

三元逻辑 不确定推理模型 人工智能

5

一种三元逻辑相关不确定推理模型

18-20

邱玉辉

罗旭东 TP18

(西南师范大学计算机科学系)

(国家智能计算机研究开发中心)
(北京轻工业学院自动化工程系)

摘 要 Based on Lukasiewicz's three-valued logic, this paper builds a tri-ary uncertain reasoning model, and discusses its some basic properties which shows that it is consistent with our intuitions. The characters of our model are as follows: 1) its measure for uncertainty is a distribution on the true-value set of the multi-valued logic, 2) its propagation for uncertainties is related with the operation of the logic, and 3) its parallel propagation follows a conservative principle

关键词 Multi-valued logic, Uncertain reasoning, Distribution of uncertainty, Multi-ary logic-related uncertain reasoning, Expert system.

一、引言

在实际生活中,对于一命题,人们可能对它将信将疑,或者说有几分真、几分假、几分可能,这三种成分同时存在,那么此时的不确定推理模型该是怎样的呢?我们可以基于 Lukasiewicz 三值逻辑^[1]来进行讨论。

在不确定的环境下,对于一个命题,人们有时候可能同时认为它有几分道理,有几分没道理,还有几分胡说八道,例如很多人对算命先生的话就持这个态度,那么这时的不确定推理模型又该是怎样的呢?这可以基于 Bochvar 三值逻辑^[2]来进行讨论。

在不确定的环境下,对于一命题,人们还可能同时认为它有几分真,有几分假,还有几分不知道,那么此时的不确定推理模型该是怎样的呢?这可以基于 Kleene 三值逻辑^[3]来进行讨论。

由于联系这三种三值逻辑的讨论是类似的,故本文仅就 Lukasiewicz 三值逻辑来进行分析。

二、Lukasiewicz 三值逻辑

在Lukasiewicz三值逻辑中,命题的真值集为

$\begin{matrix} A \\ \backslash B \end{matrix}$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	2

$\begin{matrix} A \\ \backslash B \end{matrix}$	0	1	2
0	0	1	2
1	0	1	2
2	2	2	2

$\begin{matrix} A \\ \backslash B \end{matrix}$	0	1	2
0	0	1	2
1	0	1	2
2	2	2	1

{0,1,2},其中0表示假,1表示真,2解释为可能真,其真值表如左下所示。

三、三元不确定性度量

为了反映人们对命题取任一真值的信任或信任的变化,我们把不确定性用真值集上的一个分布来表示。具体地,定义在观察S下断言E的不确定性度量:

$$um(E, S) = (um(0)(E, S), um(1)(E, S), um(2)(E, S)) \quad (1)$$

满足条件:

$$um(0)(E, S) + um(1)(E, S) + um(2)(E, S) = 1 \quad (2)$$

这个定义的语义是:观察S之下E为假、为真和可能的信任度分别为 $um(0)(E, S)$, $um(1)(E, S)$, $um(2)(E, S)$ 。

我们定义规则 $E \rightarrow H$ 的强度:

$$RS(H, E) = (RS(0)(H, E), RS(1)(H, E), RS(2)(H, E)) \quad (3)$$

满足条件:

$$RS(0)(H, E) + RS(1)(H, E) + RS(2)(H, E) = 1 \quad (4)$$

这个定义的语义是: $E \rightarrow H$ 为假、为真和可能的信任度分别为 $RS(0)(H, E)$, $RS(1)(H, E)$ 和 $RS(2)(H, E)$ 。

四、三元不确定性度量的传播

本节讨论三元不确定性度量值沿推理网络传播的组合运算,将两个分布组合成一个分布的基本思

想是源于 D-S 证据理论^[1]的组合规则。

4.1 布尔组合

已知 $um(E_1, S)$ 和 $um(E_2, S)$, 如何求 $um(E_1 \wedge E_2, S)$ 呢? 由 $um(E_1, S)$ 和 $um(E_2, S)$ 每个元的解释可知, 求 $um(E_1 \wedge E_2, S)$ 时, 用 Lukasiewicz 三值逻辑的连结词 $\wedge$ 的真值表来表示这些元组间的相互作用是合理的。因此, 可定义“与”组合:

$$\begin{aligned} & um(E_1 \wedge E_2, S) \\ = & \left(\sum_{x_1 \wedge x_2 = 0} um(x_1)(E_1, S) * um(x_2)(E_2, S), \right. \\ & \quad um(1)(E_1, S) * um(1)(E_2, S), \\ & \quad \left. \sum_{x_1 \wedge x_2 = 2} um(x_1)(E_1, S) * um(x_2)(E_2, S) \right) \quad (5) \end{aligned}$$

