Herbrand基 逻辑程序 启发式语义映射 ③ 语义映射



计算机科学 1995 Vol. 22№. 5

10-13

# Herbrand 基上的启发式语义映射

吕文进

TP311.1

（贵州大学计算机科学系 贵阳 550025）

**摘 要** In this paper, we introduce a new kind of semantic mapping on Herbrand base, called heuristic mapping, its properties are discussed. As an application, finally, we define the minimal and supperted model semantics for the stratified logic program by using the heuristic semantic mapping.

**关键词** Logic program, Herbrand base, Semantics.

## 一、引 言

在逻辑程序中允许负文字出现，极大地增强了逻辑程序的表达能力，但同时也为其语义定义带来了困难。可以说，至今还没有一种好的方法来定义一般逻辑程序的语义。

通常地，讨论逻辑程序语义的不动点方法是对给定的程序 P 定义映射 $Tp: 2^{Bp} \rightarrow 2^{Bp}$：

$Tp(I)=\{A' \mid A' \in Bp$，存在 P 中的子句 $A \leftarrow L_1, \cdots, L_n$ 及基置换 $\theta$，使得 $A'=A\theta$ 且 $L_1\theta, \cdots, L_n\theta$ 在 I 中为真$\}$

其中，Bp 是 P 的 Herbrand 基，$I \in 2^{Bp}$ 是 P 的 Herbrand 解释，一个基原子在 I 中为真当且仅当 $A \in I$，（以下记为 $I \models A$）。$I \in 2^{Bp}$ 称做是 Tp 的不动点如果 $Tp(I)=I$。Tp 的不动点 I 称做是最小的如果对于 Tp 的任意不动点 I'，都有 $I \subseteq I'$，这里 $\subseteq$ 是通常的集合包含关系。P 的不动点语义就是选择 Tp 的某一不动点作为 P 的语义。

Van Emden 和 Kowalski[2] 以 Horn 程序为对象讨论了逻辑程序的操作语义，最小不动点语义和模型语义，并证明了它们的等价性。注意到 $2^{Bp}$ 在集合包含关系下构成一完全格，对于 Horn 程序 P，Tp 是单调的，故存在最小不动点。Van Emden 和 Kowalski 证明了 Tp 的最小不动点和 P 的最小模型（P 的所有模型的交）一致。对于包含负子句的 Horn 子句集也有同样的结果[3]，Apt，Blair 和 Walker[4] 利用 Tp 定义了分层逻辑程序的极小支持模型语义。

但不幸的是，对于一般逻辑程序 P，Tp 不一定是单调的，且一般不存在不动点。

**例 1.1** 设 $P=\{A \leftarrow \neg A\}$，则 $Tp(\Phi)=\{A\}$，$Tp(\{A\})=\Phi$，P 有模型 $\{A\}$，但其不是 Tp 的不动点。

对于一般程序 P，Tp 的非单调性主要是由于 P 的子句中含有负文字。注意到一般子句

$$A_0 \leftarrow \neg A_1, \cdots, \neg A_m, B_1, \cdots, B_n \qquad (1)$$

逻辑上等价于 $A_0 \vee A_1 \vee \cdots \vee A_m \leftarrow B_1 \wedge \cdots \wedge B_n$（2）即在这样的子句中含有不确定的信息：当 $B1, \cdots, B_n$ 为真且(2)为真时，我们知道 $A_0 \vee A_1 \vee \cdots \vee A_m$ 必为真，但不知道 $A_0 \vee A_1 \vee \cdots \vee A_m$ 中哪些为真。因此，为了减少这种不确定性，在讨论这类程序的语义时，给出适当的启发信息是必要的。基于这种观点，我们引入了 Herbrand 基上启发式语义映射的概念：对于给定的程序 P，选择一个启发集 H，为 P 的 Herbrand 基的一个子集。假定启发集中的基原子都是真的，当子句(2)为真且 $B_1, \cdots, B_n$ 为真时，我们选择且只选择 $A_1, \cdots, A_m$ 中属于 H 的基原子（如果有，否则选择 $A_0$）。这样，启发集减少了程序的不确定性。由于启发式语义映射依赖于启发集的选择，不同的启发集将确定程序的不同语义模型，因而启发式语义映射提供了选择程序不同语义模型的可能性。本文将讨论这种语义映射的性质及其应用。文中所使用的符号和概念参见[1][4]。

