反合一 合一 计算机科学

计算机科学1998Vol. 25№. 6

28-31

反合一研究初步*)

Disunification: An Elementary Study

TP3

潘光睿 周荣国 宋晓梁 刘东升 许满武

（南京大学计算机系 软件新技术国家重点实验室 南京210093）

摘 要 In this paper we will discuss disunification based on first-order terms and the algorithm for computing a complete set of disunifiers。

关键词 Disunification, Disunifier, Most general disunifier, Complete set of disunifiers

1、 引言

合一是一类重要的计算问题，它广泛地应用于计算机科学的各个分支领域。随着研究领域的拓宽，合一问题的种类也逐渐丰富起来，其中比较典型的包括：方程式合一，高阶合一以及半合一。总的说来，在研究这些合一时主要关心的是"相等"的问题。后来，人们在研究函数式语言的模式匹配时，需要讨论一些从反例中学习的问题；在研究重写系统时，讨论有关充分完备性的问题，等等。这些都牵涉到了"不等"。于是人们又把一部分目光由"相等"转向了"不等"，这就导致了"反合一问题"的研究。

简单说来，对于合一问题（s＝t），我们关心的是求合一子 θ，使得 θs＝θt；而对于反合一问题（s≠t）我们关心的是那些使不等式成立的替换 σ，使得 σs≠σt。

为讨论方便，我们先做一些约定：

在本文中所用到的项是一阶项，合一中的等价关系是字面等价关系，"≠"是指字面不等价关系。

Var(□)表示由□中所有变量组成的集合，其中□可以是项，可以是替换，可以是 G_θ 和 Z(s,t)（这两个函数由后文给出）。

σ 和 θ 的复合运算记为 σ∘θ，对任意 t∈T，σ∘θ(t)＝θ(σ(t))。

有关的其他概念请参考[1][2][4]。

2. 基本概念

定义2.1 （反合一问题，反合一子） 任给项对（s，t），问是否存在替换 σ，使得 σs≠σt 且对任意的替换 δ，总有 σ∘δ(s)≠σ∘δ(t)，这就是反合一问题，记为（s≠t）；若存在这样的 σ，则 σ 称为反合一子。

定义2.2 （最一般反合一子，最一般反合一子的集合，反合一子的完备集，最一般反合一子的完备集）

·对于一个给定的反合一问题（s≠t），其所有反合一子构成的集合记为 DU（s，t），在不引起混淆的情况下简记为 DU。

·MGDU（s，t）（简记为 MGDU）表示（s≠t）的最一般反合一子：

若 σ∈DU，则 σ 是 MGDU 当且仅当对于任意 θ∈DU，若 θ≤σ，（即：∃ ρ. ρθ＝σ），则 σ＝θ。

·cDU 称为（s≠t）的反合一子完备集：

1 cDU⊆DU；

2 对任意 θ∈DU，存在 σ∈cDU 使 σ≤θ。

·μDU 表示最一般反合一子的集合：

由最一般反合一子构成的集合。

·μcDU 表示最一般反合一子的完备集：

既是 cDU 又是 μDU 的集合。

3. 相关定理

为了便于后面的讨论，我们在此做一些必要的准备工作。

首先，我们引入一个与某替换对应的函数 G_θ，G_θ"独立于"项集 T。众所周知，项集 T 是定义在一组给定元数的函数集 F 和一个可数变量集 V 之上的。说 G_θ"独立于"项集 T 是指 G_θ∉F。

*）本文得到国家高新技术研究发展863计划及国家自然科学基金资助。

G_θ 与 θ 有如下关系：

$s,t\in T$，$Var(s)\cup Var(t)=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$。

当 θ 为恒等替换(Id)时，θ 对应着 $G_{Id}(x_1,x_2,\cdots,x_n)$。

当 θ 形如 $\{t_1/y_1,\cdots,t_m/y_m\}$ 时，θ 对应着：$G_\theta=\theta G_{Id}=G_{Id}(\theta(x_1),\theta(x_2),\cdots,\theta(x_n))=G_\theta(s_1,s_2,\cdots,s_n)$，其中 $s_i=\theta(x_i)$。

为了方便可将 $G_\theta(s_1,s_2,\cdots,s_n)$，简记为 G_θ。

当已有 θ 及其所对应的 $G_\theta(s_1,s_2,\cdots,s_n)$，在做复合运算 $\theta\cdot\rho=\sigma$ 时，σ 对应着

$$\begin{aligned}G_\sigma=G_{\theta\cdot\rho}&=\rho G_\theta\\&=G_\theta(\rho(s_1),\rho(s_2),\cdots,\rho(s_n))\\&=G_\sigma(r_1,r_2,\cdots,r_n)\text{，其中 } r_i=\rho(s_i)\text{。}\end{aligned}$$

