

# 可再生混合高阶指数多项式的插值细分法

李照宏 郑红婵 廉慧芬 金明娅

(西北工业大学应用数学系 西安 710129)

**摘 要** 通过引入新的形状控制参数,提出一类可以精确插值混合型指数多项式的非静态插值细分法。其基本思想是,通过生成指数多项式空间的指数 B 样条细分法,得到具有相同空间再生性的插值细分法。与具有相同再生性的其他插值细分法相比,所提细分法具有更小的支撑与更大的自由度。从理论上对细分法的再生性进行了分析,并进一步通过图例分析了初始形状控制参数及自由参数对极限曲线的影响。最后展示了取特殊的初始形状控制参数时,所提细分法对于一些特殊曲线的再生性。

**关键词** 非静态,插值细分法,再生性,指数多项式,指数 B 样条

**中图法分类号** TP391.9

**文献标识码** A

**DOI** 10.11896/j.issn.1002-137X.2018.03.008

## Interpolatory Subdivision Schemes for Mixed Higher-order Exponential Polynomials Reproduction

LI Zhao-hong ZHENG Hong-chan LIAN Hui-fen JIN Ming-ya

(Department of Applied Mathematics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710129, China)

**Abstract** By introducing new shape control parameter, this paper presented a family of unified interpolatory subdivision schemes which can accurately interpolate mixed and high-order exponential polynomials. The basic idea is to obtain new interpolatory subdivision schemes with the same spare reproducing through generating exponential B-spline subdivision schemes exponential polynomial space. These schemes have smaller support and greater freedom degree than other schemes with the same reproduction. This paper analyzed the reproduction property of the interpolatory schemes in theory. Finally, the influence of initial shape control parameters and free parameters on the limit curve was analyzed. For specific initial control parameter, the presented schemes can be used to reproduce some special curves which are represented by mixed and high-order exponential polynomials. This paper further showed that variety of schemes will be obtained by choosing different free parameters.

**Keywords** Non-stationary, Interpolatory subdivision schemes, Reproduction, Exponential polynomials, Exponential B-spline

## 1 引言

细分法是一种生成光滑曲线/曲面的有效工具。对于任意给定的初始控制顶点集,一个线性细分规则即为通过计算前一层点的局部线性组合,迭代产生更加密集的控制点集的过程。若细分规则与细分的次数无关,则称此细分法为静态细分法,反之则称为非静态细分法。若某细分法的极限曲线/曲面经过所有的控制顶点集,则称该细分法为插值细分法,反之则称为逼近细分法。

相较于静态细分法,非静态细分法具有更加良好的性质,其中一个非常重要的原因是非静态细分法可以精确表示一些复杂的几何图形,如圆锥曲线、双叶线、玫瑰线、心形线等。复杂图形的精确表示(即再生)问题,通常可以通过再生其指数多项式表示的参数方程来解决。对可再生指数多项式空间的

细分法的研究是非常有价值的。相较于逼近细分法,插值细分法的可控性好、定位准确、细分规则简单。在几何造型和计算机图形学中,人们更期望精确且可控地表示几何图形。因此,本文立足于非静态插值细分法,研究了具有良好再生性的细分法的构造及其统一表示。

关于非静态细分法再生性的理论研究,已有许多优秀的结论<sup>[1-4,6,8-15]</sup>。然而,除了最常用的圆锥曲线外,较少有研究对二阶曲线(心形线、三叶线及内摆线等)、三阶曲线(星形线、心脏线及四叶线等)乃至更高阶混合曲线(螺旋线等)的再生性进行分析并提出对应的插值细分法。这些曲线在实际应用中是非常重要的,尤其是能构造更加复杂的曲线。Beccari 等<sup>[1]</sup>于 2007 年基于拉格朗日插值思想,提出了一个可再生圆锥曲线的 4 点插值细分法。该方法在构造再生空间维数较大的细分法时计算复杂度较大。Romani 等<sup>[2]</sup>于 2009 年基于可

到稿日期:2017-07-18 返修日期:2017-08-08 本文受陕西省自然科学基金项目:基于细分法的可控分形生成及自然景物模拟研究(S2016YFJM1161)资助。

李照宏(1994—),女,硕士生,主要研究方向为 CAGD;郑红婵(1971—),女,博士,教授,博士生导师,主要研究方向为 CAGD, E-mail: zhenghc@nwpu.edu.cn(通信作者);廉慧芬 女,硕士生,主要研究方向为 CAGD;金明娅 女,硕士生,主要研究方向为 CAGD。

再生星形线和心形线的 6 点逼近细分法,提出了具有相同再生性的插值细分法。该方法的适用情形较为单一,对于具有丰富再生性的细分法的构造没有统一的框架。Conti 等<sup>[3]</sup>于 2011 年提出了可再生指数多项式空间  $V_{T,\gamma} = \text{Span}\{x^r e^{\theta_l x}, r=0, \dots, \tau_l-1, l=1, \dots, N\}$  的细分法所满足的充要条件,其中  $\{\theta_l, \tau_l\} (l=1, \dots, N)$  为定义指数多项式的微分方程的特征值与特征向量集。然而,通过求解其充要条件得到的细分法多为逼近细分法。Novara 等<sup>[4]</sup>于 2015 年基于经典的 Dubuc-Deslauriers (D-D) 细分法<sup>[5]</sup>,提出了可再生空间  $\text{Span}\{1, x, \dots, x^{2n-3}, e^{tx}, e^{-tx}\}$  的  $2n (n \in \mathbb{N}, n \geq 2)$  点插值细分法的统一框架。该框架首次给出了具有指数多项式再生性的非静态插值细分法的统一表示。然而,对于由代数多项式和指数多项式生成的混合型指数多项式,通过上述框架无法得到对应的细分。Conti 等<sup>[6]</sup>于 2016 年基于混合型的指数多项式,提出了指数拟样条细分法。指数拟样条细分法的提出首次系统地解决了混合型指数多项式的再生问题,然而其再生的指数多项式仍然具有一定的局限性,如特征值单一等。

本文在上述工作的基础上,从定义指数多项式空间的微分方程及特征多项式出发,通过引入特征值扩散因子  $m (m \in \mathbb{N}, m \geq 1)$  和特征值重数  $n (n \in \mathbb{N}, n \geq 1)$  来刻画混合指数多项式中指数项的阶数和代数项的次数,提出能够再生高阶指数多项式空间  $\text{Span}\{e^{\pm tx}, e^{\pm 2tx}, e^{\pm 3tx}, \dots, e^{\pm mtx}\}$  与混合高阶指数多项式空间  $\text{Span}\{e^{\pm mtx}, xe^{\pm mtx}, x^2 e^{\pm mtx}, \dots, x^{n-1} e^{\pm mtx}\}$  的插值细分法的统一框架,并给出其生成多项式的统一表示。

## 2 理论基础

为给后续内容提供理论基础,本节对非静态细分法及其指数多项式的再生性进行简单的介绍。

### 2.1 非静态 binary 细分法

给定初始控制点集  $P^0 := \{p_i^0, i \in \mathbb{Z}\}$ , 非静态 binary 细分法  $\{S_{a^{(k)}}\}$  第  $k$  次细分后的控制点集为:  $P^k := \{p_i^k, i \in \mathbb{Z}\} (k \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\})$ , 则第  $k+1$  次细分后的控制点集为:

$$P_i^{k+1} = \sum_j a_{i-2j}^{(k)} P_j^k \quad (1)$$

其中,  $a^{(k)} := \{a_i^{(k)} \in \mathbb{R} : i \in \mathbb{Z}\}$  称为第  $k$  层细分的 mask。对  $a^{(k)}$  做  $z$  变换得:

$$a^{(k)}(z) = \sum_i a_i^{(k)} z^i$$

$a^{(k)}(z)$  称为  $\{S_{a^{(k)}}\}$  的 symbol。若  $a^{(k)}(z)$  满足:  $a^{(k)}(z) + a^{(k)}(-z) = 2$ , 则称  $\{S_{a^{(k)}}\}$  是插值的。若  $a^{(k)}(z)$  满足:  $a^{(k)}(z) = a^{(k)}(z^{-1})$ , 则称  $\{S_{a^{(k)}}\}$  是奇对称的。若  $a^{(k)}(z)$  满足:  $za^{(k)}(z) = a^{(k)}(z^{-1})$ , 则称  $\{S_{a^{(k)}}\}$  是偶对称的。若存在一个以  $a(z)$  为 symbol 的静态细分法  $\{S_a\}$ , 使得非静态细分法  $\{S_{a^{(k)}}\}$  的 symbol  $a^{(k)}(z)$  满足:  $\lim_{k \rightarrow \infty} a^{(k)}(z) = a(z)$ , 则称  $\{S_{a^{(k)}}\}$  渐进相似于  $\{S_a\}$ 。