## 二、Herbrand 基上的启发式语义映射

对于一般的正规程序 P，Tp 不一定是单调的，究其原因是 P 中含有不确定的信息。为了定义这类程序的语义，本节将定义一种新的语义映射并讨论其性质。

**定义 2.1** 设 S 是一子句集，Bs 是 S 的 Herbrand 基，称 $B_s^+=B'\cup\{\Box\}$，为 S 的扩充 Herbrand 基，其中□称为空谓词。$B_s^+$ 的一个子集 I 称为 S 的一个解释。若□∈I，则 I 一定不是一个模型，若□∉I，则 I 的意义与通常的相同。

**定义 2.2** $2^{B_s^+}\to 2^{B_s^+}$ 的映射称为 S 的一个语义映射。一个语义映射 T 称做是单调的，如果对任意的 $I_1\subseteq I_2\subseteq B_s^+$，有 $T(I_1)\subseteq T(I_2)$。

注意到 $(2^{B_s^+},\subseteq)$ 构成一完全格，其上的单调语义映射存在最小不动点。对于给定的单调语义映射 T，定义：

$T\uparrow 0(I)=I$

$T\uparrow(n+1)(I)=T(T\uparrow n(I))\cup T\uparrow n(I)$

$T\uparrow\omega(I)=\cup_{n=0}^{\infty}T\uparrow n(I)$

则 T 的最小不动点即为 $T\uparrow\omega(\Phi)$

设 C 是任一子句，记 Head(C) 为 C 的头（可能为空□），Pos(C) 为 C 的体中出现的正原子的集合、Neg(C) 为 C 的体中出现的负原子（去掉负号后）的集合。

**定义 2.3** 设 S 是任一子句集，H⊆Bs，对于给定的 H 和 S，定义 S 的语义映射 $T_S^H$ 如下：

对于任意的解释 I 及 S 中的子句 C，若存在基置换 θ，使得 Pos(Cθ)⊆I，则：

(1)若□∈I，则令□∈$T_S^H$(I)。

(2)若 H∩Neg(Cθ)=Φ，则令 Head(Cθ)∈$T_S^H$(I)，否则

(3)对任意的 A∈H∩Neg(Cθ)，令 A∈$T_S^H$(I)。

在上述定义中，称 H 为 S 的一个启发集，$T_S^H$ 为 S 的带有启发集 H 的一个启发式语义映射。

显然，对任意的启发集 H，$T_S^H$ 是单调的，但是，即使 S 有模型，$T_S^H$ 的最小不动点一般不是 S 的模型。

**例 2.1** 设 S={←¬A，B；B←}。i)取 H={B}，则 $T_S^H\uparrow\omega(\Phi)$={□，B}不是 S 的模型。ii)取 H={A}，则 $T_S^H\uparrow\omega(\Phi)$={A，B}为 S 的一个模型。

