泛逻辑的基本形式系统中的广义重言式理论*)

马盈仓　何华灿
(西北工业大学计算机学院　西安710072)

摘　要　本文首次对泛逻辑的广义重言式理论进行研究。给出了泛逻辑的基本形式系统中的广义重言式的一系列性质。主要结果有:在泛逻辑的基本形式系统中,对于[0,1]内的任意有理数,均有可达重言式,对于其中的无理数,均没有可达重言式;给出F(S)的一个分划;给出[α]-MP(α∈I_Q)规则成立的一个充分条件。

关键词　泛逻辑学,广义重言式,升级算法,分划,广义语义MP-规则,广义语义HS-规则

Generalized Tautologies Theory of the Basic Formal System of Universal Logic

MA Ying-Cang　HE Hua-Can
(College of Computer,Northwestern Polytechnic University,Xi' an 710072)

Abstract　Generalized tautologies theories of universal logic are studied for the first time. A series of properties of generalized tautologies of the basic formal system of universal logic are discussed. The main results are: In the basic formal system of universal logic,for each rational number in [0,1],it has arrivable tautology,for each irrational number in [0,1],it has no arrivable tautology;A partition about F(S) is provided; The sufficient condition which makes [α]-MP rule hold for α∈I_Q is obtained.

Keywords　Universal logic, Generalized tautologies, Upgrade algorithm, Partition, Generalized semantic MP-rule, Generalized semantic HS-rule

泛逻辑学是在研究柔性世界逻辑规律时发现的一个全新的连续可控的逻辑体系[1,2]。在研究中,本文第二作者把中国古典哲学的思想(即世间万事万物都是相关的,不是相生就是相克,非此即彼)引入到柔性逻辑学中,用相关性来解释命题连接词的运算模型不唯一的原因。它反映了事物间的内在特性,用它可以反映事物间作用的真正原因。相关性包括广义相关性(模糊命题之间的关联性)和广义自相关性(命题真值的测量误差)。并且可以将其量化为广义相关系数(一般用 h 表示)和广义自相关系数(一般用 k 表示)。h 和 k 在[0,1]中连续取值。当 h 与 k 均取0.5时,所得的系统为泛逻辑的基本系统。文[3]讨论了基本形式系统的形式化。

广义重言式的概念是多值逻辑系统中一个非常重要的概念,它可以反映逻辑系统中公式的层次,并且对逻辑系统的语义研究和推理起到重要的作用。王国俊教授在文[4]中对修正的 Kleene 系统中广义重言式的研究,起到开创性的作用。之后文[5～12]分别对不同的逻辑系统的广义重言式进行了研究,对广义重言式理论的深入发展起到了促进作用。本文则是在前面研究的基础之下,对泛逻辑的基本形式系统中的广义重言式进行系统的研究,得到一系列结果。对于泛逻辑中 h 与 k 取其它值的一些情形,我们将在另文中研究。

1　基本概念和引理

定义1　设 $S=\{p_1,p_2,\cdots\}$ 是可数集,$\neg$ 是一元运算,$\odot$,$\oplus$ 与 $\to$ 是二元运算,由 S 生成的 $(\neg,\odot,\oplus,\to)$ 型自由代数记作 $F(S)$,称 S 中的元素为原子公式或原子命题,称 $F(S)$ 中的元素为公式或命题。

定义2　在 $I=[0,1]$ 中规定 $\neg a=1-a$,$a\odot b=\max(0,x+y-1)$,$a\oplus b=\min(1,x+y)$,$a\to b=\min(1,1-a+b)$。则[0,1]成为 $(\neg,\odot,\oplus,\to)$ 型代数,称为连续值泛逻辑的基本系统,记为 I。把[0,1]限制在[0,1]中的有理数集时,即若用 $Q\cap[0,1]$ 代替 I,称相应的 $(\neg,\odot,\oplus,\to)$ 型代数为有理值泛逻辑的基本系统。记为 I_Q。若用 $I_n=\{0,1/(n-1),\cdots,(n-2)/(n-1)\},1$ 代替 I,称相应的代数系统为 n 值泛逻辑的基本系统,记为 I_n。

定义3　设 $R\in\{I,I_Q,I_n\}$,$v:F(S)\to R$ 是映射,若 v 满足 $v(\neg A)=\neg v(A)$,$v(A\odot B)=v(A)\odot v(B)$,$v(A\to B)=v(A)\to v(B)$。则称 v 是 $F(S)$ 的一个赋值,以 Ω_R 记全体赋值之集。R 可用 I,I_Q,I_n 之一代替。