若初始数据集  $P^0$  使得  $S_{a^{(0)}} P^0 = 0$  当且仅当  $P^0 \equiv 0$ , 则称  $\{S_{a^{(k)}}\}$  是非奇异的。通常研究的细分法均为非奇异的。若存在连续且不恒为零的函数  $f(x) (x \in \mathbb{R})$ , 使得:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{i \in \mathbb{Z}} |p_i^k - f(t_i^{(k)})| = 0$$

其中,  $t_i^{(k)} (k > 0)$  是对数据集  $p_i^k$  的参数化, 且满足  $t_{i+1}^{(k)} - t_i^{(k)} = 2^{-k}$ , 则称  $f(x)$  为  $\{S_{a^{(k)}}\}$  关于  $P^0$  的极限函数, 且满足  $f(x) =$

$S_{a^{(0)}} P^0$ 。特别地, 若  $p_i^0 = \delta_i^0, i \in \mathbb{Z}$ , 则称  $f(x)$  为细分法  $\{S_{a^{(k)}}\}$  的基极限函数。

细分法的收敛性、光滑性、生成性及支集均与  $t_i^{(k)}$  的选取无关, 只有再生性依赖于  $t_i^{(k)}$ 。讨论细分法的再生性时, 通常设:

$$t_i^{(k)} = 2^{-k}(i+p), i \in \mathbb{Z}, p \in \mathbb{R}, k \geq 0$$

通过选择适当的平移参数  $p$ , 可以使细分法达到最优再生性。对于插值细分法, 插值的特性保证了其再生性与生成性等价, 因此通常选取  $p=0$ , 即  $t_i^{(k)} = 2^{-k}i$ 。称  $p=0$  时的参数化为基本参数化。

下面介绍细分法生成和再生指数多项式空间的相关结论。

### 2.2 细分法再生指数多项式空间的概念和定理

令  $T \in \mathbb{Z}_+$ ,  $\gamma = (\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_T)$  为一有限实数或虚数集合, 其中  $\gamma_T \neq 0$ , 令  $D^n := d^n/dx^n$  为  $n$  阶微分算子, 则指数多项式空间为:

$$V_{T,\gamma} := \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, f \in C^T(\mathbb{R}), \sum_{j=0}^T \gamma_j D^j f = 0\}$$

其中, 微分方程  $\sum_{j=0}^T \gamma_j D^j f = 0$  的解可通过特征多项式  $\gamma(z) = \sum_{j=0}^T \gamma_j z^j$  求解。定义  $\{\theta_l, \tau_l\}$  为使得  $\gamma(z)$  满足:  $\gamma^{(r)}(\theta_l) = 0, r=0, \dots, \tau_l-1, l=1, \dots, N$  的零点和重数的集合, 因此  $V_{T,\gamma}$  可显式地表示为:

$$V_{T,\gamma} = \text{Span}\{x^r e^{\theta_l x}, r=0, \dots, \tau_l-1, l=1, \dots, N\} \quad (2)$$

其中,  $T = \sum_{l=1}^N \tau_l$ 。

下面给出细分法  $\{S_{a^{(k)}}\}$  生成和再生指数多项式空间  $V_{T,\gamma}$  的充要条件。

**定理 1<sup>[3]</sup>** 令  $\{S_{a^{(k)}}\}, k \geq 0$  为非静态细分法,  $V_{T,\gamma}$  如式 (2)

所示,  $z_l^{(k)} := e^{\frac{-\theta_l}{2^{k+1}}}, l=1, \dots, N$ , 则  $\{S_{a^{(k)}}\}, k \geq 0$  生成  $V_{T,\gamma}$  当且仅当  $a^{(k)}(z)$  满足:

$$\frac{d^r a^{(k)}(-z_l^{(k)})}{dz^r} = 0, l=1, \dots, N, r=0, \dots, \tau_l-1 \quad (3)$$

进一步,  $\{S_{a^{(k)}}\}, k \geq 0$  再生  $V_{T,\gamma}$  当且仅当存在  $p \in \mathbb{R}$  使得  $a^{(k)}(z)$  同时满足条件 (3) 及

$$a^{(k)}(z_l^{(k)}) = 2(z_l^{(k)})^p$$

$$\frac{d^r a^{(k)}(z_l^{(k)})}{dz^r} = 2(z_l^{(k)})^{p-r} \prod_{q=0}^{r-1} (p-q)$$

其中,  $l=1, \dots, N; r=1, \dots, \tau_l-1$ 。

若  $V_{T,\gamma}$  中  $\theta_l$  成对出现, 则利用  $V_{T,\gamma}$  可更方便地生成常用函数。  $\theta_l$  取纯虚数时, 可以生成正(余)弦函数;  $\theta_l$  取实数时, 可以生成双曲正(余)弦函数。不妨设  $V_{T,\gamma}$  对应的特征多项式  $\gamma(z)$  的零点及重数集合如下:

$$\Delta := \{(\pm \theta_l, \tau_l); \theta_l \in \mathbb{R}/i\mathbb{R}, l=1, 2, \dots, N/2\}$$

则

$$\tilde{V}_{T,\gamma} = \text{Span}\{x^r e^{\pm \theta_l x}, r=0, \dots, \tau_l-1, l=1, \dots, N/2\} \quad (4)$$

下面给出可再生  $\tilde{V}_{T,\gamma}$  的充要条件。

**引理 1<sup>[8]</sup>** 令  $\{S_{a^{(k)}}\}, k \geq 0$  为非静态插值细分法,  $\tilde{V}_{T,\gamma}$  如式 (4) 所示, 则  $\{S_{a^{(k)}}\}$  再生  $\tilde{V}_{T,\gamma}$  当且仅当存在洛朗多项式  $b^{(k)}(z)$  满足:

$$2 - a^{(k)}(z) = b^{(k)}(z)(1 - e^{\pm \theta_l/2^{k+1}} z)^{\tau_l}$$

其中,  $l=1, \dots, N/2; r=1, \dots, \tau_l-1$ 。

从特征多项式的角度考虑  $\tilde{V}_{T,\gamma}$ :

1)  $\Lambda = \{(0, s) : s \in \mathbb{N}\}$  时

$$\tilde{V}_{s,\gamma} = \text{Span}\{1, x, \dots, x^{s-1}\}$$

2)  $\Lambda = \{(\pm mt, n) : t \in \{0, s, is | s > 0\}, mt \neq 0, m, n \in \mathbb{N}\}$  时

$$\tilde{V}_{2n,\gamma} = \text{Span}\{x^r e^{\pm mtx}, r = 0, \dots, n-1\}$$

对于任意的  $s \in \mathbb{N}$ , 由 1) 确定的代数多项式空间  $\tilde{V}_{s,\gamma}$  可通过静态的 D-D 细分法<sup>[5]</sup> 再生。

固定  $n=1$ , 对于任意给定的  $m = m_0 \in \mathbb{N}, m_0 \geq 1$ , 即对应特征多项式的非零特征值为单根时:

$$\tilde{V}_{2,\gamma}^{m_0} = \text{Span}\{e^{m_0 tx}, e^{-m_0 tx}\} \quad (5)$$

进一步, 对于任意的  $m \in \mathbb{N}, m \geq 1$ , 可以得到:

$$\tilde{V}_{2m,\gamma} = \text{Span}\{e^{\pm tx}, e^{\pm 2tx}, e^{\pm 3tx}, \dots, e^{\pm mtx}\} \quad (6)$$

固定  $m = m_0$ , 对于任意的  $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ , 即对应特征多项式的非零特征值为  $n$  重根时, 有:

$$\tilde{V}_{2n,\gamma}^{m_0} = \text{Span}\{e^{\pm m_0 tx}, x e^{\pm m_0 tx}, x^2 e^{\pm m_0 tx}, \dots, x^{n-1} e^{\pm m_0 tx}\} \quad (7)$$