此外，$G_\theta(s_1,s_2,\cdots,s_n)=G_\sigma(r_1,r_2,\cdots,r_m)$ 当且仅当 $m=n$ 且 $r_i=s_i$。

其次，我们引入另一个与 s，t 有关的，独立于项集 T 的二元函数 $Z(s,t)$，Z 的两个变目的位置分别放入 s 和 t，并且对任意替换 ρ 有：$\rho(Z(s,t))=Z(\rho(s),\rho(t))$。

此外，$Z(s_1,t_1)=Z(s_2,t_2)$ 当且仅当 $s_1=s_2$ 且 $t_1=t_2$。

注意，尽管我们引入了 G，Z 两个函数，但由于它们独立于 T，所以在下文中 G，Z 不会象 T 里的那些函数那样出现在替换里。

到此，我们的准备工作就完成了。

定理3.1 已知项对(s,t)，θ 为(s,t)的合一子，σ 为(s,t)的反合一子，必有：

$\forall\rho_1\rho_2(\theta\circ\rho_1(Z(s,t))\neq\sigma\circ\rho_2(Z(s,t)))$。

证明：反证法。

假设存在 δ_1，δ_2 使得

$$\theta\circ\delta_1(Z(s,t))=\sigma\circ\delta_2(Z(s,t)) \qquad 1)$$

$$1)\Rightarrow Z(\theta\circ\delta_2(s),\theta\circ\delta_2(t))=Z(\sigma\circ\delta_2(s),\sigma\circ\delta_2(t))$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\theta\circ\delta_1(s)=\sigma\circ\delta_2(s)\\\theta\circ\delta_1(t)=\sigma\circ\delta_2(t)\end{cases} \qquad 2)$$

由于 θ 为(s,t)的合一子，故

$$\theta\circ\delta_1(s)=\theta\circ\delta_1(t) \qquad 3)$$

由2)，3)得：$\sigma\circ\delta_2(s)=\sigma\circ\delta_2(t)$ 4)

4)与 σ 为(s,t)的反合一子矛盾。

反证完成。 □

推论3.2 已知项对(s,t)，θ 为(s,t)的最一般合一子(MGU)，则 σ 为(s,t)的反合一子，当且仅当 $\forall\rho_1\rho_2(\theta\circ\rho_1(Z(s,t))\neq\sigma\circ\rho_2(Z(s,t)))$。

证明：先证⇒，这由定理3.1可以得到。

再证⇐，用反证法。

假设 σ 不是(s,t)的反合一子，则必存在 δ，使得 $\sigma\circ\delta(s)=\sigma\circ\delta(t)$，即 $\sigma\circ\delta$ 是合一子。

由于 θ 为 MGU，所以存在 τ，使得 $\theta\circ\tau=\sigma\circ\delta$，

即 $\theta\circ\tau(Z(s,t))=\sigma\circ\delta(Z(s,t))$，

这与 $\forall\rho_1\rho_2(\theta\circ\rho_1(Z(s,t))\neq\sigma\circ\rho_2(Z(s,t)))$ 矛盾，故 σ 为(s,t)的反合一子。 □

顺便提一下，在推论3.2的条件中 θ 必须为 MGU，这要比定理3.1的条件严格一些，否则，推论3.2不成立。例如：有项对(s,t)，其中 s=x，t=y，还有(s,t)的一个合一子 $\theta=\{g(a)/x,g(a)/y\}$ 以及替换 $\sigma=\{h(a)/x,h(a)/y\}$，尽管 $\forall\rho_1\rho_2(\theta\circ\rho_1(Z(s,t))\neq\sigma\circ\rho_2(Z(s,t)))$，但 σ 不是反合一子，它也是合一子。

定理3.3 已知项对(s,t)及其上的两个替换 θ 和 σ，对于任意替换 ρ_1，ρ_2，$\theta\circ\rho_1(Z(s,t))\neq\sigma\circ\rho_2(Z(s,t))$ 当且仅当 $\rho_1G_\theta\neq\rho_2G_\sigma$。

证明：先证⇒，令 $\theta\circ\rho_1=\tau_1$，$\sigma\circ\rho_2=\tau_2$，由已知 $\theta\circ\rho_1(Z(s,t))\neq\sigma\circ\rho_2(Z(s,t))$ 可得：

必存在某个 $x_i\in Var(s)\cup Var(t)$，

$$\tau_1(x_i)\neq\tau_2(x_i) \qquad 1)$$

由1)可得：

$G_{Id}(\tau_1(x_1),\cdots,\tau_1(x_i),\cdots,\tau_1(x_n))\neq G_{Id}(\tau_2(x_1),\cdots,\tau_2(x_i),\cdots,\tau_2(x_n))$