定义4　设 $A\in F(S)$,$\alpha\in[0,1]$,$R\in\{I,I_Q,I_n\}$,若对任意的 $v\in\Omega_R$,恒有 $v(A)\geqslant\alpha$,则称 A 为 Ω_R-(α-重言式),简称 α-重言式,其全体之集记为 α-$T(R)$;又若存在 $v_*\in\Omega_R$,使得 $v_*(A)=\alpha$,则称 A 为可达 α-重言式,记全体之集记为[α]-$T(R)$。若对任意的 $v\in\Omega_R$,恒有 $v(A)>\alpha$,则称 A 为 Ω_R-(α^+-重言式),简称 α^+-重言式,其全体之集记为 α^+-$T(R)$。特别地,1-重言式简称为重言式,其全体之集记为 $T(R)$。

定理1　设 $a,b\in[0,1]$,则有 $\min(a,b)=a\odot(a\to b)$,$\max(a,b)=\min(((a\to b)\to b),((b\to a)\to a))$。

证明:当 $a\leqslant b$ 时,$a\odot(a\to b)=a\odot1=a=\min(a,b)$;当 $b<a$ 时,$a\odot(a\to b)=a\odot(1-a+b)=b=\min(a,b)$。类似的可以证明 $\max(a,b)=\min(((a\to b)\to b),((b\to a)\to a))$。得证。

由上面的定理1,我们在 $F(S)$ 中可以引入二元运算,$\wedge$ 与

*)基金项目:国家自然科学基金(批准号:60273087);国家863项目(2002AA412020);北京市自然科学基金项目(40320009)。马盈仓　讲师,博士生,主要研究方向为代数学、泛逻辑学。何华灿　教授,博士生导师,主要研究领域为人工智能及应用、泛逻辑学。

$\vee$，其语义解释为取小与取大。定义为：$A\wedge B=A\odot(A\to B)$，$A\vee B=((A\to B)\to B)\wedge((B\to A)\to A)=((A\to B)\to B)\odot(((A\to B)\to B)\to((B\to A)\to A))$，$A,B\in F(S)$，且对任一赋值 v 有：$v(A\wedge B)=\min(v(A),v(B))$，$v(A\vee B)=\max(v(A),v(B))$。实际上，如果引入命题常元$\underline{0}$，表示假命题，真值为0，即对任意赋值 v，$v(\underline{0})=0$。则 $F(S)$ 中的运算均可由→及常元$\underline{0}$表示。即：$\neg A=A\to\underline{0}$，$A\odot B=\neg(A\to\neg B)$，$A\oplus B=\neg A\to B$。

2 多值泛逻辑的基本形式系统的一种升级算法

定义5[5,6] 设 $A\in F(S)$，定义算子序列 $f_k(A)$ 如下：

(1) $f_1(A)=A$；

(2) $f_{k+1}(A)=\neg f_k(A)\to A$，$k=1,2,\cdots$，

显然有 $A_k=_{def}f_k(A)\in F(S)$，$k=1,2,\cdots$。特别地，对某一命题变元 $p\in S$，有 $p_1=p$，$p_2=\neg p\to p$，$p_3=\neg(\neg p\to p)\to p,\cdots$。

引理1[5,6] 设 $A\in F(S)$，则对任意的 $v\in\Omega_R$ 及 $m,n\in N$，有：$v(\neg A_n\vee A_m)\geqslant m/(n+m)$，并且当 $v(A)=1/(n+m)$ 时等号成立。

由我们前面的分析可以看出，在泛逻辑的基本形式系统中，$\neg A_n\vee A_m=((\neg A_n\to A_m)\to A_m)\wedge((A_m\to\neg A_n)\to\neg A_n)=((\neg A_n\to A_m)\to A_m)\odot(((\neg A_n\to A_m)\to A_m)\to((A_m\to\neg A_n)\to\neg A_n))$。由此，立即得到下面的推论：

推论1 设 $A\in F(S)$，则对任意的 $v\in\Omega_R$ 及 $m,n\in N$，有：$v(((\neg A_n\to A_m)\to A_m)\odot(((\neg A_n\to A_m)\to A_m)\to((A_m\to A_n)\to A_n)))\geqslant m/(n+m)$，并且当 $v(A)=1/(n+m)$时等号成立。特别的有，$v(((\neg p_{n-1-i}\to p_i)\to pi)\odot(((\neg p_{n-1-i}\to p_i)\to p_i)\to((p_i\to\neg p_{n-1-i})\to\neg p_{n-1-i})))\geqslant i/(n-1)$。$i=0,1,\cdots,n-1$。

