维普资讯 http://www.cqvip.com

改进四点细分法及其应用*)

赵宏庆　彭国华　叶正麟
（西北工业大学理学院　西安 710072）

摘　要　对经典的四点细分格式进行推广，提出了可通过对形状参数的适当选择来实现对极限曲线形状调整和控制的四参数四点细分曲线造型方法，并把该方法扩展到曲面上，对其连续性和收敛性进行了分析。把四参数四点细分法运用于山地模拟，由于其中四个参数选取的灵活性，可对生成的地形形状进行适当的调整，生成比较丰富的地貌形状。细分方法具有多尺度特点，所以可对地貌进行细节描述。试验证明能够较好地生成模拟山地地形，为山地地形模拟仿真提供了一种有效的方法。

关键词　细分，多尺度，曲面造型，地形模拟

Improved Four Points Subdivision Scheme and its Applications

ZHAO Hong-Qing　PENG Guo-Hua　YE Zheng-Lin
(School of Science, Northwestern polytechnical University, Xi'an 710072)

Abstract　This paper extends the classical 4-point interpolating subdivision scheme, and brings forward a new 4-point subdivision scheme with four parameters for curve design, which can be controlled by choosing these four parameters appropriately. At the same time, we expand it to surface design. The sufficient conditions of the uniform convergence property and continuity properties of the subdivision scheme are proved. It can generate expectable terrain shapes using 4-point subdivision scheme with four parameters in terrain simulation. Through selecting four parameters flexibly, we can adjust generating terrain shape suitably and produce ample physiognomy shape. We can describe physiognomy detail because subdivision scheme has multi-scale character. The method can generate terrain simulation preferably and offer an effective scheme for terrain simulation.

Keywords　Subdivision, Multi-scale, Surfaces modeling, Terrain simulation

1　引言

细分法是计算机辅助几何设计和计算机图形学中一个重要的研究课题，是曲线曲面造型中的一类很有效的方法，其处理过程比较简单、速度快、生成的曲线曲面光滑性较好，因而得到了广泛的重视。如经典四点法[1]是一种单参数插值型细分曲线造型法，极限曲线可以达到 C^1 连续。曹沅[2]研究了四点插值细分算法的连续性，得到了一个极限函数具有二阶导函数的充分必要条件及二阶导函数的解析表达式，并将结果推广到曲面的情形。Hassan[3]提出了 ternary 四点插值细分法，生成的曲线达到 C^2 连续。金建荣等[4~9]对四点法进行了研究，并取得一定的成果。三参数四点法[10]是对经典四点法的推广，引入包含 3 个形状参数，增加了对极限曲线的可控性。

本文进一步扩展了三参数四点方法，提出了四参数四点细分方法，给出了极限曲线 C^0 到 C^2 连续的充分条件，并把该方法扩展到了曲面上，提出了用四参数四点细分方法进行山地模拟。该方法能较容易地控制极限曲面形状，运用几何纹理生成对表面进行修饰，通过更新材质、光源和光照模型属性控制网格曲面的显示精度，显示真实感。试验证明，该方法能够较好地生成模拟山地地形，为山地模拟提供了一个简单、有效的方法。

2　四参数四点细分法

给定初始有序控制顶点集 $P^0=\{P_j^0\}_{j=-2}^{n+2}$，$P_j^0\in R^d$，设 $P^m=\{P_j^m\}_{j=-2}^{2^m n+2}$ 为第 m 次细分后的有序控制顶点集，递归地定义 $\{P_j^{m+1}\}_{j=-2}^{2^{m+1}n+2}$ 如下：

$$\begin{cases} P_{2i}^{m+1}=\lambda P_{i-1}^m+(1-\lambda-\mu)P_i^m+\mu P_{i+1}^m, & -1\leqslant i\leqslant 2^m n+1 \\ P_{2i+1}^{m+1}=\dfrac{1}{2}(P_i^m+P_{i+1}^m)+2\omega(d_i^m+d_{i+1}^m), & -1\leqslant i\leqslant 2^m n \end{cases} \tag{1}$$

