

基于水平集曲线演化的目标轮廓提取^{*})

陈波¹ 赖剑煌^{2,3}

(中山大学数学与计算科学学院 广州 510275)¹ (中山大学信息科学与技术学院 广州 510275)²
(广东省信息安全重点实验室 广州 510275)³

摘要 基于水平集的曲线演化与活动轮廓模型相结合,产生了几何活动轮廓模型,由于其良好的特性,在图像分割领域已经有了广泛的应用。本文对于一种耦合的活动轮廓模型,应用变分法求解出其对应的水平集曲线演化的偏微分方程,并给出了解的存在惟一性证明,然后将它应用到图像分割和目标轮廓提取中,取得了良好的效果。

关键词 图像分割,变分方法,水平集,活动轮廓模型

Object Contour Extraction Based on Curve Evolution via Level Set

CHEN Bo¹ LAI Jian-Huang²

(School of Mathematics and Computational Science, Sun Yat-Sen University, Guangzhou 510275)¹

(School of Information Science & Technology, Sun Yat-Sen University, Guangzhou 510275)²

(Guangdong Province Key Laboratory of Information Security, Guangzhou 510275)³

Abstract On the basis of level set methods, curve evolution and active contour models, geometric active contour models come into being. It has been widely used in image segmentation for its good characteristics. Toward a given coupled active contour models, this paper seeks the partial differential equations corresponding to the level set evolution according to variational principle and gives the proof of the existence, uniqueness of the solution. At last, it has been applied to image segmentation and boundary extraction. The results show that the new approach is more accurate and robust and can obtain very good effect.

Keywords Image segmentation, Variational principle, Level set, Active contour models

1 引言

图像分割和目标轮廓提取对于图像理解、图像分析、模式识别、计算机视觉等具有非常重要的意义。目前,这方面有很多成熟的算法,例如用边界梯度算子或者形态学算子等,而活动轮廓模型(Active Contour Model)^[1]的提出是这一领域的一个重大突破。由于其具有计算的高效性和简单性、特别适用于建模和提取任意形状的变形轮廓等优点,自从提出以后,近20年来在边缘检测、医学图像分割以及运动跟踪中已经有了广泛的应用和很大的发展^[2],目前也是计算机视觉领域最活跃的研究主题之一。

水平集方法(Level Set Methods)是 S. osher 和 J. A. Sethian 于 1988 年在研究曲线以曲率相关的速度演化时提出来的,用于描述曲线的演化过程。其基本思想是将当前正在演化的闭合曲线(曲面)的问题转化为更高维空间中的水平集函数曲线(曲面)的隐式解。与其他曲线演化方法相比,它的最大优势在于它的稳定性和拓扑无关性。自从提出以后,在计算几何、流体力学和图像处理中都有了广泛的应用。特别地,在图像分割和目标轮廓提取中,与活动轮廓模型相结合来做数值计算,较好地克服了传统参数活动轮廓模型(Parametric Active Contour Models, 或称 Snake)的缺点,如可以处理曲线的拓扑变化、对初值位置不敏感、具有稳定唯一的数值解等,产生了几何活动轮廓模型(Geometric Active Contour Models)。几何活动轮廓模型的这些良好特性已经引起了人们越来越多的关注,并已有很多成功的应用^[3~5]。

在水平集曲线演化的过程中,为了使水平集函数与符号

距离函数一致,产生了很多方法,如 Faugeras^[6]限制符号距离函数为 $|\nabla\Phi|=1$,类似地, J. A. Sethian^[7]考虑另外一个系统,并且这个系统的解为符号距离函数,当且仅当 $\nabla\Phi \cdot \nabla F=0$,其中 F 为速度函数。但是这些结论只是一些断言,而没有给出严格的证明,同时对于水平集曲线演化的偏微分方程解的存在惟一性也没有给出证明。

本文对于一种耦合的活动轮廓模型,应用变分法求解出其对应的水平集曲线演化的偏微分方程,并给出了解的存在惟一性证明,然后将它应用到图像分割和目标轮廓提取中,取得了良好的效果。

2 图像分割和水平集方法

图像分割是指把图像分成各具特性的区域并提取出感兴趣目标区域的技术和过程。这里特性可以是灰度、颜色、纹理等,目标可以对应单个区域,也可以对应多个区域。图像分割可借助集合概念给出比较正式的定义。

