②

模态逻辑　一阶模态逻辑　推理

7-10

一阶模态逻辑归结推理*)

TP18

孙吉贵　刘叙华　李爱中

（吉林大学计算机科学系　长春130023）

摘　要

This paper describes Cialdea resolution mothed for first-order modal logic. We point out that the completeness of Cialdea system is wrong, and how to modify Cialdea system so that the completeness can be preserved. At the same time, we present another resolution method for first-order modal logic.

1. 引言

模态逻辑自动推理的归结方法始于Farinas-del-Cerro的工作[1]，近几年，又得到了进一步的研究和发展[2-8]。一阶模态逻辑是在命题模态逻辑系统上增加了全称量词和存在量词，由于模态算子与量词之间存在着相互作用，因而使得模态公式的Skolem化、模态替换更为复杂。1986年，Cialdea和Farinas-del-Cerro将经典逻辑的Herbrand定理推广到一阶模态逻辑[9]，并在此基础上，Cialdea于1991年建立起了一阶模态逻辑的归结推理方法[8]，有效地克服了模态算子与量词之间复杂的相互作用。

本文仅对一阶模态逻辑K系统给出Cialdea的模态归结方法，通过反例指出Cialdea归结方法的完备性结论是错误的，并指明修改Cialdea归结系统使之完备的方法。同时，将我们提出的命题模态归结方法[8]推广到一阶模态逻辑，给出了另一种一阶模态逻辑归结方法。

在本文所考虑的K系统中，Barcan公式：

$$\forall x\Box A(x) \rightarrow \Box\forall x A(x)$$

不是定理，而Barcan公式的逆：

$$\Box\forall x A(x) \rightarrow \forall x\Box A(x)$$

是定理。从语义上看，与可能世界相关的域不是恒定域，而是积累域[10,11]，即满足下面的单调性条件：若wRw'，则有$\overline{D}(w)\subseteq\overline{D}(w')$。其中$w$、$w'$是可能世界，$R$为可能世界之间的可达关系，$\overline{D}(w)$表示$w$的相关域。

2. 模态Skolem化和模态替换

在经典逻辑中，公式Skolem化的一般方法是先将公式化成等价的前束范式，但在我们考虑的一阶模态逻辑K系统中，由于Barcan公式不是定理，因而使得下述公式不是系统的定理：

$$\Box\exists x A(x) \rightarrow \exists x\Box A(x)$$

$$\Diamond\exists x A(x) \rightarrow \exists x\Diamond A(x)$$

模态算子与量词之间的相互作用，给模态公式的Skolem化带来了复杂性，模态Skolem化规则需要考虑量词出现的模态上下文。

定义1 模态公式A称为正公式当且仅当A中不含蕴涵符号且A中否定符号都作用于原子上。

显然，通过使用经典等价变换和$\sim\Box A=\Diamond\sim A$，$\sim\Diamond A=\Box\sim A$，任意一个模态公式A都可以化为与之等价的一个正公式

*) 国家自然科学基金、国家教委博士点基金和863计划资助课题

A'。

定义2 模态公式A是模态前束范式当且仅当：1)A是正公式；2)A是局部前束的，即使用经典规则不能再对A进行前束转化。

下面所讨论的模态公式都是封闭的模态前束范式，且所有约束变量都不重名。

定义3 设C是一个模态公式，n是一个自然数，则对C的子公式进行归纳，定义辅助转换Skn如下：

$Skn\ (P,\ n)\ =P$ 当P是一个文字时；

$Skn\ (A\wedge B,n)\ =Skn\ (A,\ n)\ \wedge Skn\ (B,\ n)$

$Skn\ (A\vee B,n)\ =Skn\ (A,\ n)\ \vee Skn\ (B,\ n)$

$Skn\ (\Box A,\ n)\ =\Box Skn\ (A,\ n+1)$

$Skn\ (\Diamond A,\ n)\ =\Diamond Skn\ (A,\ n+1)$

$Skn\ (\forall xA(x),\ n)\ =Skn(A(x^n),n)$

$Skn(\exists xA(x),\ n)\ =Skn(A(f_x^n(y_1,\cdots,y_m)),\ n)$

其中x^n、f^n中的指数n是标记，f_x是异于出现在C中所有函数符号的m元函数符号，$y_1,\cdots,y_m$是作用于$\exists xA(x)$的所有全称变量。

定义4 设C是一模态公式，则对它使用如下定义的Sk转换，所得到的表达式称为C的Skolem标准型：

$Sk\ (C)\ =Skn\ (C,\ 0)$

若$S=\{A_1,\ \cdots,A_n\}$是模态前束公式集，则定义 $Sk(S)=\{Sk(A_1),\ \cdots,\ Sk(A_n)\ \}$。

从上述定义可以看出，模态公式的Skolem标准型不再是通常的模态公式，而只是一个表达式，我们称之为标记公式。若Sk(C)中某符号s上标有自然数n，则称s在Sk(C)中的级数为n。