空间式(6)和式(7)在实际应用中非常重要, 如星形线、摆线等参数方程均可由空间式(6)的基线性表示。对于更一般的曲线, 可以考虑用式(7)表示。因此, 构造可再生空间式(6)和式(7)的细分法是非常有意义的。

下面分别构造可再生高阶指数多项式空间式(6)及混合高阶指数多项式空间式(7)的插值细分法。

### 3 可再生高阶指数多项式空间 $\tilde{V}_{2m,\gamma}$ 的插值细分法

下面从指数 B 样条细分法出发, 提出可再生空间式(6)的插值细分法。

首先引入  $v^{k+1} = \frac{1}{2}(e^{\frac{t}{2^{k+1}}} + e^{-\frac{t}{2^{k+1}}})$ , 则

$$L = \begin{bmatrix} 2v^{k+1} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & 2v^{k+1} & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 2v^{k+1} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 2v^{k+1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times m}$$

其中,  $k \geq -1, t \in \{0, s, is | s > 0\}, m \in \mathbb{N}, m \geq 1$ 。

令  $\lambda_m(v^{k+1}) = \det(L)$ , 通过对矩阵  $L$  的行列式进行数学归纳, 不难得到:

$$\lambda_m(v^{k+1}) = \det(L) = e^{\frac{mt}{2^{k+1}}} + e^{-\frac{mt}{2^{k+1}}} \quad (8)$$

指数 B 样条<sup>[8]</sup> 即为具有紧支撑的分段指数多项式。已知一个对称集合:

$$\Lambda = \{(\pm mt, 1) : mt \neq 0, m \in \mathbb{N}\}$$

对于任意的  $k \geq 0$ , 定义对应的指数 B 样条细分法的 symbol 为:

$$B_{2,m}^{(k)}(z) = \frac{(e^{\frac{mt}{2^{k+1}}} z + 1)(e^{-\frac{mt}{2^{k+1}}} z + 1)}{(e^{\frac{mt}{2^{k+1}}} + e^{-\frac{mt}{2^{k+1}}})z} = \frac{z + \lambda_m(v^{k+1}) + z^{-1}}{\lambda_m(v^{k+1})} \quad (9)$$

其中,  $\lambda_m(v^{k+1})$  如式(8)所示。利用插值条件及定理 1, 不难验证以  $B_{2,m}^{(k)}(z)$  为 symbol 的细分法是插值的且再生  $\tilde{V}_{2,\gamma}^m = \text{Span}\{e^{mtx}, e^{-mtx}\}$ 。

对于任意给定的  $j \in \{1, 2, \dots, m\}$ , 令  $z_j^{(k)} = e^{-\frac{j t}{2^{k+1}}}$ , 则以  $B_{2,j}^{(k)}(z) = 1 + \frac{z + z^{-1}}{\lambda_j(v^{k+1})}$  为 symbol 的细分法再生  $\tilde{V}_{2,\gamma}^j = \text{Span}$

$\{e^{jtx}, e^{-jtx}\}$ , 即  $B_{2,j}^{(k)}(z)$  满足:

$$B_{2,j}^{(k)}(z_j^{(k)}) = 0, j \in \{1, 2, \dots, m\} \quad (10)$$

对于任意的  $j = 1, 2, \dots, m$ , 若存在洛朗多项式  $\tilde{B}_{2m,\Lambda}^{(k)}(z)$  满足:

$$\tilde{B}_{2m,\Lambda}^{(k)}(z_j^{(k)}) = 0, j = 1, 2, \dots, m \quad (11)$$

则以  $\tilde{B}_{2m,\Lambda}^{(k)}(z)$  为 symbol 的插值细分法再生空间式(6)。

结合式(10)中  $B_{2,j}^{(k)}(z)$  的表达, 不妨设:

$$\tilde{B}_{2m,\Lambda}^{(k)}(z) = 1 + (z + z^{-1})C_m^{(k)}(z) \quad (12)$$

则式(11)等价于

$$1 + (z_j^{(k)} + (z_j^{(k)})^{-1})C_m^{(k)}(z_j^{(k)}) = 0, j = 1, 2, \dots, m$$

即

$$C_m^{(k)}(z_j^{(k)}) = \frac{-1}{z_j^{(k)} + (z_j^{(k)})^{-1}} = \frac{1}{\lambda_j(v^{k+1})}, j = 1, 2, \dots, m$$

也就是说, 若存在多项式  $C_m^{(k)}(z)$  满足:

$$C_m^{(k)}(z_j^{(k)}) = \frac{1}{\lambda_j(v^{k+1})}, j = 1, 2, \dots, m \quad (13)$$

则以式(12)为 symbol 的插值细分法再生空间式(6)。

事实上,  $C_m^{(k)}(z)$  的求解可以转化为拉格朗日插值问题: 已知插值节点  $z_j^{(k)}, j = 1, 2, \dots, m$ , 求满足插值条件式(13)的插值函数  $C_m^{(k)}(z)$ 。需要注意的是, 为保证细分法的插值性与对称性, 需要对插值基函数进行变换:  $z \rightarrow (z - \frac{1}{z})^2$ 。

下面给出再生式(6)的插值细分法的统一表示。

**定理 2** 令  $\lambda_m(v^{k+1})$  如式(8)所示, 则以:

$$\tilde{B}_{2m,\Lambda}^{(k)}(z) = 1 + (z + z^{-1})C_m^{(k)}(z)$$

为 symbol 的指数 B 样条细分法是插值的且再生指数多项式空间:

$$\tilde{V}_{2m,\gamma} = \text{Span}\{e^{\pm tx}, e^{\pm 2tx}, e^{\pm 3tx}, \dots, e^{\pm mtx}\}$$

其中,

$$C_m^{(k)}(z) = \sum_{j=1}^m C_j^{(k)} L_j^{(k)}(z), C_j^{(k)} = \frac{1}{\lambda_j(v^{k+1})}$$

$$L_j^{(k)}(z) = \prod_{i \neq j, i=1}^m \frac{(z - \frac{1}{z})^2 - \lambda_i^2(v^{k+1}) + 4}{\lambda_j^2(v^{k+1}) - \lambda_i^2(v^{k+1})}$$

证明: 通过验证插值条件, 插值性容易得证; 下面证明再生性。

令  $z_j^{(k)} = -e^{\frac{-jt}{2^{k+1}}}, j = 1, 2, \dots, m$ , 则

$$\begin{aligned} \tilde{B}_{2m,\Lambda}^{(k)}(z_j^{(k)}) &= 1 + (z_j^{(k)} + (z_j^{(k)})^{-1}) \sum_{j=1}^m C_j^{(k)} L_j^{(k)}(z_j^{(k)}) \\ &= 1 - \lambda_j(v^{k+1}) \sum_{j=1}^m C_j^{(k)} L_j^{(k)}(z_j^{(k)}) = 0 \end{aligned}$$

又因为  $\tilde{B}_{2m,\Lambda}^{(k)}(z)$  满足  $\tilde{B}_{2m,\Lambda}^{(k)}(z) = \tilde{B}_{2m,\Lambda}^{(k)}(z^{-1})$ , 所以有:

$$\tilde{B}_{2m,\Lambda}^{(k)}(-e^{\frac{-jt}{2^{k+1}}}) = \tilde{B}_{2m,\Lambda}^{(k)}(-e^{\frac{jt}{2^{k+1}}}) = 0$$

即细分法满足再生性条件。

**例 1** 再生  $\tilde{V}_{4,\gamma} = \text{Span}\{e^{\pm tx}, e^{\pm 2tx}\}$  的非静态插值细分法。

令  $m=2, \lambda_m(v^{k+1})$  如式(8)所示, 由定理 2 有:

$$\begin{aligned} \tilde{B}_{4,\Lambda}^{(k)}(z) &= \frac{-1}{32v^5 + 16v^4 - 32v^3 - 8v^2 + 8v} (z^3 + z^{-3}) + \\ &\quad \frac{16v^4 + 8v^3 - 12v^2 - 4v + 1}{32v^5 + 16v^4 - 32v^3 - 8v^2 + 8v} (z + z^{-1}) + 1 \end{aligned}$$

