神经网络 稳定性分析 网络平衡点

(17)

79-81

计算机科学 1995Vol.22 №.2

非对称互联神经网络平衡点的稳定性分析*(Ⅱ)

但 琦
(后勤工程学院 重庆630043)

章 频
(上海科技大学计算机系)

TP18

摘 要 It is important to judge the stability of equilibrium point for the neural network as a large-scale dynamical system. In this paper, the stability of the equilibrium point for nonsymmetrical interconnected neural network is investigated.

关键词 Artificial neural network, Stability.

在人工神经网络的应用方面,无论是联想记忆,还是神经优化算法,都毫不例外地利用了网络系统的稳定吸引子的性质.因此,就支持神经网络应用的基础理论而言,研究其动力学行为,尤其是稳定性的判定问题,是十分有意义的。在文[3]中,我们研究了输入输出特性函数连续可微时非对称互联神经网络平衡点的稳定性。本文将讨论输入输出特性函数分段连续可微时,网络平衡点的稳定性。

一、Hopfield 神经网络

Hopfield 神经网络模型的基本组成单元,如图1所示,其神经网络如图2所示。文[3]给出了其动态特性的微分方程描述:

$$C_i\dot{u}_i=\sum_{j=1}^{N}T_{ij}v_j-\frac{1}{r_i}\cdot u_i+I_i(t)\quad i=1\cdots N \tag{1}$$

当 $C_i\neq0$时,有:

$$\dot{u}_i=-b_iu_i+\sum_{j=1}^{N}A_{ij}g_j(u_j)+U_i(t)\quad i=1\cdots N \tag{2}$$

当 $U_i(t)=0$,有:

$$\dot{x}=-b_ix_i+\sum_{j=1}^{N}A_{ij}G_j(x_j)\quad i=1\cdots N \tag{3}$$

以上(1)~(3)式中各参数说明见文[3],其物理意义见文[1]。

在实际系统中,(3)式中的 $G_j(x_j)$ 并不总是连续可微,而是下述情况下分段连续可微的:

令 $b_i>0$, $A_{ij}\in R$,且非对称、有界。(i) $x_j\leqslant0$时, $G_j(x_j)=0$; (ii) $x_j>0$时, $G_j(x_j)\in(0,1)$, $G'_j(x_j)\geqslant0$; $G_j(x_j)$是 Sigmoid 函数的上半部分。

*)本文是参考文献[3]的续篇。

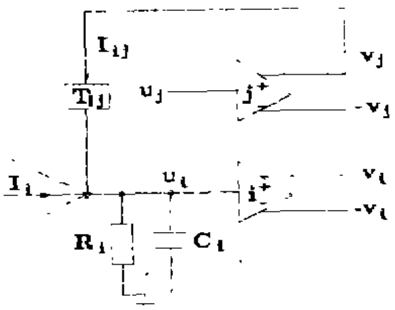

图1 Hopfield 神经元

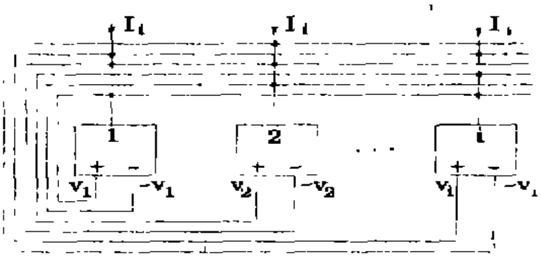

图2 Hopfield 神经网络

二、平衡点的稳定性

文[3]中给出了(3)式的向量方程:

$$\dot{x}=-BX+AG(X)=f(X) \tag{4}$$

其中: $X\in R^N$; f 是 $B(r)\to R^N$ 的分段可微函数; $B(r)=\{X\in R^N, \|X\|<r\}$.

定义1 假定对某 $r>0$, $v(x,t)$在 $B(r)\times J$ 上有

定义，且是连续函数，$v(0,t)=0$，v 对 t 沿方程式(4)的解求全导数：

$$Dv_{(4)}(x,t)=\nabla v(x,t)^T f(x)+\partial v(x,t)/\partial t$$

为作进一步的平衡点稳定性分析，将引用文[2]中的三个定理。

定理1 若存在具有负半定导数 $Dv_{(4)}(x,t)$ 的正定函数 v，则式(4)的平衡点 $x=0$ 是稳定的。

定理2 若存在正定函数 v，其导数 $Dv_{(4)}(x,t)$ 为负定的，则式(4)的平衡点 $x=0$ 是渐近稳定的。若 $v(x,t)$ 与 $Dv_{(4)}(x,t)$ 同量级，则 $x=0$ 是指数稳定的。