定理2 对任意的 $\alpha=i/(n-1)$，$i=0,1,\cdots,n-1$，有$[\alpha]-T(I_n)\neq\Phi$。

证明：因为，对任意的赋值 v，$v(\neg(p\to p))=0$，$v(p\to p)=1$，所以，$[0]-T(I_n)\neq\Phi$，$[1]-T(I_n)\neq\Phi$。只需考虑 $i=1,2,\cdots,n-2$，的情形即可，任取 $\alpha=i/(n-1)$，由推论1知，$v(((\neg p_{n-1-i}\to p_i)\to p_i)\odot(((\neg p_{n-1-i}\to p_i)\to p_i)\to((p_i\to\neg p_{n-1-i})\to p_{n-1-i})))\geqslant i/(n-1)=\alpha$，又因为 p 是命题变元，故存在 $v^0\in\Omega I_n$，使得 $v^0(p)=1/(n-1)$。由此可知在赋值 v^0 下：$v^0(((\neg p_{n-1-i}\to p_i)\to p_i)\odot(((\neg p_{n-1-i}\to p_i)\to p_i)\to((p_i\to\neg p_{n-1-i})\to\neg p_{n-1-i})))=i/(n-1)=\alpha$。即有$[\alpha]-T(I_n)\neq\Phi$。定理得证。

定理3 设 $\alpha,\beta\in I_n$，且 $\alpha\neq\beta$，则$[\alpha]-T(I_n)\neq\beta-T(I_n)$。

证明：不失一般性设 $\alpha>\beta$，用反证法。由定理2，存在 $A\in F(S)$，使得 $A\in[\beta]-T(I_n)$，即对任意的赋值 v，$v(A)\geqslant\beta$，且存在一个赋值 v^0，使得 $v^0(A)=\beta$，假设$[\alpha]-T(I_n)=\beta-T(I_n)$，即 $A\in[\alpha]-T(I_n)$，即是说对任意的赋值 v，$v(A)\geqslant\alpha$，显然是不可能的。从而假设错误，定理得证。

定理4(升级算法) 若 $A\in[i/(n-1)]-T(I_n)$，令 $B=\neg A\to(((\neg q_{n-2}\to q)\to q)\odot((\neg q_{n-2}\to q)\to q)\to((q\to\neg q_{n-2})\to q_{n-2}))$($q$ 不在 A 中出现)，则：$B\in[(i+1)/(n-1)]-T(I_n)$。

证明：对于任意的赋值 $v\in\Omega I_n$，$v(B)=v(\neg A\to(((\neg q_{n-2}\to q)\to q)\odot((\neg q_{n-2}\to q)\to q)\to((q\to\neg q_{n-2})\to q_{n-2})))=v(\neg A\to(\neg q_{n-2}\vee q))=\min((v(A)+v(\neg q_{n-2}\vee q)),1)\geqslant\min((i/(n-1)+1/(n-1)),1)\geqslant(i+1)/(n-1)$。又由于 $A\in[i/(n-1)]-T(I_n)$，故存在 $v^0\in\Omega I_n$，使得 $v^0(A)=i/(n-1)$，此时由于约定 q 不在 A 中出现，即令 $v^0(q)=1/(n-1)$，故此时 $v^0(B)=(i+1)/(n-1)$。所以定理得证。

3 泛逻辑的基本形式系统F(S)的一个分划

定理5 对任意的 $\alpha\in I_Q$，有$[\alpha]-T(I)\neq\Phi$。

证明：对于 $\alpha\in I_Q$，因为 α 限制在有理数集上，所以 α 可以表示为真分数 $m/(m+n)$，m,n 均为自然数。任取 $p\in S$，根据前面的定义，令 $A=((\neg p_n\to p_m)\to p_m)\odot(((\neg p_n\to p_m)\to p_m)\to(p_m\to\neg p_n)\to\neg p_n)$，由推论1可知，对任意的赋值 v，$v(A)\geqslant m/(m+n)=\alpha$，又存在赋值 v^0，使得 $v^0(p)=1/(n+m)$，则有 $v^0(A)=m/(m+n)=\alpha$。从而命题得证。