即对应的插值细分法为:

$$\begin{cases} P_{2i}^{k+1} = P_i^k \\ P_{2i+1}^{k+1} = \frac{16v^4 + 8v^3 - 12v^2 - 4v + 1}{32v^5 + 16v^4 - 32v^3 - 8v^2 + 8v} (P_i^k + P_{i+1}^k) + \\ \quad \frac{-1}{32v^5 + 16v^4 - 32v^3 - 8v^2 + 8v} (P_{i-1}^k + P_{i+2}^k) \end{cases} \quad (14)$$

当  $k \rightarrow \infty$  时, 细分法式(14)收敛于

$$\begin{cases} P_{2i}^{k+1} = P_i^k \\ P_{2i+1}^{k+1} = \frac{9}{16} (P_i^k + P_{i+1}^k) - \frac{1}{16} (P_{i-1}^k + P_{i+2}^k) \end{cases}$$

即静态 4 点 D-D 细分法。故细分法式(14)渐进相似于静态的 D-D 细分法。细分法式(14)的连续性可通过静态的 D-D 细分法刻画。与静态 D-D 细分法的连续性相关的知识可参考文献[5], 非静态细分法与静态细分法连续性的关系可参考文献[7, 17]。这里给出结论: 细分法式(14)的连续性与静态的 D-D 细分法的连续性相同。

下面通过 3 个图例展示细分法式(14)对于特殊曲线(二阶曲线)的良好再生性。图 1 表示取  $v^0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$  时, 心形线的再生。图 2 表示取  $v^0 = \cos(\frac{\pi}{5})$  时, 三叶线的再生。图 3 表示取  $v^0 = \cos(\frac{\pi}{10})$  时, 内摆线的再生。

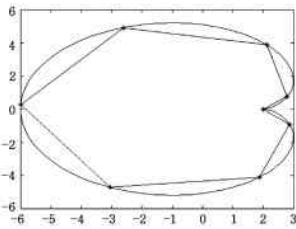


图 1 由细分法式(14)再生的心形线

Fig. 1 Cardioid reproduced by formula(14)

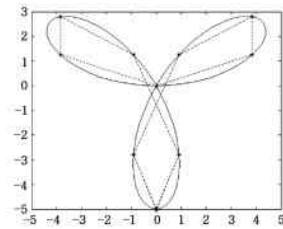


图 2 由细分法式(14)再生的三叶线

Fig. 2 Trifolium reproduced by formula(14)

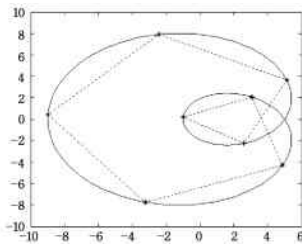


图 3 由细分法式(14)再生的内摆线

Fig. 3 Pascal's limaçon reproduced by formula(14)

对于更高阶的曲线, 可以通过选取更大的  $m$  来实现。

注 1: 目前, 已有许多细分法可用于构造工程应用中的诸多曲线。然而, 本节提出的细分法较已有细分法具有更小的支撑, 如通过例 1 中 4 点插值细分法再生的心形线、三叶草及内摆线等在已有工作中<sup>[2, 4]</sup>至少需要 6 点的细分法才能达到精确再生。因此, 在实际应用中, 本文提出的细分法更为简单高效。

事实上, 工程中还有一类很重要的曲线, 即螺旋线, 其参

数方程大多为混合的指数多项式。因此, 对于任意的  $m, n \in \mathbb{N}, m, n \geq 1$ , 构造形如  $x^{n-1} e^{\pm m x}$  的可再生混合高阶指数多项式的细分法是必须要解决的问题。下面依然从指数 B 样条出发, 提出一类可再生混合高阶指数多项式空间(7)的插值细分法。

#### 4 可再生混合高阶指数多项式空间 $\tilde{V}_{2n, \gamma}^m$ 的插值细分法

已知一个对称集合:

$$\Lambda = \{(\pm mt, n); mt \neq 0, m, n \in \mathbb{N}\}$$

对于任意的  $k \geq 0$ , 定义可生成空间(7)的指数 B 样条细分法对应的 symbol 为:

$$\begin{aligned} B_{m, 2n, \Lambda}^{(k)}(z) &= z^{-n} (e^{\frac{mt}{2^{k+1}}} z + 1)^n (e^{-\frac{mt}{2^{k+1}}} z + 1)^n \\ &= (z + (\lambda_m(v^{k+1})) + z^{-1})^n \end{aligned}$$

其中,  $\lambda_m(v^{k+1})$  如式(8)所示。对再生式(7)的细分法的构造是非常困难的。本文从可生成式(7)的细分法出发, 逐渐增强其再生性。

首先, 通过引入修正因子  $K_{m, n}^{(k)}$  对指数 B 样条细分法进行修正, 使修正后的细分法可再生其中最简单的两个指数多项式  $e^{mtx}$  和  $e^{-mtx}$ 。

命题 1 令  $\lambda_m(v^{k+1})$  如式(8)所示。以

$$\tilde{B}_{m, 2n, \Lambda}^{(k)}(z) = K_{m, n}^{(k)} B_{m, 2n, \Lambda}^{(k)}(z)$$

为 symbol 的指数 B 样条细分法再生  $e^{mtx}$  和  $e^{-mtx}$ 。

其中:

$$K_{m, n}^{(k)} = \frac{1}{2^{n-1} (\lambda_m(v^{k+1}))^n}$$

$$B_{m, 2n, \Lambda}^{(k)}(z) = (z + (\lambda_m(v^{k+1})) + z^{-1})^n$$

证明: 令  $z_1^{(k)} = e^{\frac{mt}{2^{k+1}}}$ ,  $z_2^{(k)} = (z_1^{(k)})^{-1} = e^{-\frac{mt}{2^{k+1}}}$ , 则

$$\tilde{B}_{m, 2n, \Lambda}^{(k)}(z_1^{(k)}) = \frac{(z_1^{(k)} + (\lambda_m(v^{k+1})) + (z_1^{(k)})^{-1})^n}{2^{n-1} (\lambda_m(v^{k+1}))^n} = 2$$

$$\tilde{B}_{m, 2n, \Lambda}^{(k)}(-z_1^{(k)}) = \frac{(-z_1^{(k)} + (\lambda_m(v^{k+1})) - (z_1^{(k)})^{-1})^n}{2^{n-1} (\lambda_m(v^{k+1}))^n} = 0$$

又因为  $\tilde{B}_{m, 2n, \Lambda}^{(k)}(z)$  关于  $z$  是对称的, 故

$$\tilde{B}_{m, 2n, \Lambda}^{(k)}(z_2^{(k)}) = \tilde{B}_{m, 2n, \Lambda}^{(k)}(z_1^{(k)}) = 2$$

$$\tilde{B}_{m, 2n, \Lambda}^{(k)}(-z_2^{(k)}) = \tilde{B}_{m, 2n, \Lambda}^{(k)}(-z_1^{(k)}) = 0$$

根据定理 1, 再生性即证。

进一步引入变异多项式  $C_{m, 2n, \Lambda}^{(k)}(z)$  对修正的指数 B 样条细分法进行乘法变异, 以达到空间式(7)的再生性。

定义生成空间式(7)的以  $\tilde{B}_{m, 2n, \Lambda}^{(k)}(z)$  为 symbol 的指数 B 样条细分法为  $\{S_{\tilde{B}_{m, 2n, \Lambda}^{(k)}}^{m, n}\}$ , 再生式(7)的以  $I_{m, 2n}^{(k)}(z)$  为 symbol 的非静态插值细分法为  $\{S_{I_{m, 2n}^{(k)}}^{m, n}\}$ 。不妨设存在洛朗多项式  $C_{m, 2n, \Lambda}^{(k)}(z)$  使得  $I_{m, 2n}^{(k)}(z)$  满足:

$$I_{m, 2n}^{(k)}(z) = \tilde{B}_{m, 2n, \Lambda}^{(k)}(z) C_{m, 2n, \Lambda}^{(k)}(z) \quad (15)$$

其中,  $C_{m, 2n, \Lambda}^{(k)}(z)$  为使得  $\{S_{I_{m, 2n}^{(k)}}^{m, n}\}$  再生式(7)的变异多项式。因此, 细分法  $\{S_{I_{m, 2n}^{(k)}}^{m, n}\}$  的构造问题转化为多项式  $C_{m, 2n, \Lambda}^{(k)}(z)$  的求解问题。