其中 $d_i^m=P_i^m-[vP_{i-1}^m+(1-v)P_{i+1}^m](-1\leqslant i\leqslant 2^m n+1)$，$v$ 为偏移参数，在 $(0,1)$ 上取值；ω 为张力参数，表示的是新点 P_{2i+1}^{m+1} 靠近两点 P_i^m，P_{i+1}^m 构成的边的程度；第 $m+1$ 层的新点 P_{2i}^{m+1} 偏移第 m 层点 P_i^m 的程度与参数 μ，λ 有关。要求：如果 λ，μ 不同时为零，要求这两个参数的范围是 $0\leqslant\mu\leqslant 1$，$0\leqslant\lambda\leqslant 1$，$0<\lambda+\mu\leqslant 1$；如果同时为零，那么细分算法中生成的偶数点方法就退化成经典四点细分方法中偶数点的生成算法。显然，经典四点插值细分法是该法当 $v=0.5$，$\mu=\lambda=0$ 时的一个特例。我们称(1)式表示的细分方法为四参数四点细分法。适当选取这 4 个参数的值，可以使极限曲线有较好的光滑性，可以使曲线在一定的范围内变化。如果这 4 个参数选取不好，可能会使得极限曲线产生分形现象。图 1 给出四个参数的几何意义。

*)西北工业大学研究生创业种子基金(No. Z20030052)。**赵宏庆**　博士研究生，主要研究领域为 CAGD、CG、逆向工程；**彭国华**　博士，教授，主要研究领域为 CAGD、CG、逆向工程等；**叶正麟**　教授，博士生导师，主要研究领域为 CAGD、图形与图像处理。

维普资讯 http://www.cqvip.com

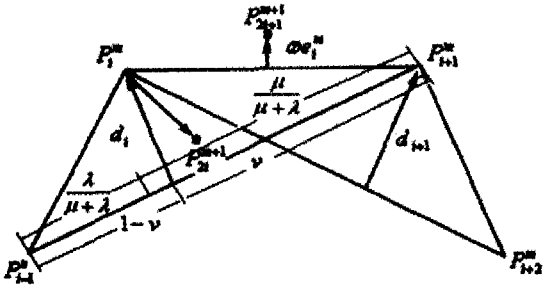


图 1　偏移参数 λ,μ，张力参数 ω 及参数 v 的几何意义

由细分规则和文[10]知，

$\alpha_{-3}=-2\omega(1-v),\alpha_{-2}=\mu,\alpha_{-1}=\frac{1}{2}+2\omega v,\alpha_0=1-\lambda-\mu,$

$\alpha_1=\frac{1}{2}+2\omega(1-v),\alpha_2=\lambda,\alpha_3=-2\omega v$

故细分法的生成多项式为：

$$\alpha(z)=[-2\omega(1-v)]z^{-3}+\mu z^{-2}+(\frac{1}{2}+2\omega v)z^{-1}+(1-\lambda-\mu)z^0+[\frac{1}{2}+2\omega(1-v)]z^1+\lambda z^2+(-2\omega v)z^3$$

mask 为 $\alpha=\{a_j\}=[\cdots,0,0,-2\omega(1-v),\mu,\frac{1}{2}+2\omega v,1-\lambda-\mu,\frac{1}{2}+2\omega(1-v),\lambda,-2\omega v,0,0,\cdots]$

显然，α 满足 $\sum_j\alpha_{2j}=\sum_j\alpha_{2j+1}=1$，即保证了与初始有序控制点集的均差序列相应的细分法 S_1 的存在性。

2.1　收敛性分析

设 P_i^m 对应的参数为 $\frac{j}{2^m}$ 关于四参数四点细分法的收敛性，有如下结论：

定理 1　四参数四点细分法是一致收敛的充分条件是：如果参数 λ、μ、v 及 ω 满足

$$\max\{|-2\omega v|+|\frac{1}{2}-\lambda+2\omega-4\omega v|+|2\omega+\mu-2\omega v|,\ |\lambda+2\omega v|+|\frac{1}{2}-2\omega-\mu+4\omega v|+|-2\omega(1-v)|\}<1$$