由上例可以看出，$T_S^H$ 的最小不动点是否为 S 的模型依赖于 H 的选择。为了讨论 $T_S^H$ 的性质和特征，我们引入一类特殊的子句集。

设 S 是任一子句集，记 $Neg(S)=\cup_{C\in S}Neg(C)$。

**定义 3.4** 记 S 是任一子句集，S 中的原子 A 称做是极大的，如果对任意的基置换 θ，或者 S⊢Aθ 或者 S⊢¬Aθ，(S⊢A 记 A 在 S 中可证)，如果 Neg(S) 中的原子都是极大的，则称 S 为一极大子句集。

极大子句集具有模型交性质。

**定理 2.1** 设 S 是一极大子句集，如果 S 有模型，则 S 所有模型的交是 S 的模型。

证明：设$\{M_i|i\in D$，D 为一下标集$\}$为 S 所有模型的集合。记 $M_0=\cap_{i\in D}M_i$，若 $M_0$ 不是 S 的模型，则存在 S 中的子句 C 及基置换 θ，使得 Neg(Cθ)∩$M_0$=Φ，Pos(Cθ)⊆$M_0$。而 Head(Cθ)∉$M_0$。注意到 Neg(C) 中原子的极大性，则对任意的 i∈D、Neg(Cθ)∩$M_i$=Φ，由 Pos(Cθ)⊆$M_0$⊆$M_i$ 及 $M_i$ 为 S 的模型，故 Head(Cθ)≠□且 Head(Cθ)∈$M_i$，所以 Head(Cθ)∈$\bigcap_{i\in D}M_i$。矛盾。即 $M_0$ 是 S 的模型。 □

**推论 2.1** 若 S 是一极大子句集，则 S 存在最小模型。

对于极大子句集 S 和适当选择的启发集 H，$T_S^H$ 和通常的映射 Tp 有相似的特征。

设 S 是任一子句集，令 $B_S^-$ 是 Neg(S) 中的原子遍历 S 的 Herbrand 宇宙所得的基原子的集合。记 Hm={A|A∈$B^-s$，S⊢A}。

**定理 2.2** 设 S 是一极大子句集，H⊆$B_s$。如果 H∩$B_S^-$=Hm，则对 S 的任一解释 I，I 为 S 的模型的充要条件是(1)□∉I，(2)$T_S^H$(I)⊆I。

证明：i)必要性：设 I 是 S 的模型，故显然有(1)，现在证明 I 满足(2)。对于任意的 A∈$T_S^H$(I)，依定义，存在 S 中的子句 C 及基置换 θ，使得 Pos(Cθ)⊂Φ 且或者(a)：H∩Neg(Cθ)=Φ，A=Head(Cθ)或者(b)：H∩Neg(Cθ)≠Φ，A∈H∩Neg(Cθ)。如果(a)成立，由 H∩Neg(Cθ)=Φ 可得 Hm∩Neg(Cθ)=Φ，因为 Neg(Cθ)中的原子都是极大的，由 Hm 的定义可得 Neg(Cθ)中的基原子在 S 的所有模型中都假，因为 I 为 S 的模型，故 Neg(Cθ)∩I=Φ，又 Pos(Cθ)⊆I，故必有 Head(Cθ)∈I。如果(b)成立，则 A∈H∩Neg(Cθ)⊆H∩$B_S^-$=Hm，由 Hm 的定义，A 属于 S 的每个模型，故 A∈I。

ii)充分性：设 I 满足(1)，(2)，若 I 不是 S 的模型，则存在 S 中的子句 C 及基置换 θ，使得 Pos(Cθ)⊆I，I∩Neg(Cθ)=Φ 而 Head(Cθ)∉I，依 $T_S^H$ 的定义，若 Neg(Cθ)∩H≠Φ，则 Neg(Cθ)∩H⊆$T_S^H$(I)⊆I，矛盾。若 H∩Neg(Cθ)=Φ，则 Head(Cθ)∈$T_S^H$(I)⊆I，矛盾。 □