首先, 令  $\theta_1 = -\theta_2 = mt$ ,  $z_l^{(k)} = e^{\frac{-\theta_l}{2^{k+1}}}$ ,  $l = 1, 2$ 。为保证  $\{S_{I_{m, 2n}^{(k)}}^{m, n}\}$  的再生性, 即  $I_{m, 2n}^{(k)}(z)$  满足:

$$\begin{cases} \frac{d^r I_{m,2n}^{(k)}(-z_l^{(k)})}{dz^r} = 0, & r=0,1,\dots,n-1 \\ I_{m,2n}^{(k)}(z_l^{(k)}) = 2, \\ \frac{d^r I_{m,2n}^{(k)}(z_l^{(k)})}{dz^r} = 0, & r=0,1,\dots,n-1 \end{cases} \quad (16)$$

对式(16)在  $z=z_l^{(k)}$  处采用乘法求导的 Leibniz 规则,即有:

$$\sum_{i=0}^r \binom{r}{i} \frac{d^i C_{m,2n,\Delta}^{(k)}(z_l^{(k)})}{dz^i} \frac{d^{r-i} \tilde{B}_{m,2n,\Delta}^{(k)}(z_l^{(k)})}{dz^{r-i}} = 2\delta_{r,0} \quad (17)$$

其中,  $r=0,1,\dots,n-1; l=1,2$ 。

对于给定的  $z=z_l^{(k)}, \tilde{B}_{m,2n,\Delta}^{(k)}(z_l^{(k)}) \neq 0$ , 因此式(17)有唯一解:

$$\frac{d^r C_{m,2n,\Delta}^{(k)}(z_l^{(k)})}{dz^r} = 2 \frac{d^r G_{m,2n,\Delta}^{(k)}(z_l^{(k)})}{dz^r} \quad (18)$$

其中:

$$G_{m,2n,\Delta}^{(k)}(z) = \frac{1}{\tilde{B}_{m,2n,\Delta}^{(k)}(z)} = \frac{2^{n-1} \lambda_m^n (v^{k+1})}{(z+z^{-1}+\lambda_m(v^{k+1}))^n} \quad (19)$$

对式(19)采用复合函数求导的 Faà di Bruno 规则<sup>[16]</sup>,即有:

$$\begin{aligned} \frac{d^r G_{m,2n,\Delta}^{(k)}(z)}{dz^r} &= \frac{\lambda_m^n (v^{k+1})}{2^{1-n}} \sum_{j=1}^r \binom{n+j-1}{j} \frac{(-1)^j j! Q_{j,r}(z)}{(z+z^{-1}+\lambda_m(v^{k+1}))^{n+j}} \end{aligned}$$

其中:

$$Q_{j,r}(z) = \sum_{q \in M^j, |q|=r} \frac{r!(-1)^r z^{-r-j}}{q! \prod_{i=1}^r N(q,i)!} \quad (20)$$

其中,  $M^j = \{q = (q_1, q_2, \dots, q_j) \in \mathbb{N}^j, q_1 \geq q_2 \geq \dots \geq q_j \geq 1\}$ , 且  $|q| = q_1 + q_2 + \dots + q_j$ ,  $N(q,i)$  表示  $i$  出现在  $q$  中的次数。

结合式(18)及式(19)的 Faà di Bruno 求导结果,可以得到  $C_{m,2n,\Delta}^{(k)}(z)$  满足:

$$\begin{cases} C_{m,2n,\Delta}^{(k)}(z_l^{(k)}) = 1 \\ \frac{d^r C_{m,2n,\Delta}^{(k)}(z_l^{(k)})}{dz^r} = \sum_{j=1}^r \binom{n+j-1}{j} \frac{(-1)^j j! Q_{j,r}(z_l^{(k)})}{(2\lambda_m(v^{k+1}))^j} \end{cases} \quad (21)$$

其中,  $r=1,2,\dots,n-1; Q_{j,r}(z)$  如式(20)所示。

其次,为保证  $\{S_{m,2n}^{m,n}\}$  的对称性,令  $I_{m,2n}^{(k)}(z)$  满足  $I_{m,2n}^{(k)}(z) = I_{m,2n}^{(k)}(z^{-1})$ , 即  $C_{m,2n,\Delta}^{(k)}(z)$  满足  $C_{m,2n,\Delta}^{(k)}(z) = C_{m,2n,\Delta}^{(k)}(z^{-1})$ 。为方便求解  $C_{m,2n,\Delta}^{(k)}(z)$ ,不妨设存在洛朗多项式  $\rho$ ,使得  $C_{m,2n,\Delta}^{(k)}(z)$  满足:

$$C_{m,2n,\Delta}^{(k)}(z) = \rho(z+z^{-1}) \quad (22)$$

对式(22)在  $z=z_l^{(k)}$  处使用复合函数求导的 Faà di Bruno 规则,即有:

$$\begin{cases} C_{m,2n,\Delta}^{(k)}(z_l^{(k)}) = \rho(\lambda_m(v^{k+1})) \\ \frac{d^r C_{m,2n,\Delta}^{(k)}(z_l^{(k)})}{dz^r} = \sum_{j=1}^r \frac{d^j \rho(\lambda_m(v^{k+1}))}{dz^j} Q_{j,r}(z_l^{(k)}) \end{cases} \quad (23)$$

其中,  $r=1,2,\dots,n-1; Q_{j,r}(z)$  如式(20)所示。

比较式(21)和式(23)可以得到:

$$\begin{cases} \rho(\lambda_m(v^{k+1})) = 1 \\ \frac{d^j \rho(\lambda_m(v^{k+1}))}{dz^j} = \frac{(-1)^j j!}{2^{-j} \lambda_m^{-j} (v^{k+1})} \binom{n+j-1}{j} \end{cases} \quad (24)$$

其中,  $j=1,2,\dots,n-1$ 。

显然,式(24)可以看作  $\rho$  在  $z=\lambda_m(v^{k+1})$  处的插值问题。

利用 Hermite 插值规则,即可得到多项式  $\rho$  的表达式,进而得到  $C_{m,2n,\Delta}^{(k)}(z)$  的表达式。

$$\begin{aligned} C_{m,2n,\Delta}^{(k)}(z) &= \rho(z+z^{-1}) \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n+j-1}{j} \frac{(-1)^j (z+z^{-1}-\lambda_m(v^{k+1}))^j}{2^j \lambda_m^j (v^{k+1})} \end{aligned}$$

下面给出再生式(7)的插值细分法的统一表示。

**定理 3** 令  $\tilde{B}_{m,2n,\Delta}^{(k)}(z)$  为修正的  $2n$  阶的指数 B 样条细分法的 symbol,  $\tilde{V}_{m,\gamma}^{(k)}$  如式(7)所示。对于任意给定的  $m \in \mathbb{N}$ ,  $m \geq 1$ , 任意的  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 1$ , 以

$$I_{m,2n}^{(k)}(z) = \tilde{B}_{m,2n,\Delta}^{(k)}(z) C_{m,2n,\Delta}^{(k)}(z)$$

为 symbol 的细分法  $\{S_{m,2n}^{m,n}\}$  是插值的且再生

$$\tilde{V}_{m,\gamma}^{(k)} = \text{Span}\{e^{\pm m\gamma}, x e^{\pm m\gamma}, x^2 e^{\pm m\gamma}, \dots, x^{n-1} e^{\pm m\gamma}\}$$

其中:

$$\tilde{B}_{m,2n,\Delta}^{(k)}(z) = \frac{1}{2^{n-1} (\lambda_m(v^{k+1}))^n} (z + (\lambda_m(v^{k+1})) + z^{-1})^n$$

$$C_{m,2n,\Delta}^{(k)}(z) = \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n+j-1}{j} \frac{(-1)^j (z+z^{-1}-\lambda_m(v^{k+1}))^j}{2^j \lambda_m^j (v^{k+1})}$$

