

有限长度信号正交小波变换的若干问题的探讨

陈 铿 韩伯棠

(北京理工大学管理与经济学院 北京100081)

摘 要 本文讨论了有限长度信号的正交小波变换在实际应用中的边界延拓方式及其计算复杂度,提出了一种正交小波变换的精确重构的方法。数值计算的实例表明了我们所提出的精确重构方法是有效的。

关键词 正交小波,边界延拓,精确重构

Discusses on Problems of Orthonormal Wavelet Transform of Finite Length Signal

CHEN Keng HAN Bo-Tang

(School of Management & Economics, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081)

Abstract Boundary extension and its computation complexity of orthonormal wavelet transform are discussed, and a method of perfect reconstruction of orthonormal wavelet transform is put forward. The numerical examples has proved that the method of perfect reconstruction proposed in paper is effect.

Keywords Orthonormal wavelet, Boundary extension, Perfect reconstruction

1 引言

小波变换目前已被广泛用于信号的去噪、数字水印、图像与视频压缩、偏微分方程数值解、故障诊断等领域。实际应用中的信号序列都是有限长度,其小波变换的计算中必然存在着边界问题,处理效果的好坏直接影响着信号的分解与重构质量,因此是一个值得研究的问题。

对于有限长度的信号序列,实际应用中一般都采用边界滤波器或进行边界延拓的方法来处理。边界滤波器的使用增加了计算的复杂性,而边界延拓会不同程度地对数据的精确重构造带来一定的误差。我们提出了一种精确重构方法,获得了很好的结果,数值实验表明,这种精确重构方式是有效的。

2 离散正交小波变换

紧支撑正交小波是 Daubechies 在 Mallat 所提出的多分辨率分析(MRA)^[1]的基础上发展而来的^[2],离散正交小波变换的快速算法即 Mallat 金字塔分解算法如下:

设信号为 $\{c_0\}$, $\{c_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$ 和 $\{d_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$ 分别为信号的 j 级离散逼近与离散细节,则通常的文献中给出的分解与重构公式为:

$$c_{j+1,k} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_{j,n} \bar{h}_{n-2k} \quad k \in \mathbb{Z} \quad (1)$$

$$d_{j+1,k} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_{j,n} \bar{g}_{n-2k} \quad k \in \mathbb{Z} \quad (2)$$

$$c_{j,k} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_{j+1,n} h_{k-2n} + \sum_{n \in \mathbb{Z}} d_{j+1,n} g_{k-2n} \quad k \in \mathbb{Z} \quad (3)$$

其中, $\{h_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ 和 $\{g_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ 是双尺度方程中的滤波器系数, $g_n = (-1)^{1-n} \bar{h}_{1-n}$ 。

由于 h_n 为实序列,故式(1)、(2)可改写为:

$$c_{j+1,k} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_{j,n} h_{n-2k} \quad k \in \mathbb{Z} \quad (4)$$

$$d_{j+1,k} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_{j,n} g_{n-2k} \quad k \in \mathbb{Z} \quad (5)$$

此时, $g_n = (-1)^{1-n} h_{1-n}$, 式(3)、(4)、(5)就构成了离散小波正交变换的分解与重构公式。

3 边界延拓及计算复杂度

实际应用中,信号一般都是有限长度,计算中必存在边界问题。为解决边界外数据缺失的问题,一般都采用边界滤波器 and 进行边界延拓的方法^[3~9]。边界滤波器的采用使得边界内外的计算方式不统一,从而增加了计算的复杂性,下面对此进行分析。

取 $g_n = (-1)^{1-n} h_{1-n}$, 由于 Daubechies 小波的滤波器 h_n 下标范围为 $[0, 2N-1]$, 其中 N 为 Daubechies 小波的阶数,故滤波器 g_n 的下标范围为 $[-(2N-2), 1]$ 。

设信号的长度为 M , 采用式(3)、(4)、(5)进行离散正交小波变换的分解与重构计算时,从代码的编写角度来看,涉及到循环变量的选择。采用向上和向下采样的方法时, k, n 的变化范围都与信号的长度一样为 M , 若选用 k, n 为循环变量,则循环次数为 $M \times M$, 由于滤波器长度 N 远小于信号的长度 M , 因此若选用滤波器下标为循环变量,则循环次数为 $N \times M$, 计算量会大大减小。

