不确定推理模型　BMI　逻辑程序设计　区间估计　(20)

83-85

计算机科学 1995Vol. 22 №. 5

基于区间估计的不确定推理模型BMI之性质分析

张为群　TP311

(西南师范大学计算机科学系　重庆 630715)

摘　要　This paper suggests some constraints for an interval estimate-based uncertain reasoning model, and shows that the model BMI which Luo Xudong and Cai Jingqiu developed in [2] can act under these constraints basically. Therefor, the model BMI is consistent with human intuitions.

关键词　Interval-estimate, Uncertain reasoning, Extension principle, Expert system.

一、引　言

1986 年，Baldwin 在支持逻辑程序设计(SLP)中引入基于区间估计和不确定推理模型[1]，但这个模型缺乏良好的理论基础，也未经大量实践检验，文[2]从经过大量实践检验的 MYCIN 的确定因子模型出发，用线性变换和 Fuzzy 数学的扩展原理[3]，导出了一种新的基于区间估计的不确定推理模型(简称为 BMI 模型)。

BMI 模型与 SLP 的模型一样能够表示"不知道"的信息，并继承了 MYCIN 的优点[4]，即能够很好地区分证据的出现导致的是对假设的信任还是怀疑。这个 BMI 模型的另一个重要优点是，它与基于点估计的 MYCIN 的模型是兼容的。因此，将其应用于专家系统时，允许点估计或区间估计或两者并存。

文[2]提出的 BMI 模型，是从 MYCIN 模型推导出来的，那么这就会产生一个问题：这样的模型是否与我们的直觉一致呢？这就是本文所要讨论的问题。

二、基于区间估计的模型的若干约束

一个不精确推理模型，由顺序传播算法、平行传播算法以及前提的逻辑组合算法构成。因此，要讨论对模型的约束，只要讨论这些算法的公式应满足的约束以及它们之间的关系。

记断言 E 的不确定性估计为 um(E)，并设

um(E)=[l,u]⊆[0,1]

这里 l 和 u 分别表示对 E 的某种肯定程度的悲观估计和乐观估计。当 l>0.5 时，趋向于肯定 E；特别地，um(E)=[1,1]，表示对 E 完全肯定。当 l<0.5 时，趋向于否定 E；特别地，um(E)=[0,0]，表示对 E 完全否定。当 um(E)=[0.5,0.5]时，表示对 E 是真或是假，没有任何趋向性。当 um(E)=[0,1]时，表示对 E 一无所知。

设规则 E→H 的强度：

RS(H,E)=(f(H,E),f(H,E))

这里 f(H,E)和 f(H,E)都是[0,1]的子闭区间，f(H,E)表示 E 为真时 H 的不确定性估计，而 f(H,E)表示 E 为假时 H 的不确定性估计。

对于用于估计不确定性的区间[a,b]，一般要求，要么是[0,0.5]的子区间，要么是[0.5,1]的子区间，这样要求是有一定道理的。拿投票模型来说，a 可视为投赞成票人数的百分比，而 1−b 可视为投反对票人数的百分比。在现实生活中，人们通常要求，要么投赞成票的人数达到或超过半数，要么投反对票的人数达到或超过半数，方设所投票有效，否则无效。在我们这里，要么 a≥0.5，要么 1−b≥0.5 即 b≤0.5，而不允许别的情形出现，于是，应该要求，要么[a,b]⊆[0,0.5]，要么[a,b]⊆[0.5,1]。

1. 顺序传播的约束

顺序传播的运算是从 um(E)和规则 E→H 的强度 RS(H,E)=(f(H,E),f(H,E))求 um(H)的运算，为了方便，记这个运算为 **。

约束 1.1　若 um(E)=[1,1]，则

um(E) * * RS(H,E)=f(H,E)。

这条约束的意思是，前提是完全肯定时，根据 f(H,E)的含义，结论 H 的不确定性估计 um(H)应为 f(H,E)，类似地，有下面这条约束：

约束 1.2　若 um(E)=[0,0]，则

um(E) * * RS(H,E)=f(H,E)。

约束 1.3　若 f(H,E)=[0.5,0.5]，um(E)⊆[0.5,1]，则 um(E) * * RS(H,E)=[0.5,0.5]。

约束 1.4　若 $f(H,E)=[0.5,0.5]$，$um(E)\subseteq[0,0.5]$，则 $um(E)**RS(H,E)=[0.5,0.5]$。