可以验证，对于C中任一约束变量x，在Sk (C) 中与其对应的项的级恰等于x在C中的模态度。

下面引入模态替换和模态合一等概念，它们是相对于模态Skolem标准型（标记公式）而言的。

定义5 模态替换是形如$\{t_1/x_1,\ \cdots,\ t_n/x_n\}$的有限集，其中：

1)x_i是变量，t_i是不同于x_i的项，并且对于任意$i,\ j$，若$i\neq j$ 则$x_i\neq x_j$；

2)任意变量x_i及t_i中出现的所有符号都有标记；

3)对任意i，如果x_i的级为n，则t_i中任意符号的级都不大于n。

模态替换与经典替换的区别在于对符号级的一些约束限制上。若x的级为n，而t中有级大于n的符号，则不允许用t来替换x。这种约束反映了模态算子与量词之间的相互作用。仍用小写希腊字母θ，σ，μ等表示模态替换。与经典逻辑相同，可以定义模态的合成、模态合一以及最一般合一（mgu）等概念。

3. Cialdea一阶模态归结系统的不完备性及其修正

Cialdea的一阶模态归结方法限制在K系统，即下面的归结系统上。

设S是含有一个或两个标记公式的集合，θ是一个替换，则C是S的θ-归结式当且仅当C是对S中公式使用如下规则得到，其中S'表示至多含有一个公式的集合：

1)经典规则

(C_0) $\{\perp,\ A\}$的θ-归结式为$\perp$；

(C_1) 若$\{P_1,\ P_2\}$有mguθ，则$\{P_1,\ \sim P_2\}$的θ-归结式为$\perp$；

(C_2) 若C是$S'\cup\{A\}$的θ-归结式，则$C\vee B^\theta$是$S'\cup\{A\vee B\}$的θ-归结式；

(C_3) 若C是$S'\cup\{A\}$的θ-归结式，则$C\wedge B^\theta$是$S'\cup\{A\wedge B\}$的θ-归结式；

(C_4) 若C是$\{A,\ B\}$的θ-归结式，则C是$A\wedge B$的θ-归结式。

2)模态规则

(m_1) 若C是$\{A,\ B\}$的θ-归结式，则$\Box C$是$\{\Box A,\ \Box B\}$的θ-归结式；

(m_2) 若C是$\{A\}$的θ-归结式，则$\Box C$是$\{\Box A\}$的θ-归结式；

(m_3) 若C是$\{A,\ B\}$的θ-归结式，则$\Diamond C$是$\{\Box A,\ \Diamond B\}$的θ-归结式；

(m_4) 若C是$\{A\}$的θ-归结式，则$\Diamond C$是

$\{\Diamond A\}$的θ-归结式。

3)化简规则

(s_1) 若$\bot\wedge A$是S的θ-归结式，则$\bot$是S的θ-归结式；

(s_2) 若$\bot\vee A$是S的θ-归结式，则A是S的θ-归结式；

(s_3) 若$\Diamond\bot$是S的θ-归结式，则$\bot$是S的θ-归结式。

Cialdea一阶模态K系统归结方法由下述三条规则构成：

1）取因子规则 若θ是D和F的mgu，则有：

$$\frac{C[D\vee F]}{(C[D])^{\theta}}$$

2）复制规则 若y是一个新变量，$D(x^n)$是C的子公式，x^n只在$D(x^n)$中出现，$D(x^n)$在C中的模态度不大于n，且$D(x^n)$不在否定符号作用下，则有：

$$\frac{C[D(x^n)]}{C[D(x^n)\wedge D(y^n)]}$$

3）归结规则 若S是一个包含一个或两个标记公式的集合，C是S的θ-归结式，则有：

$$\frac{S}{C}$$

针对这种模态归结系统，我们来看复制规则。使用复制规则的前提之一是x^n在D中出现，也就是说，若D中不含有任何变量，则不能对C的子公式D使用复制规则，特别对于基公式集（命题模态公式集），复制规则在演绎过程中不能使用。复制规则的本意只是为了解决对同一个变量的替换得到不同的例。

下面仅讨论命题模态逻辑公式的例子。

反例 设$S=\{\Diamond((\Box P\vee\Box Q)\wedge\Diamond(\sim P\wedge\sim Q))\}$则S只由一个公式组成。容易验证S是K不可满足的。但是，使用上述模态归结方法得不到空公式$\bot$。

因此，Cialdea的一阶模态归结方法是不完备的。究其原因，是上述模态归结规则(m_3)和(m_4)中，可能算子约束下的公式参与归结时，其归结式中“遗忘”了原来可能算子约束下的公式，而复制规则在一般情况下又不能使用。这种归结方法，在某种程度上说是可能算子约束下的公式在归结过程中，最多只能使用一次的归结。因此修正Cialdea归结系统使之完备有下述两种方法：