定义 1 令集合 R 代表整个图像区域,对 R 的分割可看作将 R 分成若干个满足以下 5 个条件的非空的子集(子区域) $R_1, R_2, \dots, R_n$:

- (1) $\bigcup_{i=1}^n R_i = R$;
- (2) $R_i \cap R_j = \emptyset, \forall i \neq j$;
- (3) $P(R_i) = \text{TRUE}, i=1, 2, \dots, n$;
- (4) $P(R_i \cup R_j) = \text{FALSE}, \forall i \neq j$;
- (5) 对 $i=1, 2, \dots, n, R_i$ 是连通的区域。

其中 $P(R_i)$ 是对所有在集合 R_i 中元素的逻辑谓词, $\emptyset$ 是空集。

^{*} 国家自然科学基金(60373082),教育部科学技术重点项目(105134)。陈波 博士生,研究方向为图像处理和模式识别。赖剑煌 教授,博导,主要研究领域为图像处理、模式识别和应用数学。

水平集方法的基本思想是将当前正在演化的闭合曲线(曲面)的问题转化为更高维空间中的水平集函数曲线(曲面)的隐式解。设给定的平面上有一条封闭的初始曲线 C , 点 (x, y) 到曲线 C 的距离用符号距离函数表示为 $\Phi(x, y) = \pm d$, 在曲线内部取值为负, 曲线外取值为正, d 表示点 (x, y) 到曲线 C 的距离。则曲线 C 可以用 $\Phi(x, y)$ 的零水平集来表示, 即 $C = \{(x, y) | \Phi(x, y) = 0\}$, 曲线演化需要考虑经过时间 t 后位置的变化, 可以将时间参数 t 加到函数中来, 即 $C(t) = \{(x, y) | \Phi(x, y, t) = 0\}$, 这样, 每一个分裂的水平集曲线内部都可以看作一个分割区域 R_i , 而零水平集可以看作区域的边界, 即目标轮廓。

3 改进的活动轮廓模型

近年来, 在几何活动轮廓模型中, Kimmel 等^[4]提出的基于拉普拉斯算子零交叉点的快速边缘积分方法(Fast Edge Integration), 简称 FEI 方法, 是图像分割中比较常用的典型方法。该方法具有比较好的准确性和抗噪性, 但是没有考虑先验信息。Rousson 和 Deriche^[5]则基于两个假设, 即各个待分割目标在分割过程中是等可能性的并且每个目标内的像素值是独立的, 提出了一种新的矢量图像分割方法, 该方法中最优分割和统计参数在分割过程中自动处理。受它们的启发, 本小节对 FEI 方法进行改进, 将该模型中 Chan-Vese 极小变分项用简化的统计方法来代替, 得到一个更一般的分割模型。

设 $I(x, y)$ 是待分割图像, $\nabla I(x, y) = \{I_x, I_y\}$ 表示图像的梯度向量, $C: [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^2$ 是参数化曲线, 记作: $C(s) = (x(s), y(s))$ 其中 s 是弧长参数。用 $\vec{C}_s = \{x_s, y_s\}$ 表示曲线的切线向量, 则相应的法向量可表示为 $\vec{N}(s) = \{-y_s, x_s\}$ 。本文方法是通过极小化能量泛函来实现图像分割 $\arg \min_C E(C)$, 其中

$$E(C) = \alpha \cdot \oint_C g(C(s)) ds - \beta \cdot \oint_C |\langle \nabla I, N \rangle| ds + \gamma \cdot \left[\int_{\text{inside}(C)} (-\log p_1(I)) ds + \int_{\text{outside}(C)} (-\log p_2(I)) ds \right]$$

新提出的灰度图像分割模型涵概了 FEI 模型和简化统计模型, 因为显然当取 $\alpha = a, \beta = 1, \gamma = b$, 对数似然估计项中概率密度函数取方差为 1 的高斯函数时, 上述模型即为 FEI 模型; 当取 $\alpha = \gamma = 1, \beta = 0$, 函数 $g \equiv 1$ 时, 上述模型则为简化统计模型。

4 模型的变分求解

偏微分方程理论中, 变分法描述如下:

在 H 空间中

$$J(v) = \frac{T}{2} \iint_{\Omega} (v_x^2 + v_y^2) dx dy - \iint_{\Omega} f(x, y) v(x, y) dx dy$$