上面这两条约束说明，规则的结论与前提无关时，即规则强度的参量取单位元[0.5,0.5]时，这条规则 E→H 无效。

约束 1.5　若 $um(E)=[0.5,0.5]$，则 $um(E)**RS(H,E)=[0.5,0.5]$。

这条约束说明，前提的不确定估计为单位元[0.5,0.5]时，这条规则 E→H 不起作用。

2. 平行传播的约束

假定从规则 $E_1\rightarrow H$ 得出 H 的不确定性估计为 $um_1(H)$，由规则 $E_2\rightarrow H$ 得出 H 的不确定性估计为 $um_2(H)$，平行传播的运算就是合并 $um_1(H)$ 和 $um_2(H)$ 的运算。为了方便，我们记之为 ++。

约束 2.1　若 $[a,b]\subseteq[0.5,1]$，则 $[a,b]++[1,1]=[1,1]$。

约束 2.2　若 $[a,b]\subseteq[0,0.5]$，则 $[a,b]++[0,0]=[0,0]$。

这两条约束说明，如果一条证据能证实（或否定）一个假设，那么就不必考虑其它证据的支持（或反对）的作用了。

约束 2.3　$[a,b]++[0.5,0.5]=[a,b]$

这条约束表示，如果从一条推理路径所得的 H 的不确定性估计为单位元[0.5,0.5]，那么这条推理路径无效。约束 1.3，1.4，1.5 和这条约束有一定的内在联系，约束 1.3 和 1.4 说明，若规则强度为单位元，则得到的结论的不确定性估计也是单位元。随后，若是再作顺序传播，由约束 1.5，得到的仍为单位元；若是再作平行传播，对最后结论的不确定性估计毫无影响。

约束 2.4　++满足交换律

约束 2.5　++满足结合律

根据我们的直觉，若可由多条推理路径得到一个假设；那么合并这些推理途径对假设不确定性估计的影响，应该与规则顺序无关，而++满足交换律和结合律，就能保证这一点。

3. 前提逻辑组合的约束

下面这些约束很容易理解，我们就不解释了。为了方便，分别记合取，析取和非的运算符为△、▽和◁。

约束 3.1　△和▽满足交换律、结合律、幂等律和分配律。

约束 3.2　△、▽和◁满足 De Morgan 律，◁满足复原律。

约束 3.3　$[a,b]\triangle[1,1]=[a,b]$。

约束 3.4　$[a,b]\triangle[0,0]=[0,0]$。

约束 3.5　$[a,b]\triangledown[1,1]=[1,1]$。

约束 3.6　$[a,b]\triangledown[0,0]=[a,b]$。

约束 3.7　若 $[a,b]\subseteq[0,0.5]$，则 $[a,b]\triangle[0.5,0.5]=[a,b]$，$[a,b]\triangledown[0.5,0.5]=[0.5,0.5]$。

约束 3.8　若 $[a,b]\subseteq[0.5,1]$，则 $[a,b]\triangle[0.5,0.5]=[0.5,0.5]$，$[a,b]\triangledown[0.5,0.5]=[a,b]$。

三、BMI 模型的分析

1. BMI 模型简述

设 E 为一断言，其不确定性估计为：

$CF(E)=[l_E,u_E]\subseteq[0,1]$

这里 l_E 和 u_E 分别表示在观察背景下对 E 的可信度的悲观估计和乐观估计，规则 E→H 强度为一对值：

$(f(H,E),f(H,\bar{E}))=([f_l(H,E),f_u(H,E)],[f_l(H,\bar{E}),f_u(H,\bar{E})])$

这里 $f(H,E)$ 的两个分量的含义是：$f_l(H,E)>0.5$，表示证据 E 的出现所导致的对 H 可信程度的最悲观估计，而 $f_u(H,E)$ 则表示最乐观的估计；$f_u(H,E)<0.5$，表示证据 E 的出现导致 H 被怀疑程度的最低限度的估计，而 $f_l(H,E)$ 则是最大限度的估计。类似地，可以理解 $f(H,\bar{E})$。