证明:其再生性显然。下面证明非静态细分法  $\{S_{m,2n}^{m,n}\}$  是插值的。

由  $\{S_{m,2n}^{m,n}\}$  的再生性及引理 1 知,存在一个洛朗多项式  $b^{(k)}(z)$  使得:

$$I_{m,2n}^{(k)}(z) = 2 + b^{(k)}(z) \tilde{B}_{m,2n,\Delta}^{(k)}(-z)$$

利用式(15),可以得到:

$$2 + b^{(k)}(z) \tilde{B}_{m,2n,\Delta}^{(k)}(-z) = \tilde{B}_{m,2n,\Delta}^{(k)}(z) C_{m,2n,\Delta}^{(k)}(z)$$

对上式进行变换得:

$$2 + b^{(k)}(-z) \tilde{B}_{m,2n,\Delta}^{(k)}(z) = \tilde{B}_{m,2n,\Delta}^{(k)}(-z) C_{m,2n,\Delta}^{(k)}(-z)$$

即存在  $b^{(k)}(z) = -C_{m,2n,\Delta}^{(k)}(-z)$  使得:

$$I_{m,2n}^{(k)}(z) + I_{m,2n}^{(k)}(-z) = 2$$

因此  $\{S_{m,2n}^{m,n}\}$  满足插值条件,得证。

注 2:对于任意的  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 1$ , 定理 3 的结论仅对于任意给定的  $m=m_0$  成立。令  $m=1$  时,该结论恰好与文献[6]中的结论一致。而对于任意的  $j=1,2,\dots,m$ ,可再生空间

$$\text{Span}\{e^{\pm j\gamma}, \dots, x^{n-1} e^{\pm j\gamma}, \dots, e^{\pm m\gamma}, \dots, x^{n-1} e^{\pm m\gamma}\}$$

的插值细分法理论上可以通过对定理 3 进行推广得到。这个问题正在进一步的研究中。

下面对  $\{S_{m,2n}^{m,n}\}$  的点数(支撑)给出说明。

Romani 等人<sup>[2]</sup>指出,若一个非静态插值细分法  $\{S_{m,2n}^{m,n}\}$  的生成多项式的最高次数与最低次数的差为  $4n-2$ , 则该细分法为  $2n$  点的插值细分法。由定理 3 知,对于任意的  $m$  和  $n$ ,  $I_{m,2n}^{(k)}(z)$  的次数差为  $2n-1 - (-2n-1) = 4n-2$ 。因此,  $\{S_{m,2n}^{m,n}\}$  为  $2n$  点的非静态插值细分法。

下面给出非静态的  $2n$  点插值细分法  $\{S_{m,2n}^{m,n}\}$  与静态的  $2n$  点插值 D-D 细分法的关系。

**定理 4** 令  $\{S_{m,2n}^{m,n}\}$  为由定理 3 所确定的  $2n$  点非静态插值细分法,则  $\{S_{m,2n}^{m,n}\}$  渐进相似于静态的  $2n$  点 D-D 细分法。

证明:由式(15)知,  $I_{m,2n}^{(k)}(z)$  可以表示为:

$$I_{m,2n}^{(k)}(z) = \tilde{B}_{m,2n,\Delta}^{(k)}(z) C_{m,2n,\Delta}^{(k)}(z)$$

其中:

$$\tilde{B}_{m,2n,\Lambda}^{(k)}(z) = \frac{1}{2^{n-1}(\lambda_m(v^{k+1}))^n} (z + (\lambda_m(v^{k+1})) + z^{-1})^n$$

$$C_{m,2n,\Lambda}^{(k)}(z) = \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n+j-1}{j} \frac{(-1)^j (z + z^{-1} - \lambda_m(v^{k+1}))^j}{2^j \lambda_m^j(v^{k+1})}$$

且  $\lambda_m(v^{k+1})$  如式(8)所示。

由式(8)易得  $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_m(v^{k+1}) = 2$ , 故

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{B}_{m,2n,\Lambda}^{(k)}(z) = \frac{(z + z^{-1} + 2)^n}{2^{2n-1}}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} C_{m,2n,\Lambda}^{(k)}(z) = \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n+j-1}{j} (-1)^j 2^{-2j} (z + z^{-1} - 2)^j$$

即

$$\lim_{k \rightarrow \infty} I_{m,2n}^{(k)}(z) = \frac{(z + z^{-1} + 2)^n}{2^{2n-1}} \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \binom{n+j-1}{j} 2^{-2j} (z + z^{-1} - 2)^j$$

上式等号右侧为 D-D 细分法的生成多项式, 得证。

与对定理 2 中细分法的连续性分析同理, 可通过静态 D-D 细分法的连续性刻画  $\{S_{m,2n}^{m,n}\}$  的连续性。

下面对细分法  $\{S_{m,2n}^{m,n}\}$  举例进行说明。

例 2 再生  $\tilde{V}_{6,\gamma}^m = \text{Span}\{e^{\pm m\gamma}, xe^{\pm m\gamma}, x^2e^{\pm m\gamma}\}$  的非静态插值细分法  $\{S_{m,6}^{m,3}\}$ 。

固定  $n=3$ , 对于任意给定的  $m(m \in \mathbb{N}, m \geq 1)$ , 由定理 3 得:

$$I_{m,6}^{(k)}(z) = \frac{3}{8\lambda_m^5(v^{k+1})} (z^5 + z^{-5}) + \frac{15 - 10\lambda_m^2(v^{k+1})}{8\lambda_m^5(v^{k+1})} (z^3 + z^{-3}) + \frac{15\lambda_m^4(v^{k+1}) - 30\lambda_m^2(v^{k+1}) + 30}{8\lambda_m^5(v^{k+1})} (z + z^{-1}) + 1$$

故对应的细分法  $\{S_{m,6}^{m,3}\}$  为:

$$\begin{cases} P_{2i}^{k+1} = P_i^k \\ P_{2i+1}^{k+1} = \frac{15 - 10\lambda_m^2(v^{k+1})}{8\lambda_m^5(v^{k+1})} (P_{i-1}^k + P_{i+2}^k) + \frac{3}{8\lambda_m^5(v^{k+1})} (P_{i-2}^k + P_{i+3}^k) + \frac{15\lambda_m^4(v^{k+1}) - 30\lambda_m^2(v^{k+1}) + 30}{8\lambda_m^5(v^{k+1})} (P_i^k + P_{i+1}^k) \end{cases}$$

若给定  $m=1$ , 则  $\{S_{1,6}^{1,3}\}$  为:

$$\begin{cases} P_{2i}^{k+1} = P_i^k \\ P_{2i+1}^{k+1} = \frac{15 - 40(v^{k+1})^2}{256(v^{k+1})^5} (P_{i-1}^k + P_{i+2}^k) + \frac{3}{256(v^{k+1})^5} (P_{i-2}^k + P_{i+3}^k) + \frac{120(v^{k+1})^4 - 60(v^{k+1})^2 + 15}{128(v^{k+1})^5} (P_i^k + P_{i+1}^k) \end{cases}$$

且  $\{S_{1,6}^{1,3}\}$  再生  $\tilde{V}_{6,\gamma}^1 = \text{Span}\{e^{\pm \gamma}, xe^{\pm \gamma}, x^2e^{\pm \gamma}\}$ 。

若给定  $m=2$ , 则  $\{S_{2,6}^{2,3}\}$  为:

$$\begin{cases} P_{2i}^{k+1} = P_i^k \\ P_{2i+1}^{k+1} = \frac{15 - 10(4(v^{k+1})^2 - 2)^2}{8(4(v^{k+1})^2 - 2)^5} (P_{i-1}^k + P_{i+2}^k) + \frac{3}{8(4(v^{k+1})^2 - 2)^5} (P_{i-2}^k + P_{i+3}^k) + \frac{15(4(v^{k+1})^2 - 2)^4 - 30(4(v^{k+1})^2 - 2)^2 + 30}{8(4(v^{k+1})^2 - 2)^5} (P_i^k + P_{i+1}^k) \end{cases}$$

且  $\{S_{2,6}^{2,3}\}$  再生  $\tilde{V}_{6,\gamma}^2 = \text{Span}\{e^{\pm 2\gamma}, xe^{\pm 2\gamma}, x^2e^{\pm 2\gamma}\}$ 。