则四参数四点细分法是一致收敛，即存在唯一紧支集的连续函数 $S^\infty P^0\in C^0[0,n]$ 为其极限函数。

证明：细分法的生成多项式为：

$$\begin{aligned}\alpha(z)&=[-2\omega(1-v)]z^{-3}+\mu z^{-2}+(\frac{1}{2}+2\omega v)z^{-1}+(1-\lambda-\mu)z^0+[\frac{1}{2}+2\omega(1-v)]z^1+\lambda z^2+(-2\omega v)z^3\\&=z^{-3}[-2\omega(1-v)+\mu z^1+(\frac{1}{2}+2\omega v)z^2+(1-\lambda-\mu)z^3+(\frac{1}{2}+2\omega(1-v))z^4+\lambda z^5+(-2\omega v)z^6]\\&=z^{-3}(1+z)[(-2\omega v)z^5+(\lambda+2\omega v)z^4+(\frac{1}{2}+2\omega-\lambda-4\omega v)z^3+(\frac{1}{2}-2\omega-\mu+4\omega v)z^2+(2\omega+\mu-2\omega v)z^1-2\omega(1-v)]\end{aligned}$$

又 $\frac{1}{2}\alpha^{(1)}(z)=\frac{1}{2}\frac{2z}{1+z}\alpha(z)$

$$\begin{aligned}&=z^{-2}[(-2\omega v)z^5+(\lambda+2\omega v)z^4+(\frac{1}{2}+2\omega-\lambda-4\omega v)z^3+(\frac{1}{2}-2\omega-\mu+4\omega v)z^2+(2\omega+\mu-2\omega v)z^1-2\omega(1-v)]\end{aligned}$$

$\alpha^{(1)}=\{\alpha_j^{(1)}\}=2[\cdots,0,0,-2\omega(1-v),2\omega+\mu-2\omega v,\frac{1}{2}-2\omega-\mu+4\omega v,\frac{1}{2}+2\omega-\lambda-4\omega v,\lambda+2\omega v,-2\omega v,0,0,\cdots]$

因此当 $\|\frac{1}{2}S_1\|_\infty=\frac{1}{2}\max\{\sum_j|a_{2j}^{(1)}|,\sum_j|a_{2j+1}^{(1)}|\}$

$$=\max\{|-2\omega v|+|\frac{1}{2}-\lambda+2\omega-4\omega v|+|2\omega+\mu-2\omega v|,\ |\lambda+2\omega v|+|\frac{1}{2}-2\omega-\mu+4\omega v|+|-2\omega(1-v)|\}<1$$

时，由文[10]知，细分法 S 一致收敛，即存在唯一紧支集的连续函数 $S^\infty P^0\in C^0[0,n]$ 为其极限函数。

2.2　四参数四点细分法的连续性分析

关于四参数四点细分法的连续性，我们得出如下结论。

定理 2　四参数四点细分法是 C^1 连续的充分条件是：如果参数 λ、μ、v 及 ω 满足 $\frac{1}{2}\max\{4(|-2\omega v|+|\frac{1}{2}-2\lambda+2\omega-8\omega v|+|-2\omega+2\omega v|),4(|\lambda+4\omega v|+|-\mu-4\omega+2\lambda+12\omega v|)\}<1$

且当 $\mu-\lambda+4\omega-8\omega v=0$ 时，有 $S^\infty P^0\in C^1[0,n]$，则四参数四点细分法是 C^1 连续的。