我们的问题是找 u , 使得 $J(u) = \min_{x \in M_\Phi} J(v)$

其中 $M_\Phi = \{v \in C^1(\bar{\Omega}) | v|_{\partial\Omega} = \Phi\}$, 其解必须满足它所对应的 Euler 方程, 即适合 Dirichle 问题 $\begin{cases} -\Delta u = f & (x, y) \in \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = \Phi \end{cases}$ 。

反过来, 当 $u \in C^1(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ 时, Euler 方程的解也是原问题的解。

定义 2 若 $\exists u \in H(\Omega)$, 使得 $J(u) = \min_{x \in M_\Phi} J(v)$,

则称 u 是 Dirichlet 问题 $(*)$ 的弱解或广义解。

因此, 我们关心原问题的解, 但可以用变分方法转化为求偏微分方程的弱解问题。

证明过程可参考文献[4], 下面以定理的形式给出前面能量函数的一阶变分。

定理 4.1 设

$$E(C) = \alpha \oint_C g(C(s)) ds - \beta \oint_C |\langle \nabla I, \vec{N} \rangle| ds + \gamma \left[\int_{\text{inside}(C)} (-\log p_1(I)) ds + \int_{\text{outside}(C)} (-\log p_2(I)) ds \right]$$

是关于灰度图像 I 的曲线演化能量函数, 则它的一阶变分为:

$$\frac{\delta E(C)}{\delta C} = [-\alpha \cdot (g(x, y) \kappa - \langle \nabla g(x, y), \vec{N} \rangle) - \beta \cdot \text{sign}(\langle \nabla I, \vec{N} \rangle \Delta I) + \gamma \cdot (\log p_1(I) - \log p_2(I))] \vec{N}$$

由变分原理知, 求解能量泛函 $E(C)$ 极小可以通过求解 $\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\delta E(C)}{\delta C}$ 的稳定解而得到。

5 水平集曲线演化

记 $C_t = F \vec{N} = F \frac{\nabla \Phi}{|\nabla \Phi|}$, 则 $\Phi_t = -(\Phi_x x_t + \Phi_y y_t) = -\langle \nabla \Phi, C_t \rangle = -\langle \nabla \Phi, F \frac{\nabla \Phi}{|\nabla \Phi|} \rangle = -F \langle \nabla \Phi, \frac{\nabla \Phi}{|\nabla \Phi|} \rangle = -F |\nabla \Phi|$

其中 Φ 为水平集函数, 从而演化方程可写为

$$\Phi_t = [\alpha \cdot \text{div}(g(x, y) \frac{\nabla \Phi}{|\nabla \Phi|}) + \beta \cdot \text{sign}(\langle \nabla I, \nabla \Phi \rangle \Delta I) + \gamma \cdot (\log p_2(I) - \log p_1(I))] |\nabla \Phi|$$

对上述演化方程, 如果我们设 $\Phi(x, y, t)$ 是符号距离函数, 这样演化曲线在相对较短的演化时间内保持 $|\nabla \Phi| = 1$, 进而演化方程可化为 $\Phi_t = \alpha \cdot \text{div}(g(x, y) \nabla \Phi) + \eta(\Phi, \nabla I)$, 其中 $\eta(\Phi, \nabla I) = \beta \cdot \text{sign}(\langle \nabla I, \nabla \Phi \rangle \Delta I) + \gamma \cdot (\log p_2(I) - \log p_1(I))$ 。我们将采用加性算子分裂的方法(AOS)并耦合窄带法和快速行进法进行数值实验。文[3]中给出 AOS 算法的基本思想, 这里我们融入 $\eta(\Phi, \nabla I)$ 进行曲线演化, 则有

$$\Phi^{n+1} = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^2 (I - 2\tau A_l(\Phi^n))^{-1} (\Phi^n + \tau \eta)$$

其中 $A_l(\Phi^n) = \partial_{x_l}(g(x_l) \partial_{x_l} \Phi^n)$, $l \in \{1, 2\}$ 表示维度的索引, x_1 表示 x 方向, x_2 表示 y 方向, τ 表示时间步长。对 A_l 采用文[4]中的简单离散格式。我们只对 x 方向进行描述, y 方向可以同理得到 $\partial_{x_l}(g(x) \partial_x \Phi^n) \approx \sum_{j \in N(i)} \frac{g_i + g_j}{2h^2} (\Phi_j^n - \Phi_i^n)$