若给定  $m=3$ , 则  $\{S_{3,6}^{3,3}\}$  为:

$$\begin{cases} P_{2i}^{k+1} = P_i^k \\ P_{2i+1}^{k+1} = \frac{15 - 10(8(v^{k+1})^3 - 6v^{k+1})^2}{8(8(v^{k+1})^3 - 6v^{k+1})^5} (P_{i-1}^k + P_{i+2}^k) + \frac{3}{8(8(v^{k+1})^3 - 6v^{k+1})^5} (P_{i-2}^k + P_{i+3}^k) + \frac{15(8(v^{k+1})^3 - 6v^{k+1})^4 - 30(8(v^{k+1})^3 - 6v^{k+1})^2 + 30}{8(8(v^{k+1})^3 - 6v^{k+1})^5} (P_i^k + P_{i+1}^k) \end{cases}$$

且  $\{S_{3,6}^{3,3}\}$  再生  $\tilde{V}_{6,\gamma}^3 = \text{Span}\{e^{\pm 3\gamma}, xe^{\pm 3\gamma}, x^2e^{\pm 3\gamma}\}$ 。

下面从理论上分析细分法  $\{S_{m,2n}^{m,n}\}$  对于特殊曲线的再生性, 并以  $\{S_{m,6}^{m,3}\}$  为例, 通过基极限曲线分析初始控制参数  $v^0$  及参数  $m$  和  $n$  对细分法的影响。

首先引入一个引理。

引理 2<sup>[1]</sup> 令  $\{S_{m,2n}^{m,n}\}$  为由定理 3 确定的  $2n$  点非静态插值细分法。初始控制数据  $p_i^0 (i \in \mathbb{Z}^+)$  以参数  $u > 0$  等距采样于空间式(7)的基所表示的某一曲线。若取初始控制参数

$$v^0 = \frac{1}{2}(e^{tu} + e^{-tu}), t \in \{0, s, is | s > 0\}$$

则细分法  $\{S_{m,2n}^{m,n}\}$  可以精确再生该采样曲线。

对于  $t \in \{0, s, is | s > 0\}$ , 分别分析  $\{S_{m,2n}^{m,n}\}$  对于特殊曲线的再生性。

1)  $t=0$  时,  $v^0 \equiv 1$ 。即  $v^k \equiv 1, \lambda_m(v^{k+1}) \equiv 2$ 。  $\{S_{m,2n}^{m,n}\}$  可以精确再生参数方程属于  $\text{Span}\{1, x, x^2, \dots, x^{2n-1}\}$  的曲线。

2)  $t=s > 0$  时,  $v^0 = \cosh(su) > 1, v^k = \cosh(su/2^k)$ 。

$$\lambda_m(v^{k+1}) = 2v^{k+1}\lambda_{m-1}(v^{k+1}) - \lambda_{m-2}(v^{k+1}) \quad (25)$$

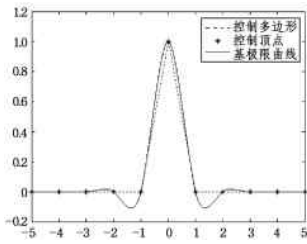
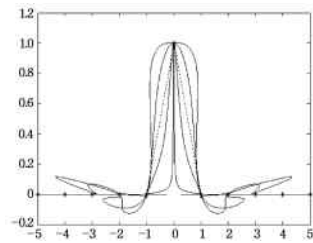
其中,  $\lambda_1(v^{k+1}) = 2v^{k+1}$ 。  $\{S_{m,2n}^{m,n}\}$  可以精确再生参数方程属于  $\text{Span}\{\cosh(msx), \sinh(msx), \dots, x^{n-1} \cosh(msx), x^{n-1} \sinh(msx)\}$  的曲线。

3)  $t=is (s > 0)$  时,  $v^0 = \cos(su) \in (-1, 1), v^k = \cos(su/2^k), \lambda_m(v^{k+1})$  如式(25)所示。  $\{S_{m,2n}^{m,n}\}$  可以精确再生参数方程属于  $\text{Span}\{\cos(msx), \sin(msx), \dots, x^{n-1} \cos(msx), x^{n-1} \sin(msx)\}$  的曲线。

下面以  $\{S_{m,6}^{m,3}\}$  为例, 通过基极限曲线分析初始控制参数  $v^0$  及参数  $m$  和  $n$  对细分法的影响。

令  $v^0 = 1, \{S_{m,6}^{m,3}\}$  即为 6 点 D-D 细分法。图 4 给出当  $v^0 = 1$  时,  $\{S_{m,6}^{m,3}\}$  的基极限曲线。图 5 以  $m=1$  为例, 给出  $v^0$  对  $\{S_{m,6}^{m,3}\}$  的基极限曲线的影响:  $v^0$  越大, 基极限曲线越逼近控制多边形。图 6 给出对于固定的  $v^0$ , 参数  $m$  对  $\{S_{m,6}^{m,3}\}$  的基极限曲线的影响。图 6(a) 表明当  $v^0 = 0.85 \in (-1, 1)$  时,  $m$  越小, 基极限曲线越逼近控制多边形; 图 6(b) 表明当  $v^0 = 1.8 > 1$  时,  $m$  越大, 基极限曲线越逼近控制多边形。

最后以  $y = f(x) = x^2 \cos(2x) + x^2 \sin(2x)$  为例分析  $\{S_{m,6}^{m,3}\}$  对特殊曲线的再生性。对于不同的参数  $m=1, 2, 3$ , 可以确定对应的初始控制参数  $v^0 = \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{12}$ , 使得  $\{S_{m,6}^{m,3}\}$  均可以再生上述曲线。图 7 给出  $\{S_{m,6}^{m,3}\}$  对  $f(x)$  的再生性。

图4  $\{S_{l_{m,3}}^{m,3}\}$ 的基极限曲线Fig. 4 Basic limit curve of  $\{S_{l_{m,3}}^{m,3}\}$ 图5  $v^0$ 由外往里依次取 $-0.2, 0.8, 10, 200$ 时 $\{S_{l_{m,3}}^{1,3}\}$ 的基极限曲线Fig. 5 Basic limit curves of  $\{S_{l_{m,3}}^{1,3}\}$  with  $v^0 = -0.2, 0.8, 10, 200$ 

(From outside to inside)

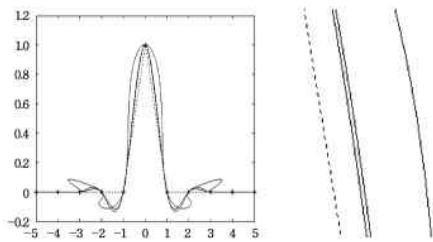
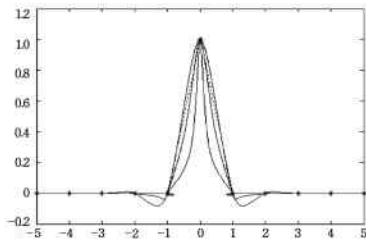
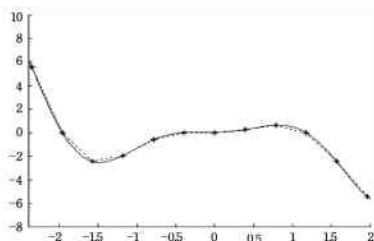
(a)  $m$ 由外往里依次为 $3, 2, 1$ 时 $\{S_{l_{m,3}}^{m,3}\}$ 的基极限曲线及其局部展示(b)  $m$ 由外往里依次为 $1, 2, 3$ 时,  $\{S_{l_{m,3}}^{m,3}\}$ 的基极限曲线图6 参数 $m$ 对 $\{S_{l_{m,3}}^{m,3}\}$ 的基极限曲线的影响Fig. 6 Effect of parameter  $m$  on the basic limit curve of  $\{S_{l_{m,3}}^{m,3}\}$ 

图7 不规则曲线的再生性

Fig. 7 Reproduction of irregular curve

**结束语** 本文从定义指数多项式空间的微分方程及特征多项式出发,通过引入参数 $m, n (m, n \in \mathbb{N}, m, n \geq 1)$ 分别刻画混合指数多项式中指数项的阶数及代数项的次数。进一步对指数B样条细分法进行修正及变异,提出了两类具有良好再

