释 I 的第 m 项子真度为

$$\tau_m(A) = \frac{1}{m} \sum_{i=0}^m (1 - \frac{2^i - 1}{2^i}) = \frac{1}{m} \{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{m-1}}\} = \frac{1 - (\frac{1}{2})^m}{m(1 - \frac{1}{2})}。$$

由命题 3(vi) 知

$$\tau(A) = \lim_{m \rightarrow \infty} \tau_m(A) = 0。$$

定理 8 若 A 是可数解释 I 的真公式 (或假公式), 则 $\tau_I(A) = 1$ (或 $\tau_I(A) = 0$)。

注 8: 本定理的逆不成立, 见例 4。

由有限解释真度的性质, 可数解释真度的定义及极限的保不等性知上述命题 4 及定理 4~6 对 I 为可数解释的情况也成立。

公式间的基于解释的相似度、距离及 $(F(L), \rho)$ 中的推理理论另文讨论。

结束语 作者认为模糊谓词逻辑公式的解释真度的实际意义就是模糊谓词命题的真实程度。如例 1, 若张芳, 张红及张伟是兄弟姐妹, 则可认为解释 $\bar{A}_1^2(x_1, x_2)$ 是他们的相似关系矩阵, $\tau_I(A)$ 是他们的相似程度, 而 $\tau_I(C)$ 则可认为是张芳与其兄妹的相似程度。如此看来, 公式的解释真度理论将会有广阔的应用前景。

参 考 文 献

- 1 Rosser J B, Tunquette A R. Many-Valued Logics, Amsterdam: North-Holland, 1952
- 2 Pavelka J. On fuzzy logic I, II, III. Zeitschr f Math logik u Grundlagen d Math. 1979, 25: 45~52, 119~134, 447~464
- 3 De Glas M. Knowledge representation in a fuzzy setting, [Tech Rep 89/48]. Universite Paris M, laforia, 19
- 4 王国俊. 非经典数理逻辑与近似推理[M]. 北京: 科学出版社, 2000. 156~182
- 5 王国俊, 等. 二值命题逻辑中命题的真度理论. 中国科学, A 辑, 2001, 31(11): 998~1007
- 6 Hajek P. Metamathematics of fuzzy logic[M]. London: Kluwer Academic Publishers, 1998. 89~120
- 7 Petr Hajek. A note on the notion of truth in fuzzy logic. Annals of and Applied Logic 109, 2001. 65~69
- 8 裴道武, 姜慧. 一个新的模糊谓词演算形式系统. 东北师大学报 (自然科学版), 2003, 35(1): 23
- 9 数理逻辑引论与归结原理. 北京: 科学出版社, 2003. 163~198