证明：因为

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\alpha^{(2)}(z)&=\frac{1}{2}(\frac{2z}{1+z})^2\alpha(z)=\frac{1}{2}(\frac{2z}{1+z})\alpha^{(1)}(z)=\frac{1}{2}(\frac{2z}{1+z})2z^{-2}(1+z)[(-2\omega v)z^4+(\lambda+4\omega v)z^3+(\frac{1}{2}+2\omega-2\lambda-8\omega v)z^2]+(2\lambda-\mu-4\omega+12\omega v)z+(-2\omega+2\omega v)]\\&=2z^{-1}[(-2\omega v)z^4+(\lambda+4\omega v)z^3+(\frac{1}{2}+2\omega-2\lambda-8\omega v)z^2+(2\lambda-\mu-4\omega+12\omega v)z+(-2\omega+2\omega v)]\end{aligned}$$

其中 $\mu-\lambda+4\omega-8\omega v=0$，所以有

$\alpha^{(2)}=\{\alpha_j^{(2)}\}=4[\cdots,0,0,-2\omega+2\omega v,2\lambda-\mu-4\omega+12\omega v,\frac{1}{2}+2\omega-2\lambda-8\omega v,\lambda+4\omega v,-2\omega v,0,0,\cdots]$

因此当

$$\|\frac{1}{2}S_2\|_\infty=\frac{1}{2}\max\{\sum_j|\alpha_{2j}^{(2)}|,\sum_j\alpha_{2j+1}^{(2)}\}=\frac{1}{2}\max\{4(|-2\omega v|+|\frac{1}{2}-2\lambda+2\omega-8\omega v|+|-2\omega+2\omega v|),4(|\lambda+4\omega v|+|-\mu-4\omega+2\lambda+12\omega v|)\}<1$$

时，由文[10]知细分法 S_1 一致收敛，知 $S^\infty P^0\in C^1[0,n]$，即四参数四点细分法是 C^1 连续的。

定理 3　四参数四点细分法是 C^2 连续的充分条件是：如果参数 λ、v、μ 及参数 ω 满足

$$\frac{1}{2}\max\{8(|-2\omega v|+|\frac{1}{2}-3\lambda+2\omega-14\omega v|),8(|\lambda+6\omega v|+|-2\omega+2\omega v|)\}<1$$

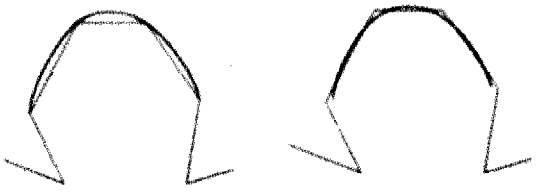
且当 $\mu-\lambda+4\omega-8\omega v=0$，$-\frac{1}{2}-\mu-4\omega+5\lambda+24\omega v=0$ 时，则四参数四点细分法是 C^2 连续的。

证明：过程略。

图 2 给出初始控制多边形给定的条件下，选择 4 组不同的形状参数时极限曲线的图形，图上给出了参数 λ、μ、v、ω 的

维普资讯 http://www.cqvip.com

取值，极限曲线 a,b 分别是 C^1,C^2 连续的。



(a)$\lambda=0,\mu=0,v=\frac{1}{2},\omega=\frac{1}{16}$　(b)$\lambda=\frac{1}{80},\mu=\frac{1}{16},v=\frac{1}{2},\omega=\frac{1}{32}$

图 2　四参数四点细分

3　曲面四参数四点细分法

3.1　细分规则

将四参数四点细分方法推广到张量积曲面的情形。设初始控制网格为$(n+4)\times(m+4)$矩形网格。细分规则实际上由两步构成：第一步为先对网格的行四参数四点细分一次；第二步在前一次细分的基础之上对新网格的列进行四参数四点细分一次。对行、列分别细分后，得到了一个新的更细的网格。细分无限进行下去，网格最终收敛到一张极限曲面。

3.2　拓扑结构建立

设初始控制网格为$(n+4)\times(m+4)$矩形网格，采用1—4四边形分裂算子生成新网格拓扑。由细分规则可知，新顶点分为3类：面点、边点、角点。对于面点，我们知道每一个四边形面对应产生一个新面顶点，有4×4个顶点。根据新边点规则，先按行(列)产生新行(列)边点，再对产生的新行(列)边点按规则生成新列(行)边点而得到。