将离散正交小波变换公式作变形。在式(4)、(5)中令 $l = n - 2k$, 式(3)中令 $l = k - 2n$, 则离散正交小波分解公式变为:

$$c_{j+1,k} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_{j,2k+l} h_l \quad k \in \mathbb{Z} \quad (6)$$

$$d_{j+1,k} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_{j,2k+l} g_l \quad k \in \mathbb{Z} \quad (7)$$

$$c_{j,k} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_{j+1,n} h_l + \sum_{n \in \mathbb{Z}} d_{j+1,n} g_l \quad k \in \mathbb{Z} \quad (8)$$

由于滤波器 g_n 的下标有正有负,因此分解与重构过程中同时存在左右边界问题,边界延拓有三种方式,即补零、周期延拓和对称延拓。在这三种延拓方式中,补零和对称延拓都需要对边界进行判断,即在循环中要加入判断语句;而周期延拓则不需要进行判断,仅需要进行求余运算,因而从实际计算的

角度来看,周期延拓的所需要的计算时间是最小的,当然,延拓的效果与有限信号的具体情况有关的。

4 精确重构

取 $\tilde{g}_n = (-1)^{1-n} h_{2N-1-n}$, 可以证明^[10], 这样所获得的 Daubechies 小波 $\tilde{\varphi}_N(t)$ 是与 g_n 对应的 Daubechies 小波 $\varphi(t)$ 平移 $2N-2$ 的结果, 它与 $\varphi(t)$ 有同样的紧支集, 其中 N 为 Daubechies 小波的阶数。因此我们可以采用 h_n 和 $\tilde{g}_n$ 作为一组滤波器进行离散正交小波变换, 其优点是 h_n 和 $\tilde{g}_n$ 的下标

变化范围是统一的, 在减少了编码计算的复杂性的同时还可以实现精确重构。

5 数值实例

我们将所提出的精确重构方法对两组信号进行了数值验证, 计算中选用的是 db4 小波。

图1为一有限长度信号, 其数学表示为, $f(t) = 30e^{-\frac{x}{40}} \sin(\frac{2\pi x}{40})$, 计算中所取长度为 $M=128$ 。

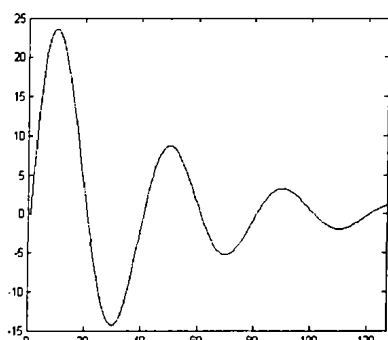


图1 有限长度信号 $f(t) = 30e^{-\frac{x}{40}} \sin(\frac{2\pi x}{40})$

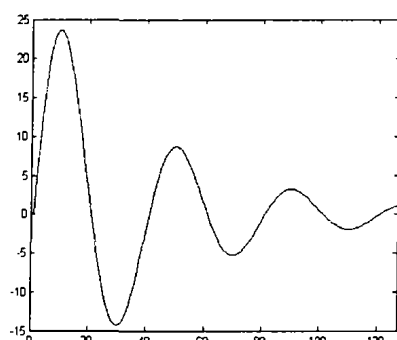


图2 精确重构后的信号

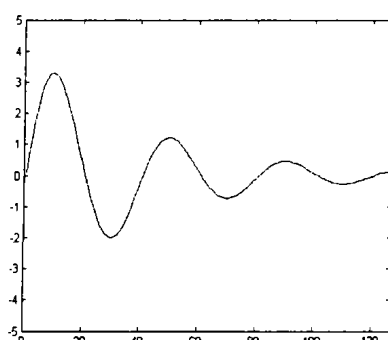


图3 精确重构后的信号与原信号间的绝对误差(单位 10^{-10})