生性的非静态插值细分法,并从理论上对其再生性进行了严格的分析。定理2提出了一类可以再生高阶指数多项式空间 $\hat{V}_{2m,\gamma} = \text{Span}\{e^{\pm tx}, e^{\pm 2tx}, e^{\pm 3tx}, \dots, e^{\pm mtx}\}$ 的细分法,该类细分法可被用于构造再生心形线、三叶线等曲线的细分法。与前人提出的可再生同一曲线的细分法相比,本文的细分法具有更小的支撑。定理3提出了一类可以再生混合高阶指数多项式空间 $\hat{V}_{2n,\gamma}^m = \text{Span}\{e^{\pm mtx}, xe^{\pm mtx}, x^2e^{\pm mtx}, \dots, x^{n-1}e^{\pm mtx}\}$ 的细分法,该类细分法可被用于构造再生螺旋线等更为一般的曲线的细分法。关于再生混合指数多项式的细分法,文献[6]也给出了一些结论,而与文献[6]不同,本文提出的细分法具有更大的自由度,可以通过调整参数 $m$ 和 $n$ 的取值得到丰富多样的细分法。

虽然本文的定理3对前人的工作进行了推广,但依然存在一些问题,如对于任意的 $m$ 和 $n$ ,可再生更丰富的指数多项式空间 $\text{Span}\{e^{\pm tx}, \dots, x^{n-1}e^{\pm tx}, \dots, e^{\pm mtx}, \dots, x^{n-1}e^{\pm mtx}\}$ 的插值细分法正在进一步研究中。

## 参考文献

- [1] BECCARI C, CASCIOLA G, ROMANI L. A non-stationary uniform tension controlled interpolating 4-point scheme reproducing conics[J]. Computer Aided Geometric Design, 2007, 24: 1-9.
- [2] ROMANI L. From approximating subdivision schemes for exponential splines to high-performance interpolating algorithms[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2009, 224 (1): 383-396.
- [3] CONTI C, ROMANI L. Algebraic conditions on non-stationary subdivision symbols for exponential polynomial reproduction [J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2011, 236: 543-556.
- [4] NOVARA P, ROMANI L. Building blocks for designing arbitrarily smooth subdivision schemes with conic precision [J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2015, 279: 67-79.
- [5] DUBUC S. Interpolation through an iterative scheme[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1986, 114: 185-204.
- [6] CONTI C, GEMIGNANI L, ROMANI L. Exponential pseudo-splines: Looking beyond exponential B-splines [J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2016, 439: 32-56.
- [7] DYN N, LEVIN D. Analysis of asymptotically equivalent binary subdivision schemes[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 1995, 193(2): 594-621.
- [8] JEONG B, LEE Y J, YOON J, et al. A family of non-stationary subdivision schemes reproducing exponential polynomials [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2013, 402 (1): 207-219.
- [9] CHARINA M, CONTI C, ROMANI L. Reproduction of exponential polynomials by multivariate non-stationary subdivision schemes with a general dilation matrix[J]. Numerische Mathematik, 2014, 127(2): 223-254.

(下转第66页)

Newton 方法相比,本文方法在 Newton 方法发散的某些情况下仍可以快速收敛到正确的根。

本文方法仍有不足,即目前假定给定的小区间内只有一个单实根。理论上,对于单变量的多项式方程,有很多方法可以用于隔离出所有的实根。但是,对于非多项式的方程,今后还需要研究相应的实根隔离方法。另外,对于重实根,目前只是简单地应用  $F(t) = \frac{f(t)}{f'(t)}$  来处理。在小区间内当  $f'(t)$  有实根时,  $F(t)$  变成无界,从而会削弱上述方法的处理效率。研究更好的重根处理方法以提高相应的收敛速度和计算稳定性,也将成为今后的工作之一。

### 参 考 文 献

- [1] CHOI Y K, WANG W, LIU Y, et al. Continuous Collision Detection for Two Moving Elliptic Disks[J]. IEEE Transactions on Robotics, 2006, 22(2): 213-224.
  - [2] ELBER G, KIM M S. Geometric constraint solver using multivariate rational spline functions[C]// ACM Symposium on Solid Modeling and Applications. DBLP, 2001: 1-10.
  - [3] FAROUKI R T, GOODMAN T. On the optimal stability of the Bernstein basis [J]. Mathematics of Computation, 1996, 65(216): 1553-1566.
  - [4] BARTOŃ M, JÜTTLER B. Computing roots of polynomials by quadratic clipping[J]. Computer Aided Geometric Design, 2007, 24(3): 125-141.
  - [5] LIU L, ZHANG L, LIN B, et al. Fast approach for computing roots of polynomials using cubic clipping[J]. Computer Aided Geometric Design, 2009, 26(5): 547-559.
  - [6] CHEN X D, MA W. A planar quadratic clipping method for computing a root of a polynomial in an interval[J]. Computers & Graphics, 2015, 46(C): 89-98.
  - [7] CHEN X D, MA W, YE Y. A rational cubic clipping method for computing real roots of a polynomial [J]. Computer Aided Geometric Design, 2015, 38: 40-50.
  - [8] CHEN X D, MA W. Rational cubic clipping with linear complexity for computing roots of polynomials[J]. Applied Mathematics & Computation, 2016, 273: 1051-1058.
  - [9] EFREMOV A, HAVRAN V, SEIDEL H P. Robust and numerically stable Bézier clipping method for ray tracing NURBS surfaces[C]// Spring Conference on Computer Graphics. 2005: 127-135.
  - [10] JÜTTLER B. The dual basis functions for the Bernstein polynomials[J]. Advances in Computational Mathematics, 1998, 8(4): 345-352.
  - [11] MØRKEN K, REIMERS M. An unconditionally convergent method for computing zeros of splines and polynomials [J]. Mathematics of Computation, 2007, 76(258): 845-865.
  - [12] WEI F F, ZHOU F, FENG J Q. Survey of real root finding of univariate polynomial equation in CAGD/CG [J]. Journal of Computer-Aided Design and Computer Graphics, 2011, 23(2): 193-207. (in Chinese)  
卫飞飞, 周飞, 冯结青. CAGD/CG 领域中一元多项式方程求根问题综述[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2011, 23(2): 193-207.
  - [13] DAVIS P J. Interpolation and approximation[J]. Unt Theses & Dissertations, 2001, 3(1): 59-67.
  - [14] LI X, MU C, MA J, et al. Sixteenth-order method for nonlinear equations[J]. Applied Mathematics & Computation, 2010, 215(10): 3754-3758.
  - [15] SHARMA J R, ARORA H. A new family of optimal eighth order methods with dynamics for nonlinear equations[J]. Applied Mathematics & Computation, 2016, 273: 924-933.
- 
- (上接第 57 页)
- [10] JEONG B, KIM H, LEE Y J, et al. Exponential polynomial reproducing property of non-stationary symmetric subdivision schemes and normalized exponential B-splines[J]. Advances in Computational Mathematics, 2013, 38: 647-666.
  - [11] LI B J, YU Z L, YU B W, et al. Non-stationary Subdivision for Exponential Polynomials Reproduction[J]. Acta Mathematicae Applicatae Sinica(English Series), 2013, 29(3): 567-578.
  - [12] YU B W. A Family of Subdivision Schemes for Exponential Polynomials Reproduction[D]. Dalian: Dalian University of Technology, 2008. (in Chinese)  
郁博文. 一类重构指数多项式的细分方法[D]. 大连: 大连理工大学, 2008.
  - [13] LI B J. Construction of Exponentials Reproducing Subdivision Schemes and Rapid Evaluation of Interpolatory Subdivision Surfaces[D]. Dalian: Dalian University of Technology, 2009. (in Chinese)  
李宝军. 指数多项式曲线细分重构与插值细分曲面快速计算[D]. 大连: 大连理工大学, 2009.
  - [14] DYN N, LEVIN D, LUZZATTO. Exponentials reproducing subdivision schemes[J]. Foundations of Computational Mathematics, 2003, 3: 187-206.
  - [15] DYN N, HORMANN K, SABIN M, et al. Polynomial reproduction by symmetric subdivision schemes[J]. Journal of Approximation Theory, 2008, 15: 28-42.
  - [16] ROMAN S. The formula of Faà di Bruno[J]. American Mathematical Monthly, 1980, 10: 805-809.
  - [17] CONTI C, ROMANI L, YOON J. Approximation order and approximate sum rules in subdivision[J]. Journal of Approximation Theory, 2016, 207(C): 380-401.