所以拓扑结构建立的连接规则为：

1)连接每一个新面点与周围的新边点；

2)连接每一个新角点与周围的新边点。

易知，对$(n+4)\times(m+4)$矩形网格做一次曲面四参数四点细分，可以得到加密的$(2n+4)\times(2m+4)$矩形网格。

4　山地模拟算法步骤

首先，选用“四参数四点细分法”及相关的“形状参数”对初始控制网格不断加密，使产生的曲面网格逼近所希望的形状。其次，通过以下步骤产生地表细节：

1)使用几何纹理生成对表面进行修饰；

2)在定义场景的GL光照中，通过更新材质、光源和光照模型属性，控制网格曲面的显示精度，真实感显示。

该方法有效、实用且简单。其优点是地形容易控制，模拟地表纹理较为真实、丰富，可得到具有不同地貌特征的地景，效果是令人满意的。四参数四点细分法运用于山地地形的仿真，可以产生预期的地形形状。

算法实现的基本步骤可概括为以下3步：

1)标准化初始数据。将离散采样点(原始数据点)转化为控制地形初始形状的矩形拓扑网格上的点列，即得到初始控制顶点集$\{P_{ij}\}$，$i=0,1,\cdots,n,j=0,1,\cdots,n$。按$i$方向和$j$方向顺次连接，构成初始控制网。

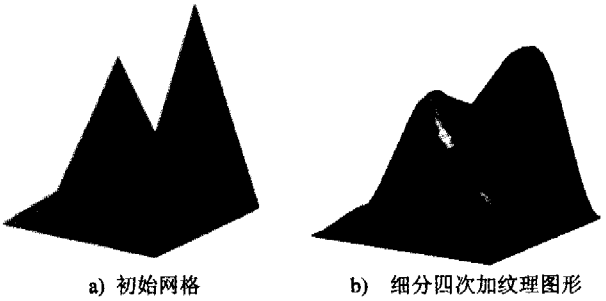
2)选取合适的4个参数，将网格不断细分。根据最终要求，选取合适的参数，用四参数四点细分法将初始控制网不断细分。对初始控制顶点集的细分可采用先对i方向细分，再对j方向细分；或先对j方向细分，再对i方向细分的原则。可以证明，通过以上加密过程得到的曲面与细分方向的顺序无关。细分到一定深度，便得到产生地形整体形状的加密控制网。4个参数的大小应根据地形的整体起伏程度选取。考虑到最终逼近地形产生的曲面网格数据量比较大，可将细分的深度控制在合适的范围内。

3)最后，利用纹理映射对表面进行修饰，利用光照模型真实感显示。真实感显示技术的关键是3D成像与投影、材质模型、光照模型、光源模型和真实感图形显示算法。

5　实际算例

5.1　算例1

图3给出了地形模拟的算例。在初始网格给定的情况下，我们对初始网格进行了4次细分，其中4个参数的值分别为$\lambda=\frac{7}{32},\mu=\frac{7}{32},v=\frac{1}{2},\omega=\frac{3}{64}$。对细分生成的曲面加上了纹理图形，使得造型的结果更加逼真。从造型的结果来看，造型结果比较平缓，生成的山地图形比较有真实感。