第一种方法：用下面的复制规则Ⅰ代替Cialdea系统的复制规则。

复制规则Ⅰ 若D是C具有正极性的子公式[10,11]，则有：

$$\frac{C[D]}{C[D\wedge D']}$$

其中D'或者是D本身，或者$D=D(x^n)$，x^n是只在$D(x^n)$中出现的变量，y是一个新变量，$D'=D[y^n]$。

使用Cialdea的证明方法[6]，可以证明：这种修正后的归结系统是可靠的和完备的。然而，复制规则Ⅰ的归结过程将更加难以控制，不利于机器的实现，不是一个好方法。

第二种方法：用下述模态规则(m_3')、(m_4')分别代替Cialdea归结系统中的(m_3)、(m_4)规则。

(m_3') 若C是$\{A, B\}$的θ-归结式，则$\Diamond(C\wedge B^{\theta})$是$\{\Box A, \Diamond B\}$的$\theta$-归结式；

(m_4') 若C是$\{A\}$的θ-归结式，则$\Diamond(C\wedge A^{\theta})$是$\{\Diamond A\}$的$\theta$-归结式。

同样可以证明，这样修正后的一阶模态归结系统是可靠的和完备的。尽管第二种方法增加了一定量的符号冗余，但其机器实现比第一种方法容易控制。

4. 一种新的一阶模态逻辑的归结方法

据我们所获的文献，模态逻辑的各种归结方法，都不容许两个可能算子约束公式进行归结。很明显，任意地容许两个可能算子约束公式进行归结，将破坏归结系统的可靠性。我们在[8]中针对命题模态逻辑K系统提出了一种在一定条件下容许两个可能算子约束公式之间作归结的归结方法。下面将这种方法推广到一阶模态逻辑K系统。

定义6 设S是Skolem标准型集合（标记公式集），对S中出现的所有可能算子，各自加上一个整数作标记，则称所得到的表达式集为双标记公式集。例如$S=\{\Diamond_2 P(a^0,x^1), \Diamond_4(\Box P(b^1,y^2)\wedge\Diamond_3 Q(C^0)\}$是一个双标记公式集。

规定： 对已给定的初始标记公式集的可能算子的不同出现加上不同的标记，称为输入双标记公式集。

从输入双标记公式集出发，使用下述规则作为归结规则所得到的一阶K逻辑的归结系统，我们称之为FMRK系统。

1)经典规则，模态规则的(m_1)、(m_2)，化简规则的(s_1)、(s_2)与前述Cialdea归结系统相同。

2)(m_3)、(m_4)和(s_3)规则分别用下述规则(m_3')、(m_4')和(s_3')代替：

(m_3') 若C是{A, B}的θ-归结式，则$\Diamond_i C$是$\{\Box A, \Diamond_i B\}$的θ-归结式；

(m_4') 若C是{A}的θ-归结式，则$\Diamond_i C$是$\{\Diamond_i A\}$的θ-归结式；

(s_3') 若$\Diamond_i\perp$是S的θ-归结式，则⊥是S的θ一归结式。

3)再增加一条模态规则(m_5)：

(m_5) 若C是{A, B}的θ-归结式，则$\Diamond_i C$是$\{\Diamond_i A, \Diamond_i B\}$的θ-归结式。

FMRK系统的推理规则，仍由取因子规则、复制规则和归结规则构成。

FMRK演绎总是从输入双标记公式集开始的，仅在这两个可能算子具有相同标记的情况下才能归结两个可能算子约束的双标记公式。粗略地说，FMRK归结过程中使用(m_5)规则的两个双标记公式的两个可能算子来源于输入双标记公式集中同一个可能算子。

显然，FMRK系统保持了Cialdea归结系统符号冗余较少的优点。其可靠性和完备性定理可以修改Cialdea的证明[6]得出，其命题模态逻辑情形的一个相对简单的证明可以从[8]中找到。

参考文献

[1] L. Farinas del Cerro, A simple deduction method for modal logic, Information processing Letters, 14(2) 1982

[2] L. Farinas del Cerro, Resolution modal logics, in Logics and Models of Concurrent Systems (K. R. Apt ed.) Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1985

[3] M. Abadi 等, Modal theorem proving, in, Proc. of the 8th International Conference on Automated Deduuction, Lecture Notes in Computer Science, Vol. 230, 1986

[4] P. Enjalbert 等, Modal resolution in clause form, Theoretical Computer Science 65, 1989

[5] Y. Auffray等, Strategies for modal resolution: Results and problems, Journal of Automated Reasoning 6, 1990

[6] M. Cialdea, Resolution for some first-order modal systems, Theoretical Computer Science 85, 1991

[7] 孙吉贵，刘叙华，模态归结弱包含删除策略，计算机学报（待发表）。

[8] 孙吉贵，刘叙华，一种新的模态归结推理，科学通报（待发表）。

[9] M. Cialdea 等, A modal Herbrand's property, Z. Math. Logik Grundlag. Math. 32, 1986