上面用于估计不确定性的区间[a,b]，也要求，要么被[0,0.5]包含，要么被[0.5,1]包含。显然 b−a，便是不知道的成分，即不知道的程度。

模型的传播算法如下：

1）顺序传播。设规则 E→H 的强度的两个分量分别为 $f(H,E)=[f_l(H,E),f_u(H,E)]$，$f(H,\bar{E})=[f_l(H,\bar{E}),f_u(H,\bar{E})]$，又已知 $CF(E)=[l_E,u_E]$ 那么

$$
CF(H)=\begin{cases}
[(f_l(H,E)-0.5)(2l_E-1)+0.5,(f_u(H,E)-0.5)(2u_E-1)+0.5] \\
\qquad \text{当 } CF(E)\subseteq[0.5,1],CF(H,E)\subseteq[0.5,1] \\
[(f_l(H,E)-0.5)(2u_E-1)+0.5,(f_u(H,E)-0.5)(2l_E-1)+0.5] \\
\qquad \text{当 } CF(E)\subseteq[0.5,1],CF(H,E)\subseteq[0,0.5] \\
[(0.5-f_l(H,\bar{E}))(2l_E-1)+0.5,(0.5-f_u(H,\bar{E}))(2u_E-1)+0.5] \\
\qquad \text{当 } CF(E),f(H,\bar{E})\subseteq[0,0.5] \\
[(0.5-f_l(H,\bar{E}))(2u_E-1)+0.5,(0.5-f_u(H,\bar{E}))(2l_E-1)+0.5] \\
\qquad \text{当 } CF(E)\subseteq[0,0.5],f(H,\bar{E})\subseteq[0.5,1]
\end{cases}
$$

2）平行传播。设 $CF_1(H)=[l_1,u_1]$，$CF_2(H)=$

$[l_2,u_2]$，则

CF(H)=

$$\begin{cases}[2(l_1+l_2-l_1l_2)-1,2(u_1+u_2-u_1u_2)+1] & \text{当 } CF_1(H),CF(H)\subseteq[0.5,1]\\ [2l_1l_2,2u_1u_2] & \text{当 } CF_1(H),CF_2(H)\subseteq[0,0.5]\\ [l_1+l_2-0.5,u_1+u_2-0.5] & \text{当 } CF_1(H)\subseteq[0.5,1],CF_2(H)\subseteq[0,0.5]; \\ & \text{或 } CF_1(H)\subseteq[0,0.5],CF_2(H)\subseteq[0.5,1]\end{cases}$$

3)前提的逻辑组合。设 $CF(E)_1=[l_1,u_1]$，$CF(E_2)=[l_2,u_2]$，$CF(E)=[l,u]$，则

$CF(E_1\wedge E_2)=[\min\{l_1,l_2\},\min\{u_1,u_2\}]$

$CF(E_1\vee E_2)=[\max\{l_1,l_2\},\max\{u_1,u_2\}]$

$CF(\bar{E})=[1-u,1-l]$

2 BMI 模型的性质分析

实际上，对于上节所给出的约束，除约束 2.5 外，BMI 模型都满足。作为一个例子，我们来验证一下约束 1.5，其余的，不难验证，故从略。

设 $CF(E)=[0.5,0.5]$，代入顺序传播公式，有：

$CF(H)=[(f_l(H,E)-0.5)(2\times0.5-1)+0.5,(f_u(H,E)-0.5)(2\times0.5-1)+0.5]=[0.5,0.5]$

因此，约束 1.5 被 BMI 模型满足。

模型 BMI 不满足约束 2.5，也可以举一个例子来说明。设 $CF_1(H)=[0.3,0.4]$，$CF_2(H)=[0.4,0.5]$，$CF_3(H)=[0.8,0.9]$。于是：

$(CF_1(H)++CF_2(H))++CF_3(H)=[2\times0.3\times0.4,2\times0.4\times0.5]++[0.8,0.9]=[0.24+0.8-0.5,0.4+0.9-0.5]=[0.54,0.8]$