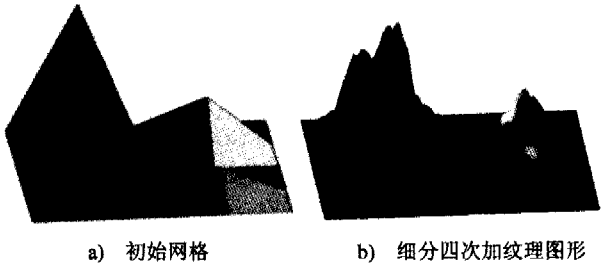


a) 初始网格　b) 细分四次加纹理图形

图3　平缓山地模拟

5.2　算例2

相对于例1我们给出下面的细分算例2。即在相同的初始网格(不同视角)、不同的细分参数($\lambda=\frac{1}{30},\mu=\frac{1}{30},v=\frac{1}{2},\omega=\frac{1}{3}$)情况下，给定相同的细分次数(4次细分)，生成了不同的山地造型结果。从造型的结果上来看，生成的图形4相对于例1山峰更加尖挺，能够表现出险峰峭壁的造型。



a) 初始网格　b) 细分四次加纹理图形

图4　尖锐山地模拟

并不是参数在取所有值的时候生成的山地图形是有效的。在相对于满足给定定理的条件下，在细分次数给定的情况下能够生成较为平缓的山地地形。而要想设计出满足具有一定尖锐条件的山地造型，参数的选取就不局限于给定的定理中的范围，我们就要适当地调节细分参数，使之能够满足要求。根据实践经验我们得出，一般情况下，在给定的细分网格固定的情况，对初始网格细分4次左右就可以生成满足条件的目标图形。而且，细分参数一旦给定，那么极限图形是固定的。该算法简单、实用造型效果好、效率比较高，可以应用到快速造型中去。

(下转第259页)

维普资讯 http://www.cqvip.com

任务数代替负载量)，对几类策略进行比较(表4)。

表4 几类策略的比较

	单次通信量	单次通信时间	总计均衡次数	均衡程度指标 D(k)
自适应契约策略	O(n)	O(1)	m	$O(1/n^2)$
局部策略	O(1)～O(n)	O(1)	O(1)～O(m)	$O(m^2/n^2)$
基于抗衰均衡策略	O(n)	O(logn)	O(logm)	$O(1/n^2)$[注]

注：实际为 $O(u^2/n^2)=O(1/n^2)$ $u=f_{start}/K$ 为常数。

将基于抗衰均衡策略和自适应契约策略进行比较，单次通信量、总计通信时间(等于单次通信时间 * 均衡次数)相当(在 $m \gg n$ 时此指标也明显占优)，总通信量大大少于后者，即系统开销优于自适应算法；系统均衡程度虽不及自适应算法，但 $D(k)$ 仍在同一数量级上，表示确实得到了有效的均衡。

局部策略本身情况相对复杂，这类策略受到系统特性的影响很大，在开销这一指标上难以直接比较。一般来说，对于自身负载普遍较低的系统，局部策略的均衡次数、通信量都较小，最理想的情况下趋近于0；而对于负载较高的系统，局部策略发起均衡的次数会明显上升，某些极端情况下甚至逼近无穷大。不论哪种情况，基于抗衰均衡策略的开销都是相对稳定的，前一种情况是局部策略占优，后一种情况则反之。在系统均衡程度上，基于抗衰的均衡策略是明显优于局部策略的。

综合来看，基于抗衰思想的负载均衡策略部分吸收了两类分布式策略各自的优点，在全局均衡以及减少开销间取得了一定的平衡，初步达到了前文所提到的目标。

结束语 我们讨论了一种基于软件抗衰的分布式动态负载均衡策略，通过结点自身状况和有限的通信来推测系统的均衡情况以及发起均衡的时机及范围，部分解决了分布式负载均衡策略中全局性和效率性不能兼顾的问题。但是，我们提出的具体算法适用范围有限，对系统和负载特性有一定的要求。此外，对任务迁移树的设计等问题尚未进行更深入的研究。在以后的实验和研究中，我们会不断对策略本身和具体算法进行进一步的完善。

参考文献

1 Harvey D J. Load balancing techniques for distributed processing environment:[Ph. D Thesis]. Arlington: The University of Texas, 2001

2 Harvey D J, Biswas R, Das S K. Dynamic load balancing for adaptive meshes using symmetric broadcast networks. In: 12th Intl. Conf. on supercomputing, Melbourne, Australia, 1998. 417～424