图2为对信号进行精确重构后的结果, 从中可看出, 重构后的信号与原信号完全是一样的。图3为重构后的信号与原信号间的绝对误差, 纵轴单位为 10^{-10} , 从误差的数量级可以看出, 这确实是实现了精确重构。

为进一步说明问题, 我们选用了随机产生的一组伪随机数作为原始信号, 如图4所示, 其长度依旧为 $M=128$, 图5为采用精确重构算法对其进行分解与重构后的计算结果, 图6为重构后的数据与原始数据间的绝对误差。

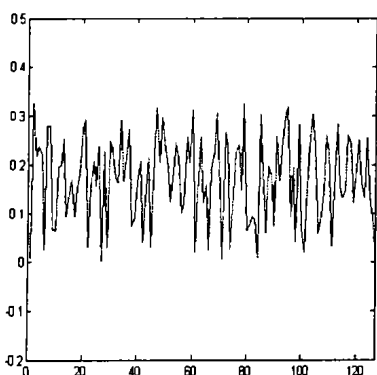


图4 作为原始信号的伪随机数序列

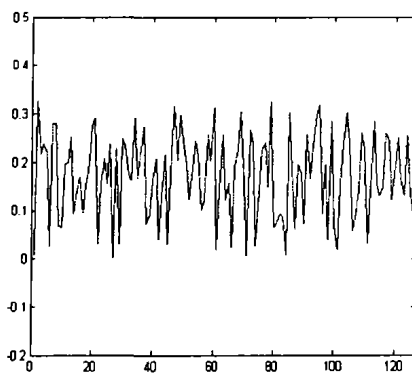


图5 精确重构后的信号

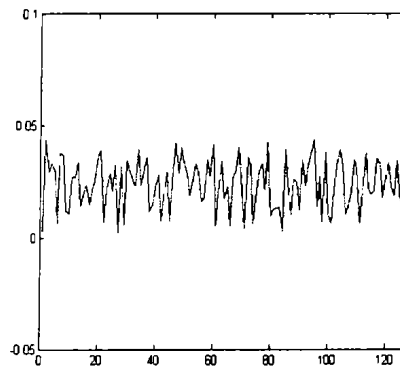


图6 精确重构后的信号与原信号间的绝对误差(单位 10^{-10})

从上述计算结果中可以看出, 我们所提出的精确重构算法是与信号的具体形式无关的, 具有一般性, 因此适合各种类型的信号的精确重构。

结束语 本文讨论了正交小波变换在实际应用中的若干问题并提出了一种精确重构的计算方法。数值计算的实例表明, 这种精确重构方法是成功的, 同时, 计算简单可行。该方法还可进一步推广到二维的情况, 我们将在以后予以讨论。

参考文献

- 1 Daubechies I. Orthonormal Bases of Compactly Supported Wavelets. Commun. on Pure and Appl. Math., 1988, XLI: 909~996
- 2 Mallat S. A Theory for Multiresolution Signal Decomposition: The Wavelet Representation. IEEE Trans on PAMI, 1989, 11(7): 674~693
- 3 Strang G, Nguyen T. Wavelets and Filter Banks, Wellesley Cam-

bridge Press, 1996

- 4 Herley C. Boundary filters for finite-length signals and time-varying filter banks. IEEE Trans. Circuits and Systems II, 1994. 637~640
- 5 Konezny M D, Rao S S. Improving the DWT-LMS Algorithm: Boundary Filter DWT Matrix Construction, IEEE Proceeding of ASILO, 1995, 1: 75~81
- 6 耿则勋. 小波变换边界处理的一般方法. 工程数学学报, 1997, 14(4): 39~43
- 7 薛晓辉, 高文. 正交小波的零误差边界延拓法. 电子学报, 1997, 25(11): 11~13
- 8 乔世杰. 小波图像编码中的对称边界延拓法. 中国图像图形学报, 2000, 5A(9): 725~729
- 9 屈稳太, 诸静. 图像小波变换中的两个关键技术—滤波器的正则性与信号的边界处理. 浙江大学学报(工学版), 2003, 137(2): 185~189
- 10 李水根, 吴纪桃. 分形与小波. 科学出版社, 2002