这里 $um(i)(E_1, S)$ 表示分布 $um(E_1, S)$ 在 i 上值。(以后除特别说明外, 总这样)。

对“或”组合, 同理可定义:

$$\begin{aligned} & um(E_1 \vee E_2, S) \\ = & (um(0)(E_1, S) * um(0)(E_2, S) \\ & \quad \sum_{x_1 \vee x_2 = 1} um(x_1)(E_1, S) * um(x_2)(E_2, S), \\ & \quad \sum_{x_1 \vee x_2 = 2} um(x_1)(E_1, S) * um(x_2)(E_2, S)) \quad (6) \end{aligned}$$

对于“非”组合, 类似可定义:

$$\begin{aligned} & um(\sim E, S) = (um(1)(E, S), um(0)(E, S), \\ & \quad um(2)(E, S)) \quad (7) \end{aligned}$$

显然

$$\begin{aligned} & um(\sim \sim E, S) = (um(\sim 0)(E, S), um(\sim 1)(E, S), \\ & \quad um(\sim 2)(E, S)) \quad (8) \end{aligned}$$

4.2 顺序组合

现在来讨论顺序组合, 即对于规则 $E \rightarrow H$, 已知 $um(E, S)$ 和 $RS(H, E)$, 如何来求 $um(H, S)$? 从 Lukasiewicz 三值逻辑的连结词 $\rightarrow$ 的真值表可得运算 $\circ$, 如下:

$\begin{matrix} B & A \rightarrow B \\ A \end{matrix}$		0	1	2
		0	0, 1, 2	2
0	0	ω	0, 1, 2	2
1	0	0	1	2
2	0	ω	ω	2

这里 ω 表示无定义, 显然用该表来处理各元组间的相互作用是合理的, 因此可定义顺序组合:

$$\begin{aligned} & um(H, S) = ((um(0)(E, S)RS(1)(H, E) + um(1) \\ & \quad (E, S)RS(0)(H, E)) / K_1, \\ & \quad (um(0)(E, S)RS(1)(H, E) + um(1) \\ & \quad (E, S)RS(1)(H, E)) / K_1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (um(0)(E, S)RS(1)(H, E) + RS(2) \\ & \quad (H, E)) + (um(1)(E, S) + um(2)(E, \\ & \quad S))RS(2)(H, E)) / K_1 \quad (9) \end{aligned}$$

这里

$$K_i = \sum_{x_1, x_2 \in \{0, 1, 2\}} um(x_1)(E, S)RS(x_2)(H|E) \quad (10)$$

显然这里是用 K_i 来作归一因子, 因为运算 $\circ$ 的表中有未定义元。

4.3 平行组合

最后, 我们来讨论平行组合, 即已知分别从 $E_1 \rightarrow H, \dots, E_n \rightarrow H$ 求得 $um(H, S_1), \dots, um(H, S_n)$, 如何求 $um(H, S_1 \wedge \dots \wedge S_n)$?

我们先讨论从 $E_1 \rightarrow H, E_2 \rightarrow H$ 推得的 $um(H, S_1), um(H, S_2)$, 如何求 $um(H, S_1 \wedge S_2)$? 从两条路径推得同一假设 H , 这好似得到两个等价命题。因此, 用 Lukasiewicz 三值逻辑的连结词 $\leftrightarrow$ 的真值表来处理 $um(H, S_1)$ 和 $um(H, S_2)$ 各元间的相互联系是合理的, 于是可定义平行组合:

$$\begin{aligned} & um(H, S_1 \wedge S_2) \\ = & (um(0)(H, S_1) * um(1)(H, S_2) + um(1)(H, S_1) \\ & \quad * um(0)(H, S_2), \\ & \quad \sum_{i \in \{0, 1, 2\}} um(i)(H, S_1) * um(i)(H, S_2), \\ & \quad \sum_{i=2, j=0} um(i)(H, S_1) * um(j)(H, S_2)) \quad (11) \end{aligned}$$

我们记此公式给出的运算为 $++$, 于是该公式又可记做:

$$um(H, S_1 \wedge S_2) = ++(um(H, S_1), um(H, S_2))$$

至于从多条路径推出同一假设 H 的情形, 可以用 $++$ 两个两个地逐步“累加”, 即

$$\begin{aligned} & um(H, S_1 \wedge \dots \wedge S_{n+1}) \\ = & ++(um(H, S_1 \wedge \dots \wedge S_n), um(H, S_{n+1})) \quad (12) \end{aligned}$$