注意到上述定理 ii)的证明中，并没有用到 S 的极大性。实际上，我们有：

**推论 2.2** 若 I 满足(1)□∉I，(2)$T_S^H$(I)⊆I，则 I

为S的模型。

下面的定理表明，对于极大子句集S，适当地选择启发集，S的最小模型可以通过S的启发式语义映射得到。

**定理2.3** 设S是相容的极大子句集，$H\subseteq B_S$。如果$H\cap B^-s=Hm$，则$T_S^H$的最小不动点即为S的最小模型。

证明：首先证明$M=T_S^H\uparrow\omega(\theta)$为S的模型。因为$T_S^H(T_S^H\uparrow\omega(\Phi))=T_S^H\uparrow\omega(\Phi)$，由定理2.2，只须证明$\square\notin M$即可。记$M_0$是S的最小模型，因为$T_S^H$是单调的，故由归纳法易证。对任意的$n>0$：$T_S^H\uparrow n(\Phi)\subseteq M_0$，所以

$$M=T_S^H\uparrow\omega(\Phi)=\bigcup_{n=1}^{\infty}T_S^H\uparrow n(\Phi)\subseteq M_0 \qquad (1)$$

因为$M_0$是S的模型，故$\square\notin M_0$，所以$\square\notin M$，由定理2.2，M为S的模型。又$M_0$是S的最小模型，故$M_0\subseteq M$。再由(1)即得M为S的最小模型。 □

对于一般的子句集，我们有：

**定理2.4** 设S是任一子句集，如果$H\subseteq B^-s$且$S'=S\cup H\cup\{\neg A\mid A\in B^-s\text{-}H\}$是相容的；则$T_S^H\uparrow\omega(\Phi)$是S的包含H的极小模型（即$T_S^H\uparrow\omega(\Phi)$不含S的包含H的真子模型）。

证明：注意到S′是一个极大子句集，由定理2.3，结论显然。 □

## 三、分层逻辑程序的语义

作为启发式语义映射的一个应用，本节讨论分层逻辑程序[4]的语义。

逻辑程序P本质上就是谓词公式的集合，其说明语义(declarative semantics)可以通过选择P的一个或多个模型来描述。一个公式在这样的语义中为真当且仅当在其所选择的模型中都为真。对于Horn程序，一种自然的选择就是P的最小模型或等价地选择Tp的最小不动点。但正规程序一般不存在最小模型，其相应的语义映射也不存在最小不动点。为了避免负原子无限制的出现所产生的语义定义的困难，Apt，Blair和Walker[4]引入了分层逻辑程序的概念。其基本思想就是限制程序中负原子的使用。

**定义3.1** 设P是一个正规程序，当P中含有原子$A(t_1,\cdots,t_n)$时称A是P的一个关系。P中所有以A为头的子句的集合称为A的定义。A在正文字中的出现称为正出现，在负文字中的出现称为负出现。

**定义3.2** 一个正规程序P称做是分层的，如果存在P的一个分划：$P=P_1\dot\cup P_2\dot\cup\cdots\dot\cup P_n$，满足下面两个条件：$(i=1,2,3,\cdots,n)$。

1)如果关系A正出现在$P_i$中，则其定义包含在$\bigcup_{j\leq i}P_j$中。

2)如果关系A负出现在$P_i$中，则其定义包含在$\bigcup_{j<i}P_j$中。

$P_1$可以为空。$P_i(i=1,2,\cdots,n)$称为P的一个层。我们记$\bar P_i=P_1\dot\cup P_2\dot\cup P_2\cdots\dot\cup P_i$。

**定义3.3** 设M是P的一个模型，M称做是极小的如果其不包含P的真子模型。M称做是被支持的(Supported)如果对任意的$A\in M$，存在P中的子句$A_1\leftarrow L_1,L_2,\cdots,L_m$及基置换$\theta$使得$A=A_1\theta$且$M\models L_i\theta(i=1,2,\cdots,m)$。如果M既是极小的又是被支持的，则称M是P的极小支持模型。