定理6 设 $\alpha,\beta\in I_Q$，且 $\alpha\neq\beta$，则$[\alpha]-T(I)\neq[\beta]-T(I)$。

类似于定理3的证明，更一般的有如下的定理。

定理7(广义重言式类类互异定理) 设 $\alpha,\beta\in I$，且 $\alpha\neq\beta$，则 $\alpha-T(I)\neq\beta-T(I)$。

证明：不失一般性设 $\alpha>\beta$，因为有理数在数轴上稠密，故存在 $\gamma\in I_Q$，使得 $\alpha>\gamma>\beta$。由定理5知，$[\gamma]-T(I)\neq\Phi$，即存在 $A\in F(S)$，使得 $A\in[\gamma]-T(I)$。从而 $A\in\beta-T(I)$，且 A 不在 $\alpha-T(I)$中，故 $\alpha-T(I)\neq\beta-T(I)$。命题得证。

对于 α^+-重言式，类似的有如下的类类互异定理：

定理8 设 $\alpha,\beta\in I$，且 $\alpha\neq\beta$，则 $\alpha^+T(I)\neq\beta^+T(I)$。

设 $\alpha,\beta\in I_Q$，且 $\alpha\neq\beta$，则 $\alpha^+\text{-}T(I_Q)\neq\beta^+\text{-}T(I_Q)$。

现在我们知道，对于任意的 $\alpha\in I_Q$，均有可达 α-重言式。那么对于无理数 α 来说，是否也有可达 α-重言式？回答是否定的。即在泛逻辑的基本形式系统 $F(S)$ 中，不存在无理数的可达重言式。首先引入下面的定义：

定义6[13] 一个 n 元函数 $f:[0,1]^n\to[0,1]$ 叫做 McNaughton 函数，如果它满足：

1) f 是连续函数；

2) $[0,1]^n$ 可分成有限多个部分，在每个部分上 f 都可由一个整系数的 n 元一次函数去表达。

对任意的 $A\in(p_1,p_2,\cdots,p_n)\in F(S)$，我们定义由 A 所导出的函数为$\underline{A}(x_1,x_2,\cdots,x_n)=_{def}v(A(p_1,p_2,\cdots,p_n))$($v$ 为一赋值，且把 A 中的原子命题 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 分别映到 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，每一 $x_i\in[0,1]$)，比如 $A=p\to q$，则导出的函数为 $x_1\to x_2$。这样判别公式 A 的可达 α-重言式问题，即转化为所导出函数的最小值问题。若$\underline{A}(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的最小值为 α，则 A 为可达 α-重言式。现在只需说明，$\underline{A}(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的最小值不为无理数。

已经证明，在 Lukasiewicz 逻辑系统中的每一公式 A 所导出的函数均为 McNaughton 函数[13]，由前面的分析，对于泛逻辑基本形式系统来说，其每一公式均可表示为只含蕴涵联结词的形式，即只含有 Lukasiewicz 蕴涵，所以其每一公式所导出的函数也均为 McNaughton 函数。也就是说，对每一公式 $A\in F(S)$，其所导出的函数在$[0,1]^n$ 可分成有限多个部分，在每个部分上$\underline{A}$都可由一个整系数的 n 元一次函数去表达，对于任意这样两个整系数的 n 元一次函数 $f_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$f_j(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，或者 $f_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)\leqslant f_j(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，或者 $f_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)\geqslant f_j(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，或者有一个超平面 H 把$[0,1]^n$ 分成两个半空间 H^+ 和 H^-，使得 $f_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)\leqslant f_j(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，对任意的$(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in H^+$，而对任意的$(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in H^-$，有 $f_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)\geqslant f_j(x_1,$

$x_2,\cdots,x_n$)。更一般地，如果分为 k 个部分，对于$\{1,2,\cdots,k\}$的每一个排列 w，定义 P_w 如下：

$$P_w=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in[0,1]^n \mid p_{w1}(x_1,x_2,\cdots,x_n)\geqslant p_{w2}(x_1,x_2,\cdots,x_n)\geqslant\cdots\geqslant p_{wk}(x_1,x_2,\cdots,x_n)\}$$