定理3 若存在正定函数 v(或负定函数 v)，且其导数 $Dv_{(4)}(x,t)$ 也是正定的(或也是负定的)，则式(4)的平衡点 $x=0$ 是完全不稳定的。

1. 孤立子系统的稳定性

式(3)由 N 个自由子系统(神经元)互联而成，每个自由子系统为：

$$\dot{x}_i=-b_i x_i+A_{ii}G_i(x_i) \tag{5}$$

互联因式：

$$y_i(x_1,x_2,\cdots,x_N)\triangleq\sum_{j=1}^{N}A_{ij}G_j(x_j) \tag{6}$$

构成式(3)的互联结构。

于是，式(3)的稳定性就转化为对子系统式(5)的稳定性分析和对式(6)互联结构的分析，这便于对高维复杂系统进行研究。

下面讨论无互联耦合的单一神经元式(5)的平衡点 $x_i=0$ 的稳定特性。(注意 $b_i>0$，$G_i(x_i)$ 是分段可微的。)

设 $F_i(x_i)=-b_i x_i+A_{ii}G_i(x_i)$

定理4 若式(5)对 $x_i\in B(r_i)=\{x_i:-r_i<x_i<r_i\}$，$r_i>0$ 满足：

(1) $F_i(x_i)\begin{cases}<0 & 当\ x_i>0\\ =0 & 当\ x_i=0\\ >0 & 当\ x_i<0\end{cases}$

则式(5)的平衡点 $x_i=0$ 是渐近稳定的。

(2) 条件(1)成立，且

$$\delta_{i1}=\inf_{x_i\in B(r_i)}\frac{G_i(x_i)}{x_i}>-\infty \tag{7}$$

$$\delta_{i2}=\sup_{x_i\in B(r_i)}\frac{G_i(x_i)}{x_i}<+\infty \tag{8}$$

(其中：inf 表下确界，sup 表上确界)

则式(5)的平衡点 $x_i=0$ 是指数稳定的。

(3) $F_i(x_i)\begin{cases}<0 & 当\ x_i>0\\ =0 & 当\ x_i=0\\ <0 & 当\ x_i<0\end{cases}$

则式(5)的平衡点 $x_i=0$ 不稳定。

(4) $F_i(x_i)\begin{cases}>0 & 当\ x_i>0\\ =0 & 当\ x_i=0\\ <0 & 当\ x_i<0\end{cases}$

则式(5)的平衡点 $x_i=0$ 完全不稳定。

证明：(提示)取 $v_i(x_i)=\frac{1}{2}x_i^2$ (9)

为式(5)的 Laypunov 函数，显然 $v_i(x_i)$ 为正定的，沿式(5)求 v_i 的导数，然后利用定理1～3即可得证。 □

讨论

a. 在情况(2)中，条件与文[1]中不同，取消了 $\delta_{i1}>0$ 及 $-b_i+A_{ii}\delta_i<0$，因后者与情况(1)中条件重复。

b. 在情况(2)中，式(7)，式(8)缺一不可，如在 $A_{ii}>0$ 时，若 $\delta_{i2}=+\infty$，则情况(1)中条件不可能成立，若 $\delta_{i1}=-\infty$，则式(10)中 $D_{i(5)}(x_i)$ 在 $x_i\to 0$ 时，就不是二阶无穷小量，则 $x_i=0$ 就不是指数稳定的。

c. 如果采用这种神经元模型，$A_{ii}>0$，则式(7)，式(8)成立，式(5)一旦是渐近稳定的，就是指数稳定的。

在 $x_i=0$ 时，稳定的吸引域 D_i，如图3所示；在 $x_i=0$ 时，不稳定的吸引域 D_i，如图4所示。

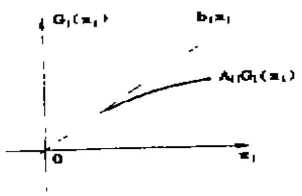

图3 $D_i=(-\infty,+\infty)$

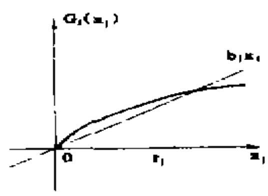

图4 $D_i=(0,r_i)$

2. 互联神经网络稳定性分析

对式(3)可证明存在如下定理：

定理5 如果以下条件成立：

a)互联强度 $\sum_{j=1}^{N}A_{ij}G_j(x_j)$，对所有 $|x_i|<r_i$，$|x_j|<r_j$，满足估计：

$$x_i\sum_{j=1}^{N}A_{ij}G_j(x_j)\leqslant|x_i|\sum_{j=1}^{N}a_{ij}|x_j|,\ i=1,\cdots,N \tag{10}$$