Apt，Blair和walker[4]使用不动点方法证明了分层程序存在唯一极小支持模型。利用启发式语义映射，我们可以方便而自然地得到分层程序的极小支持模型。

设P是一个分层程序，记$SB_{\bar P_i}^-$为$\bar P_i$中的原子遍历P的Herbrand宇宙所得的基原子的集合。根据分层程序的定义，$P_i$中的负原子其定义均包含在$\bar P_{i-1}$中，所以，很自然地，我们选择$\bar P_{i-1}$的一个模型作为$P_i$的一个启发集。为此，设$M_{i-1}$是$\bar P_{i-1}$的一个模型，且$M_{i-1}\subseteq SB_{\bar P_{i-1}}^-$，记$\overline{M}_{i-1}=\{\neg A\mid A\in SB_{\bar P_{i-1}}^- - M_{i-1}\}$，$P'_i=P_i\cup M_{i-1}\cup\overline{M}_{i-1}$。

**引理3.1** $P'_i$是相容的。

证明：令$M=\{A\theta\mid\theta\text{是任意的基置换},A\text{是}P_i\text{中任意子句的头}\}$。显然，M是$P_i$的一个模型。由分层程序的定义，$M\cap M_{i-1}=\Phi$，故$M\cup M_{i-1}$是$P'_i$的一个模型。 □

由引理3.1及定理2.4可得：

**引理3.2** $T_{P_i}^{M_{i-1}}\uparrow\omega(\Phi)$是$P'_i$的包含$M_{i-1}$的最小模型，且是$\bar P_i$的包含$M_{i-1}$的极小模型。

**引理3.3** 设L是出现在$P_i$中的负文字，$M_i$是$P'_i$的模型，则对任意的基置换$\theta$，如果$M_{i-1}\models L\theta$，则$M_i\models L\theta$。

证明：由L是$P_i$中的负文字及$M_{i-1}\models L\theta$，必有$\neg L\theta\notin M_{i-1}$。由分层程序的定义，必有$L\theta\in\overline{M}_{i-1}$。由$M_i$是$P'_i$的模型及$P'_i$的定义，有$\neg L\theta\notin M_i$，即$M_i\models L\theta$。 □

**引理3.4** 若$M_{i-1}$是$\bar P_{i-1}$的被支持模型，则$M_i$

$=T_{\overline{P}_i}^{M_{i-1}} \uparrow \omega(\Phi)$是$\overline{P}_i$的被支持模型。

证明：由引理 3.2，$M_i$ 是 $P_i$ 的模型。下面证明 $M_i$ 是被支持的。对任意的 $A \in M_i$：

1）如果 $A \in M_{i-1}$，因为 $M_{i-1}$是被支持的，故存在 $P_{i-1}$中的子句 $A_1 \leftarrow L_1, \cdots, L_m$ 及基置换 $\theta$，使得 $A = A_1\theta$ 且 $M_{i-1} \models L_j\theta (j=1,2,\cdots,m)$。若 $L_j$ 是正文字，因为 $M_{i-1} \subseteq M_i$，故必有 $M_i \models L_j\theta$，若 $L_j$ 是负文字，由引理 3.3，有 $M_i \models L_j\theta$。故对任意的 $L_j$ 总有 $M_i \models L_j\theta$。

2）如果 $A \in M_i$ 而 $A \notin M_{i-1}$，则存在 n，使得 $A \in T_{\overline{P}_i}^{M_{i-1}} \uparrow n(\Phi)$，故存在 $P_i$ 中的子句 C 及基置换 $\theta$，使得 $Pos(C\theta) \subseteq T_{\overline{P}_i}^{M_{i-1}} \uparrow (n-1)(\Phi)$ 并且或者 $Neg(C\theta) \cap M_{i-1} = \Phi$，$A = Head(C\theta)$ 或者 $Neg(C\theta) \cap M_{i-1} \neq \Phi$，$A \in Neg(C\theta) \cap M_{i-1}$。由 $A \notin M_{i-1}$，故后一种情况不可能。由于 $Pos(C\theta) \subseteq T_{\overline{P}_i}^{M_{i-1}} \uparrow (n-1)(\Phi) \subseteq M_i$，故对于 C 的体中的正文字 L，总有 $M_i \models L\theta$。对于 C 的体中的负文字 L，由于 $Neg(C\theta) \cap M_{i-1} = \Phi$，故 $\neg L\theta \notin M_{i-1}$，即 $M_{i-1} \models L\theta$，由引理 3.3，有 $M_i \models L\theta$，这样，对 C 的体中任意文字 L，总有 $M_i \models L\theta$，由 1)，2）即得 $M_i$ 是$\overline{P}_i$的被支持模型。 □