3 Teo Y M, Ayani R. Comparison of Load Balancing Strategies on Cluster-based Web Servers. Transactions of the Society for Modeling and Simulation, 2001

4 Huang Y, Kintala C, Kolettis N, et al. Software Rejuvenation: Analysis, Modules and Application. In: Proc. of 25th Symposium on Fault Tolerant Computer Systems, Pasadena, California, June 1995. 381～390

5 An architectural blueprint for autonomic computing. IBM and autonomic computing

6 陈本林，陈佩佩，吉根林. 数据结构. 南京：南京大学出版社，1998

7 Tanenbaum A S. Distributed operating systems. 北京：清华大学出版社，1997

8 朱广蔚，谭建，杨献春，等. 在构件的多个实现间动态选择的算法. 计算机应用研究，2004，19(9)：20～24

9 Willebeek-Lemair H, Reeves A P. Strategies for dynamic load balancing on highly parallel computers. IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems, 1993, 4(9): 979～993

10 Buyya R. High Performance Cluster Computing Architectures and Systems. Prentice Hall PTR, NJ, USA, 1999, 1: 340～363

11 Eager D L, et al. A comparison of receiver-initiated and sender-initiated adaptive load sharing. Performance Evaluation, 1986, 6: 53～58

12 Lin FCH, Keller R M. The gradient model load balancing method. IEEE Transactions on Software Engineering, 1987, SE-13(1): 32～38

(上接第241页)

结论 本文提出四参数四点细分方法，给出了 C^0 到 C^2 连续的充分条件；在理论上证明了采用本文的方法可造型满足高阶光滑的曲线，并把该方法推广到曲面造型上。利用该方法进行山地模拟，用曲面网逼近地形的整体形状，然后控制最终曲面网格的显示精度，结合有效的纹理生成技术，真实感显示地表细节。充分利用细分方法中参数可以取不同取值，递归产生曲面，从而产生具有不同地貌特征的地形。该方法有效、实用且简单，效果是令人满意的，为山地造型提供了一种新的方法。

参考文献

1 Dyn N, Levin D, Gregory J A. A 4-point interpolatory subdivision scheme for curve design. Computer Aided Geometric Design, 1987, 4(4): 257～268

2 Chao Yuan. Necessary and sufficient condition for the continuous Limit curves and surfaces of 4-point interpolation subdivision scheme. Journal of Computer Aided Eesign & Computer Graphics, 2003, 15(8): 961～966

3 Jin Jian-Rong, Wang Guo-Zhao. A non-uniform 4-point interpolatory subdivision scheme to construct curve. A Volume High School Application Mathematical Transaction, 2000, 15(1): 97～100

4 Jiang Lei, Guo De-Gui. An improvement to the four-point interpolation subdivision scheme. Journal of Yantai University, 2002, 15(3): 171～176

5 Wang Zheng-Xuan, Pang Yun-Jie. A recursive algorithm based four-point interpolation scheme for curve design and its application to rendering of fractals. Journal of CAD & CG, 1997, 9(3): 223～227

6 Wang Jing, Qian Xiao-Yuan. Dimensionality estimation of the fractal interpolatory curve generated by 4-point interpolatory subdivision scheme. Journal of Gansu University of Technology, 2003, 29(3): 120～122

7 Hassan M F, et al. An interpolating 4-point C2 ternary stationary subdivision scheme. Computer Aided Geometric Design, 2002, 19(1): 1～18

8 Dyn N. Subdivision schemes in computer-aided geometric design. In: Lighted W, ed. Advances in numerical analysis, Clarendon Press, 1992, 2: 36～104

9 Cararetta A S, Dahmen W, Micchelli C A. Stationary subdivision [J]. Memoirs of the American Mathematical Society, 1991, 93(453): 1～186

10 Zhao Hong-Qing, Peng Guo-Hua, Ye Zheng-Lin. Study a New Subdivision Scheme for Curve. Journal of Software, 2004, 15(suppl): 246～251