其中 a_{ij} 为常数；

b)对孤立子系统式(5)中的 b_i 和上式给定的 a_{ij}，存在 n 维常向量 $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_N)^T>0$，(即 $\alpha_i>0$)，使检验矩阵 $S=[S_{ij}]$ 是负定的，其中：

$$S_{ij}=\begin{cases}\alpha_i(-b_i+a_{ii}) & i=j\\ (\alpha_i a_{ij}+\alpha_j a_{ji})/2 & i\neq j\end{cases}$$

那么式(3)的平衡点是指数稳定的。

证明:(提示)取 $v(x)=\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}\alpha_i x_i^2$ (11)

为式(3)的 Laypunov 函数,显然 v(x)是正定的,因 $\alpha_i>0$。沿(3)式的解求 v 的导数,再利用定理2,即可得证。 □

注意:i)在文[1]中,要求 $G_i(x_i)$连续可微,事实上,只需 $G_i(x_i)$分段可微即可,可以降低约束条件。利用类似的方法,在 $G_i(x_i)$为连续函数的条件下得到平衡点是稳定的所应满足的条件。ii)对于定理5的条件 b),只需验证对称矩阵 S 的最大特征值是负的即可,这可以利用文[4]求对称矩阵的最大特征值的估算式。

3. 不稳定结果

定理6 设 $N_1\neq\varnothing$(非空),$N_1\subset N_0$,$N_0\triangleq\{1,2,\cdots,N\}$,$B_i(r_i)$为 $x_i=0$的某邻域,如果以下条件成立,

a)存在常数 $a_{ij}\in R(-\infty,+\infty)$,使对所有 $x_i\in B_i(r_i)$,$x_j\in B_j(r_j)$,$i,j\in N$,均有,

$$-x_i\sum_{j=1}^{N}A_{ij}G_j(x_j)\leqslant|x_i|\sum_{j=1}^{N}a_{ij}|x_j|\quad i\in N_1$$

$$x_i\sum_{j=1}^{N}A_{ij}G_j(x_j)\leqslant|x_i|\sum_{j=1}^{N}a_{ij}|x_j|\quad i\in N_0-N_1$$

b)存在 n 维向量 $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_N)^T>0$,使检验矩阵 $S=[S_{ij}]$为负定的,其中:

$$S_{ij}=\begin{cases}\alpha_i(b_i+a_{ii}) & i=j\in N_1\\ \alpha_i(-b_i+a_{ii}) & i=j\in N_0-N_1\\ (\alpha_i a_{ij}+\alpha_j a_{ji})/2 & i\neq j\end{cases}$$

那么:

(i)(3)式的平衡点(x=0)不稳定,当 $N_1\neq N_2$ 时;

(ii)(3)式的平衡点(x=0)完全不稳定,当 $N_1=N_0$时。

证明:(提示)令 $v(x)=\sum_{i\in N_0-N_1}\frac{1}{2}\alpha_i x_i^2-\sum_{i\in N_1}\frac{1}{2}\alpha_i x_i^2$,沿(3)式的解,求 v(x)的导数,并利用以上条件 a)化简,然后利用定理3,即可得证。 □

参考文献

[1]A. N. Michel et al., Qualitative analysis of neural network, IEEE Trans. CAS, vol. 36, №. 2, p229—p243, 1989

[2]A. N. Michel 等著,郑应平译,大规模动态系统定性分析,辽宁科学出版社,1985

[3]但琦、童颖,非对称互联神经网络平衡点稳定性分析,计算机科学 Vol. 20, №. 1, 1993

[4]但琦等,Hermite 矩阵最大(α)特征值的估算,后勤工程学院,№. 1, 1992

(上接第78页)

同时,我们也正在进一步探索新的应用领域,如用于自动专家技术故障诊断等领域。

主要参考文献

[1]Cohen P. R. and Feigenbaum E. A (eds.), The Handbook of Artificial Intelligence, Vol. Ⅱ, William Kaufmann, 1982

[2]McDermott, J., R1: A Rule-Based Configurer of Computer Systems, Artificial Intelligence, №. 19, 1982

[3]Stefik, M. et al., The Organization of Expert Systems, A Tutorial Artificial Intelligence Vol. 18, №. 2, 1982

[4]Weiner J. L., BLAH: A System which Explains Its Reasoning, Artificial Intelligence, №. 15, 1980