这里, $N(i)$ 表示集合 $\{i-1, i+1\}$, 即像素值 i 的两个水平领域, h 表示两相邻像素间的距离。则矩阵 A_l 中的元素 a_{ij} 可表示为

$$a_{ij} = \begin{cases} \frac{g_i + g_j}{2h^2} & j \in N(i); \\ 0 & \text{其他} \\ -\sum_{k \in N(i)} \frac{g_i + g_k}{2h^2} & j = i \end{cases}$$

6 演化方程解的存在惟一性

由 $\Phi_t = -F |\nabla \Phi|$, 知 $\Phi_t + F |\nabla \Phi| = 0$ 。不妨考虑下面的系统:

$$\begin{cases} \Phi_t + F |\nabla \Phi| = 0, & (1.1) \\ \nabla F \cdot \nabla \Phi = 0, & (1.2) \\ \Phi(\vec{x}, t)|_{t=0} = \text{dist}(\vec{x}, S_0), & (1.3) \\ F|_{\{\vec{x} | \Phi(\vec{x}, t)=0\}} = -f(\vec{x}), & (1.4) \end{cases} \quad (1)$$

其中 S_0 是 $\mathbb{R}^n$ 上的超曲面, $f(\vec{x})$ 是一给定函数, $\text{dist}(\vec{x}, S_0)$ 是从 $\vec{x}$ 到 S_0 的符号距离函数($\vec{x}$ 在 S_0 外面时为正, 里面为负)。我们希望能够找到解 (Φ, F) , 其中 $F: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ 可看作速度函数。

引理 6.1 若 (Φ, F) 为系统(1)的解析解, 则它必须满足 $|\nabla \Phi| = 1, \forall \vec{x}, t \geq 0$, 且 $F = -\Phi_t$ 。

系统(1)的一个简化变化形式为:

$$\begin{cases} |\nabla \Phi| = 1, & (2.1) \\ \frac{\partial \Phi}{\partial t}|_{\{\vec{x} | \Phi(\vec{x}, t)=0\}} = f(\vec{x}), & (2.2) \\ \Phi(\vec{x}, 0) = \text{dist}(\vec{x}, S_0), & (2.3) \end{cases} \quad (2)$$

与(1)相比, (2)仅仅包含变量 Φ , 更加简单, 我们有下面的引理,

(下转第 235 页)

的 MSXML 解析器(XML 的 DOM 解析器)实现了框架中的组装工具。在此基础上给出了一个具体的应用原型系统。

参考文献

- 1 CORBA Specification Version 3.0, formal/02-06-33, July 2002. <http://www.omg.org/cgi-bin/doc?formal/02-06-33>
- 2 OMG CCM Implementers, Group, MARS PTC 8. Telecom DTC, OMG Meeting, Orlando, USA, CORBA Component Model Tutorial, June 2002
- 3 艾萍. 构件柔性组装描述的形式化方法研究及其在水利领域的应用. [博士学位论文]. 2002. 12
- 4 杨美清. 软件复用及其相关技术. 计算机世界 C 版, 1999(3)
- 5 McIlroy M D. Mass Produced Software Components. In: P. Naur

- and B. Randell, eds. Software Engineering. NATO Science Committee, January 1969
- 6 马亮, 孙艳春. 软件构件概念的变迁. 计算机科学, 2002, 29(4): 28~30
- 7 张士琨, 王立福, 杨美清. 基于 COTS 构件的系统开发. 计算机科学, 2000, 27(1)
- 8 Brockschmidt K. Inside OLE2. Microsoft Press, 1994
- 9 Gamma E, Helm R, Johnson R, Vlissides J 著. 李英军, 等译. 设计模式. 机械工业出版社
- 10 Navarro A, White C, Burman L. XML 从入门到精通. 电子工业出版社
- 11 Henning M, Vinosni S. 基于 C++ 的 CORBA 高级编程. 清华大学出版社

(上接第 228 页)

引理 6.2 系统(1)和系统(3)具有相同的解。

证明: 假设 Φ 是(1)的解, 则由引理 6.1 知, 它满足(2.1)且 $\Phi_t = -F$ 。由(1.4)知, (2.2)成立。由(1.3)知, (2.3)成立。故(1)的解满足(2)。

假设 Φ 是(2)的解, 令 $F = -\Phi_t$, 则 $\Phi_t + F| \nabla \Phi| = 0$, 即满足(1.1)。又 $\nabla F \cdot \nabla \Phi = \nabla(-\Phi_t) \cdot \nabla \Phi = -\frac{d}{dt} |\nabla \Phi|^2 = 0$, 即满足(1.2)。由(2.2)及(2.3)知, (1.3)和(1.4)成立。故(2)的解满足(1)。