其中$\{w_1,w_2,\cdots,w_k\}$为$\{1,2,\cdots,k\}$的一个排列，$p_{wi}(x_1,x_2,\cdots,x_n)$为整系数的 n 元一次函数 $p_1,p_2,\cdots,p_k$ 中的某一个。这样$[0,1]^n$就可由有限个闭半空间组成，要求$\underline{A}$在$[0,1]^n$上的最小值可以转化为考虑 p_i 在 P_w 上的最小值，然后在取小。而 p_i 在 P_w 上的最小值问题又可转化为线性规划的问题，由线性规划知识，由于 P_w 是有限个闭半空间的交，因此它是一个多面体，且有有限个顶点，又因为 $p_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)$为整系数的 n 元一次函数，所以 P_w 的每个顶点坐标都是有理数，故 p_i 的极小值也必为有理数。从而有下面的定理：

定理9 如果 α 为$[0,1]$上的无理数，则$[\alpha]-T(I)=\Phi$。

这样我们可以看到，在泛逻辑的基本系统 $F(S)$中，只存在有理数的可达重言式，而又因为任一公式 $A\in F(S)$，其导出的函数为连续函数，那么在定义域内一定存在最小值，也就是说，对任意的 $v\in\Omega_I$，$v(A)\geqslant\alpha$ 且等号成立，并且 α 只能为有理数。由此有下面的定理：

定理10(分划定理) 在泛逻辑的基本系统中，$F(S)=\bigcup_\alpha([\alpha]-T(I))$，其中 $\alpha\in I_Q$。

4 广义语义 MP 规则和广义语义 HS 规则

定理11(广义语义 MP 规则) 如果，$A\in\alpha-T(I)$，$A\to B\in\beta-T(I)$，则 $B\in\gamma-T(I)$，这里 $\gamma\geqslant\max(0,\alpha+\beta-1)$。$A,\beta\in I_Q$。

(广义语义 HS 规则)如果，$(A\to B)\in\alpha-T(I)$，$(B\to C)\in\beta-T(I)$，则$(A\to C)\in\gamma-T(I)$，这里 $\gamma\geqslant\max(0,\alpha+\beta-1)$。$\alpha,\beta\in I_Q$。

证明：对于广义语义 MP 规则，如果 $v(A\to B)=1$，则 $v(B)\geqslant v(A)\geqslant\alpha\geqslant\beta+\alpha-1$，如果 $v(A\to B)<1$，则 $v(A\to B)=1-v(A)+v(B)\geqslant\beta$，即 $v(B)\geqslant\beta+v(A)-1\geqslant\beta+\alpha-1$。又最小取0，所以 $B\in\gamma-T(I)$，$\gamma\geqslant\max(0,\alpha+\beta-1)$。对于广义语义 HS 规则，对 $v(A)$，$v(B)$，$v(C)$分情况讨论，类似以上的证明可得结论。定理得证。

定义7 设 $\alpha\in[0,1]$，称从 $A\in\alpha-T(I)$与$(A\to B)\in\alpha-T(I)$推得 $B\in\alpha-T(I)$的规则为 α—MP 规则，称从$(A\to B)\in\alpha-T(I)$与$(B\to C)\in\alpha-T(I)$推得$(A\to C)\in\alpha-T(I)$得规则为 α—HS 规则。

定义8 设 $\alpha\in I_Q$，称从 $A\in[\alpha]-T(I)$与$(A\to B)\in[\alpha]-T(I)$推得 $B\in[\alpha]-T(I)$的规则为$[\alpha]$—*MP* 规则，称从$(A\to B)\in[\alpha]-T(I)$与$(B\to C)\in[\alpha]-T(I)$推得$(A\to C)\in[\alpha]-T(I)$得规则为$[\alpha]$—HS 规则。

有以下的一些性质(证明略)：

1)$\alpha\in I_Q$，如果$[\alpha]$—MP 规则成立，则 α—MP 规则成立；如果$[\alpha]$—HS 规则成立，则 α—HS 规则成立。

2)$\alpha\in I_Q$，如果$[\alpha]$—MP 规则不成立，则$[\alpha]$—HS 规则不成立。

3)[0]-MP 规则，[1]-MP 规则，[1]-HS 规则成立，从而0-MP 规则，0-HS 规则，1-HS 规则成立。[0]-HS 规则不成立，0-HS 规则成立。

命题1 在泛逻辑基本形式系统中，[1/2]—MP 规则与[1/2]—HS 规则不成立。进而1/2—MP 规则与1/2—HS 规则也不成立。

证明：举一反例。$A=\neg p\vee p$，$B=\neg((p\to\neg p)\wedge(\neg p\to p))$($p$ 为命题变元，$\vee$，$\wedge$ 记号见前面)。易知对任意的赋值 v，$v(A)\geqslant1/2$，$v(A\to B)\geqslant1/2$，但是 $v(B)\geqslant0$。从而得证。