最后，我们叙述本节的主要定理。

**定理 3.1** 设 $P = P_1 \dot{\cup} P_2 \dot{\cup} \cdots \dot{\cup} P_n$ 是一分层程序，记 $M_1 = T_{P_1}^{\Phi} \uparrow \omega(\Phi)$，$M_{i+1} = T_{\overline{P}_{i+1}}^{M_i} \uparrow \omega(\Phi)$ $(i=1,2,\cdots,n-1)$，其中 $P'_{i+1} = P_{i+1} \cup M_i \cup \{\neg A \mid A \in SB_{\overline{P}_i} - M_i\}$。则对任意的 $1 \leqslant k \leqslant n$，$M_k$ 是$\overline{P}_k$的极小支持模型。特别地，$M_n$ 是 P 的极小支持模型。

证明：对 k 进行归纳。当 k=1 时，注意到 $P_1$ 是一个 Horn 程序，故结论显然。设 $M_{k-1}$是 $P_{k-1}$的极小支持模型，则由 $M_{k-1}$是被支持的及引理 3.4 知 $M_k$ 是被支持的，再由 $M_{k-1}$的极小性及引理 3.2 可得 $M_k$ 的极小性。即 $M_k$ 是 $P_k$ 的极小支持模型。由归纳原理，定理得证。 □

## 四、结束语

扩充 Horn 程序到正规程序，进一步地到一般程序[1]，极大地增强了逻辑程序的表达能力，但同时也给其语义定义带来了极大的困难，其主要原因是程序中含有不确定信息。为了讨论这类程序的语义，本文引入了一般子句集的 Herbrand 基上启发式语义映射的概念，并用其定义了一类特殊的正规程序——分层程序的极小支持模型语义。我们相信，启发式语义映射在解决程序中的否定所产生的困难时，将是一个有用的工具。

*李科教授曾仔细审阅了本文的初稿并提出了宝贵的建议，在此深表谢意。*

### 参考文献

[1]Lloyd, J. W., Foundations of Logic Programming, Springer_ Verlag, Berlin and New York, 1987

[2]Emden, M. H. et al., The semantics of predicate logic as a programing language, JACM, 23 (4), 1976

[3]陆汝钤，Herbrand 基上的语义映射，《科学通报》，2，1982

[4]Apt, K. et al., Towards a theory of declarative knowledge, in foundations of deductive databases and logic programming (J. Mink. Ed) Morgan Kaufmann, Los Altos, 1988

（上接第 57 页）

### 参考文献

[1]闵应骅编译：作为学科的计算科学，清华大学出版社和广西科学技术出版社，1994.1.

[2]薛锦云：一种系统的算法程序设计和证明方法，理论计算机科学进展，国防科大出版社，1994.10.

[3]Swartout, W. and Balzer, R.: On the Inevitable Intertwining of Specification and Implementation. CACM, 25(7), July 1982.

[4]王选：软件设计方法，清华大学出版社，1991.

[5]Jackson, M. A.: *Principles of Program Design*, Academic Press, 1975.

[6] Warnier, J. D.: Logical Construction of Programs, 1976.

[7] Hoare, C. A. R.: Proof of a Program: FIND, CACM 14(1), Jan. 1971.

[8] Gries, D.: The Science of Programming, Springer-Verlag, 1981.

[9] Nievergelt, J. ang Hinrichs K. H.: Algorithms and Data Structures, Prentice Hall, 1993.

[10]何明昕：PSS 问题求解系统及其在石油测井解释中的应用，中科院自动化所硕士论文，1985.