定理 6.3 在一维的情况下, 系统(2)存在惟一的解 $\Phi(x, t) \in R, (x, t) \in R \times R$ 。

证明: 由 $\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 1$ 知 $\frac{\partial(\Phi - x)}{\partial x} = 0$, 故 $\Phi(x, t) - x = H(t)$ 。

下面我们确定 $H(t)$ 。

首先, 对于 $\Phi(x, t) = 0$, 有 $x = -H(t)$ 和 $\frac{\partial \Phi}{\partial t} = H'(t) = f(x) = f(-H(t))$ 。由(3.3)知 $\Phi(x, t)|_{t=0} = x - x_0$, 故 $H(0) = -x_0$, 原问题变成常微分方程的初值问题 $\begin{cases} H'(t) = f(-H(t)) \\ H(0) = -x_0 \end{cases}$, 由文[8]知该常微分方程存在惟一解 $H(t)$, 从而得到 $\Phi(x, t) = x + H(t)$ 为(3)的惟一解。

在二维情况下, 令 $\vec{x} = (x, y)^T \in R^2$, 则 $\text{dist}((x, y), S_0)$ 是 $f_0(x, y)$ 的重写。由于零水平集未知, 可能有一些奇异的性质, 需要将它转化成正则化系统, 应用窄带法和隐函数理论^[8], 可证在二维空间中也是成立的, 同时可扩展到三维或更高维空间。

7 实验结果及分析

表 1

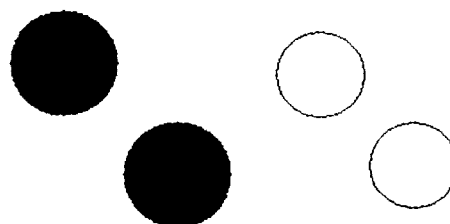
图像	像素大小	迭代步长	迭代次数	耗费时间
(a) Circle	128×128	0.5	2	4.59
(b) Dragon	128×128	4	4	8.84
(c) Star	134×139×3	40	2	8.75
(d) Leaf	174×192×3	20	6	39.43

本文是在 pentium(R) CPU 2.60GHz, 256 MB 内存, Windows XP 的环境下, 应用 MATLAB 6.5 做实验。如图 1 所示, 其中(a)(b)均为二值图, (c)为带噪星形图, (d)为带噪树叶图, 均取得了良好的效果。在实验中, 我们统一取 $\alpha = 1$, $\beta = 0.01$, $\gamma = 1$, 对于某些图像, 调整这些参数可以得到更好的效果。同时也可以看出随着 τ 值的变大, 抗噪能力越强。

参考文献

- 1 Kass M, Witkin A, Terzopoulos D. Snakes: Active contour models. International Journal of Computer Vision, 1998. 321~331
- 2 李培华, 张田文. 主动轮廓线模型(蛇模型)综述[J]. 软件学报, 2000, 11(6): 751~757
- 3 Malladi R, Sethian J A, Vemuri B C. Shape modeling with front propagation: A level set approach. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1995, 17(2): 158~174
- 4 Kimmel R. Fast Edge Integration, Geometric Level Set Methods

- in Imaging, Vision and Graphics. In: S. Osher and N. Paragios, eds. Springer Verlag, 2003
- 5 Russon M, Deriche R. A Variational Framework for Active and Adaptive Segmentation of Vector Valued Images: [Technical Report 4515]. INRIA, France, 2002
- 6 Gomes J, Faugeras O. Level sets and distance functions. In: Proc. 6th Europe Conference on Computer Vision, Dublin, 2000
- 7 Sethian J A. Level set methods and Fast Matching Methods. Cambridge, U. K.: Cambridge Univ. Press, 1999
- 8 Wang Dejun, et al. Level Set Methods, Distance Function and Image Segmentation. In: Proceeding of the 17th International Conference on Pattern Recognition, 2004



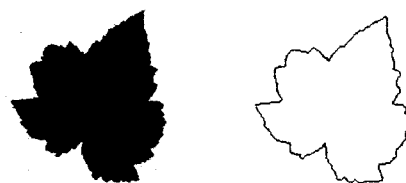
(a) Circle



(b) Dragon



(c) Star



(d) Leaf

图 1 (a)(b)(c)(d)原图(左)及其对应目标轮廓线(右)