定理12 在泛逻辑基本形式系统中，如果 A 与 B 没有共同的命题变元，则$[\alpha]$—MP 规则成立。进而 α—MP 规则成立。$\alpha\in I_Q$。

证明：只需讨论 $\alpha\in Q\cap(0,1)$。首先证明，对任意的 $A\in F(S)$，如果对任意的赋值 v，$v(A)\geqslant\alpha\neq0$，则一定存在某一赋值 v_0，使得 $v_0(A)=1$。

由前面的分析可知，在泛逻辑基本形式系统中，每一公式所导出的函数均为 McNaughton 函数。在定义域内，给其每一变元均赋值0，则某一 n 元一次函数 $f_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的常数项一定为1，假如不为1，则必为0，此时的值即为0。这与 A 为 $\alpha(\neq0)$-重言式矛盾。故常数项一定为1。即此时的值为1。也就是说，存在赋值 v_0，使得 $v_0(A)=1$。

下面证明：如果 A 与 B 没有共同的命题变元，则$[\alpha]$—*MP* 规则成立。

首先证明对任意的赋值 v，$v(B)\geqslant\alpha$。假设存在 v_1，$v_1(B)=\beta<\alpha$，因为由前面分析存在赋值 v_0，使得 $v_0(A)=1$。而又因为 A 与 B 没有相同的命题变元，所以，v_0与 v_1在公式 $A\to B$ 中可以合并成一个赋值 v_3，显然 $v_3(A\to B)=\beta<\alpha$，这与$(A\to B)\in[\alpha]-T(I)$矛盾。所以对任意的赋值 v，$v(B)\geqslant\alpha$。

下面证明，存在某一赋值 v_4，使得 $v_4(B)=\alpha$。假如对所有的赋值 v，$v(B)>\alpha$。则 $v(A\to B)\geqslant1\to v(B)>1\to\alpha>\alpha$。这与$(A\to B)$是可达 α 重言式矛盾。故而存在某一赋值 v_4，使得 $v_4(B)=\alpha$。命题得证。

小结 泛逻辑的基本形式系统在泛逻辑中具有十分重要的地位，本文对其广义重言式理论进行了系统的研究。对[0,1]区间的有理点来说，均是可达重言式，并且是类类互异的。而对无理数没有可达重言式。通过广义语义规则可以看到，在一般推理过程中，具有真值的损耗。而由定理12可以看出，A 与 B 没有共同的命题变元时，$[\alpha]$—MP 规则看起来十分有效。这对于指导我们推理是有用的。

参考文献

1 何华灿，等. 经验性思维中的泛逻辑. 中国科学(E 辑)，1996，26(1)：72～78
2 何华灿，等. 泛逻辑学原理. 北京：科学出版社，2001
3 张小红. 泛逻辑的基本形式演绎系统 UL 及其可靠性. 计算机科学，2003，30(11)：21～14
4 王国俊. 修正的 Kleene 系统中的 Σ-(α-重言式)理论. 中国科学(E 辑)，1998，28(2)：146～152
5 杨晓斌，张文修. Lukasiewicz 系统中的广义重言式理论. 陕西师范大学学报(自然科学版)，1998，26(4)：6～9
6 杨晓斌，张文修. Lukasiewicz 多值逻辑系统中的广义重言式理论. 模糊系统与数学，2000，14(1)：8～12
7 裴道武. 多值逻辑系统中的子代数与广义重言式. 陕西师范大学学报(自然科学版)，2000，28(2)：18～22
8 Daowu P，Jun L. Generalized Tautologies in Product Logical Systems. 模糊系统与数学，2002，16(4)：19～27
9 吴洪博. 修正的 Kleene 系统中的广义重言式理论. 中国科学(E 辑)，2002，32(2)：224～229
10 吴洪博，文秋梅. Gainse-Rescher 逻辑系统中的一种降级算法及其性质. 数学研究，2002，35(1)：60～64
11 吴洪博，阎满富. Godel 逻辑系统中 F(S)的一个分划及其应用. 工程数学学报，2001，18(4)：61～68
12 王国俊. 非经典数理逻辑与近似推理. 北京：科学出版社，2000
13 王国俊. MV-代数、BL-代数、R_0-代数与多值代数. 模糊系统与数学，2002，16(2)：1～15