五、一些性质

本节讨论一下前面两节所建立模型的一些简单性质, 关于这些性质的证明都是直接的, 为了节省篇幅, 我们均将其省略。

为了方便, 我们仍记 (5), (6), (7) 所给出的运算为 $\wedge, \vee, \sim$; 记 (9) 所给出的运算为 $*$; 为 $\bar{x}, \bar{y}$ 记 $\{0, 1, 2\}$ 上的不确定性分布。又设

$$\bar{0} = (1, 0, 0), \bar{1} = (0, 1, 0), \bar{2} = (0, 0, 1)$$

如果命题的不确定性度量取 $\bar{0}$, 则该命题绝对假; 如果取 $\bar{1}$, 则绝对真; 如果取 $\bar{2}$, 则真假两可。

$$\text{性质 1 } \bar{0} \wedge \bar{x} = \bar{0}$$

性质 2 $\bar{1} \wedge \bar{x} = \bar{x}$

性质 3 $\bar{x} \wedge \bar{y} = \bar{y} \wedge \bar{x}$

性质 4 $\bar{2} \wedge \bar{2} = \bar{2}$

显然这些性质与我们的直觉是一致的,这说明了关于运算 $\wedge$ 的定义具有良好的直观性。

性质 5 $\bar{0} \vee \bar{x} = \bar{x}$

性质 6 $\bar{1} \vee \bar{x} = \bar{1}$

性质 7 $\bar{x} \vee \bar{y} = \bar{y} \vee \bar{x}$

性质 8 $\bar{2} \vee \bar{2} = \bar{2}$

显然这些性质与我们的直觉也是一致的,这说明了关于运算 $\vee$ 的定义也具有有良好的直观性。

性质 9 $\sim \sim \text{um}(E, S) = \text{um}(E, S)$

性质 10 $\sim \bar{0} = 1$

性质 11 $\sim \bar{1} = \bar{0}$

性质 12 $\sim \bar{2} = \bar{2}$

运算 $\sim$ 也具有有良好的直观性。

性质 13 $* * (\bar{1}, \bar{x}) = \bar{x}$

这条性质说明,对于规则 $E \rightarrow H$,若已知的证据 E 是完全肯定的,则所推算出的假设 H 的不确定性度量等于规则强度,这与我们的直觉是一致的。

性质 14 $* * (\bar{x}, \bar{2}) = \bar{2}$

这条性质说明,对于规则 $E \rightarrow H$,若其规则强度取值 $\bar{2}$,也就是相当于说证据 E 与假设 H 无关,则不论证据的不确定性度量取何值,所推算出来的假设 H 的不确定性度量总取 $\bar{2}$,这相当于说这条规则不起作用,这与我们的直觉一致。

性质 15 $++(\bar{x}, \bar{y}) = ++(\bar{y}, \bar{x})$

性质 16 $++(\bar{x}, \bar{1}) = \bar{x}$

上面这条性质说明,与 MYCIN 的确定性因子模型^[4]不同,我们的模型采取的是保守的综合信息的策略。以综合投票结果为例,对于 MYCIN 的模型有 $++(x, 1) = 1$,好像是权威说了算;而我们的模型,则好像是“联合国常任理事国否决法”,不论有多少票完全肯定,只要有一票即可否定。下面这条性质更能说明这一点:

性质 17 $++(\bar{0}, \bar{x}) = \sim \bar{x}$

六、结论

本文基于 Lukasiewicz 三值逻辑,建立了一种三元相关不确定推理模型,并讨论了该模型的一些基本性质,说明了它具有有良好的直观性。这个三元相关不确定推理模型,与以往的不确定推理模型有如下

三点不同:

1) 不确定性度量是多值逻辑真值集上的一个分布;而以往的模型中度量的是命题为真的不确定性,不是一个分布。

2) 平行组合采用的是保守策略,而以往的模型采用的往往是一种乐观策略。

3) 不确定性度量值的传播是与多值逻辑的运算紧密相关的,而以往的则不然。

此外,显然本文建立三元相关不确定推理的方法可一般化,用于建立基于 n 值逻辑的 n 元相关不确定推理模型。

参考文献

- [1] Łukasiewicz, J., Philosophische Bemerkungen Zumehrwertigen Systemen des Aussagenkalküls, Comptes rendu des la Société des Sciences et des Letter de Varsovie, Classes I, 23, 51-77, 1930
- [2] Bochvar, D., On Three-valued Logical Calculus and its Application to the Analysis of Contradiction, Matematicheskij Sbornik 4, 353-369, 1939
- [3] Kleene, S., Introduction to Matemathematics, Van Nestrand, 1952
- [4] Shafer, G. A., A Mathematical Theory of Evidence, Priceton, Priceton University Press, 1976
- [5] Shorttiffe, E. H. et al., A Model of Inexact Reasoning in Medicine, Mathematical Biosciences, 23, 351~379, 1975
- [6] 蔡经球, 罗旭东, 一种新的基于广义规则的加权不精确推理模型, 厦门大学学报(自然科学版), 1991, 5
- [7] Luo Xudong, A Study of Probability-Based Uncertain Reasoning Models in Rule-Based Expert Systems: Prospector-Type Schemes, Pro. of IFIP TC12/WG 12.3 International Workshop on Automated Reasoning, North-Holland, 1992, 7
- [8] 罗旭东, 彭旭东, 扩展 MYCIN 可信度模型及其二阶模型, 北京轻工业学院学报, 1994, 1
- [9] Qiu Yuhui, Luo Xudong, A Nonmonotonic Linguistic Certainty Factor Model, J. of Southwest China Normal University (Natural Science), Vol. 19 No. 4, 1994, 361-370