而

$CF_1(H)++(CF_2(H)+CF_3(H))$

$=[0.3,0.4]++[0.4+0.8-0.5,0.5+0.9-0.5]$

$=[0.3,0.4]++[0.7,0.9]$

$=[0.3+0.7-0.5,0.4+0.9-0.5]$

$=[0.5,0.8]$

故运算++不满足结合律，这是一件很遗憾的事，其实根源在于 MYCIN 的平行传播的运算不满足结合律。

++运算只满足交换律，不满足结合律，运算结果会与序有关，这是不合理的。对此，我们可以做类似于 MYCIN 的处理，即对于 $CF_1(H),\cdots CF_n(H)$，其中一些包含于[0.5,1]，其余包含于[0,0.5]。我们规定其运算顺序为：先将包含于[0.5,1]的诸 $CF_i(H)$ 进行平行组合，然后再将其余的包含于[0,0.5]的诸 $CF_j(H)$ 进行平行组合，最后再将这两个值进行平行组合。这个运算顺序的合理性，我们用下面定理来保证。

定理 1)若 $CF_i(H)=[a_i,b_i]\subseteq[0.5,1]$，$1\leqslant i\leqslant3$，则：

$(CF_1(H)++CF_2(H))++CF_3(H)=CF_1(H)++(CF_2(H)++CF_3(H))\subseteq[0.5,1]$

2)若 $CF_i(H)=[a_i,b_i]\subseteq[0,0.5]$，$1\leqslant i\leqslant3$ 则：

$(CF_1(H)+CF_2(H))++CF_3(H)=CF_1(H)++(CF_2(H)++CF_3(H))\subseteq[0,0.5]$

证明：只证 1)，2)类似可证。

首先我们有若 $[l_1,u_1],[l_2,u_2]\subseteq[0.5,1]$，则 $[l_1,u_1]++[l_2,u_2]\subseteq[0.5,1]$

事实上，$0.5\leqslant l_1\leqslant u_1\leqslant1$，$0.5\leqslant l_2\leqslant u_2\leqslant1$。故：

$l_1+l_2(1-l_1)\leqslant l_1+u_2(1-l_1)=u_2+l_1(1-u_2)\leqslant u_2+u_1(1-u_2)$

类似有：

$0.75=0.5+0.5(1-0.5)\leqslant l_1+l_2(1-l_1)$

$u_2+u_1(1-u_2)\leqslant1+1\times(1-1)=1$

故

$0.75\leqslant l_1+l_2-l_1l_2\leqslant u_1+u_2-u_1u_2\leqslant1$

于是

$0.5\leqslant2(l_1+l_2-l_1l_2)-1\leqslant2(u_1+u_2-u_1u_2)-1\leqslant1$ □

下面我们来证满足结合律，实际上，如下定义的运算，满足结合律：

$x\circ y=x+y-xy$

即可知++在这种情形下是满足结合律。

从这个定理可知，只要诸 $CF_i(H)(1\leqslant i\leqslant n)$ 要么都是包含于[0.5,1]的闭子区间，要么都是包含于[0,0.5]的闭子区间，那么用++对它们进行上述顺序的平行组合，结果与序无关，必然是唯一的。

参考文献

[1] Boldwin, J. F., Support Logie Programming Int. J. Intell. Syst, 1, 1986

[2] 罗旭东、蔡经球、邱玉辉，一种新的基于区间估计的不确定推理模型，西南师范大学学报，1994

[3] Zadeh, L. A., The Concept of a Linguistic Variable and its Application to Approximate Reasoning, Part I, Inform Sci, vol. 8; Part Ⅱ, Inform Sci, vol. 8; Part Ⅲ, Inform Sci, vol. 9 1975

[4] Shortliffe, E. H., Computer-Based Medical Consultations: MYCIN, American Elsevier Publishing Inc, New York, 1976

[5] 邱玉辉、罗旭东、张为群，一种三元逻辑相关不确定推理模型. 计算机研究与发展，第 32 卷(增刊)1995 年 1 月