即 $G_{\tau_1}\neq G_{\tau_2}$，即 $G_{\theta\cdot\rho_1}\neq G_{\sigma\cdot\rho_2}$，即 $\rho_1G_\theta\neq\rho_2G_\sigma$。

再证⇐，由已知 $\rho_1G_\theta\neq\rho_2G_\sigma$ 可得：

$G_{Id}(\theta\circ\rho_1(x_1),\cdots,\theta\circ\rho_1(x_n))\neq G_{Id}(\sigma\circ\rho_2(x_1),\cdots,\sigma\circ\rho_2(x_n))$

$\Rightarrow$ 存在某个 x_i，$\theta\circ\rho_1(x_i)\neq\sigma\circ\rho_2(x_i)$

$\Rightarrow\theta\circ\rho_1(s)\neq\sigma\circ\rho_2(s)$ 或 $\theta\circ\rho_1(t)\neq\sigma\circ\rho_2(t)$

$\Rightarrow\theta\circ\rho_1(Z(s,t))\neq\sigma\circ\rho_2(Z(s,t))$。 □

定理3.4 已知项对(s,t)及其上的两个替换 θ 和 σ，$\forall\rho_1\rho_2(\theta\circ\rho_1(Z(s,t))\neq\sigma\circ\rho_2(Z(s,t)))$ 当且仅当 $\forall\rho_1\rho_2(\rho_1G_\theta\neq\rho_2G_\sigma)$。

证明：先证⇒，用反证法。

假设存在 τ_1，τ_2，使得 $\tau_1G_\theta=\tau_2G_\sigma$，

$$\text{即 }\theta\circ\tau_1(G_{Id})=\sigma\circ\tau_2(G_{Id})\text{，} \qquad 1)$$

由1)得：任给 $x_i\in Var(s)\cup Var(t)$，

$$\theta\circ\tau_1(x_i)=\sigma\circ\tau_2(x_i)\text{，} \qquad 2)$$

$$\text{由2)可得：}\theta\circ\tau_1(s)=\sigma\circ\tau_2(s) \qquad 3)$$

$$\text{和}\quad\theta\circ\tau_1(t)=\sigma\circ\tau_2(t)\text{。} \qquad 4)$$

由3)和4)得：

$\theta\circ\tau_1(Z(s,t))=\sigma\circ\tau_2(Z(s,t))$，

这与 $\forall\rho_1\rho_2(\theta\circ\rho_1(Z(s,t))\neq\sigma\circ\rho_2(Z(s,t)))$ 矛盾。

再证⇐，用反证法，

假设存在 τ_1、τ_2，使得 $\theta\circ\tau_1(Z(s,t))=\sigma\circ\tau_2(Z(s,t))$

则任给 $x_i\in Var(s)\cup Var(t)$，有

$\theta\circ\tau_1(x_i)=\sigma\circ\tau_2(x_i)$ 5)

由5)得：

$\theta\circ\tau_1(G_{Id})=\sigma\circ\tau_2(G_{Id})$，

即 $\tau_1G_\theta=\tau_2G_\sigma$，

这与$\forall\rho_1\rho_2(\rho_1G_\theta\neq\rho_2G_\sigma)$矛盾。

综上所述，命题成立。 □

定理3.5 已知项对$\langle s,t\rangle$及其上的两个替换θ和σ，若$Var(G_\theta)\cap Var(G_\sigma)=\varnothing$，则$\forall\rho(\rho G_\theta\neq\rho G_\sigma)$当且仅当$\forall\rho_1\rho_2(\rho_1G_\theta\neq\rho_2G_\sigma)$。

证明：先证⇒，用反证法。

假设存在 τ_1、τ_2使得 $\tau_1G_\theta=\tau_2G_\sigma$，

其中 τ_1形如$\{t_1/x_1,\cdots,t_n/x_n\}$，$\tau_2$形如$\{r_1/y_1,\cdots,r_m/y_m\}$

我们用 τ_1，τ_2构造如下替换：

$\tau'_1=\tau_1-\{t_i/x_i\,|\,x_i\notin Var(G_\theta)\}$，

$\tau'_2=\tau_2-\{r_i/y_i\,|\,y_i\notin Var(G_\sigma)\}$，

$\tau=\tau'_1\cup\tau'_2$。

由于 τ_1中$\{t_i/x_i\,|\,x_i\notin Var(G_\theta)\}$对 G_θ 不会起作用；

同样，τ_2中$\{r_i/y_i\,|\,y_i\notin Var(G_\sigma)\}$对 G_σ 不会起作用，所以

$\tau_1G_\theta=\tau'_1G_\theta,\tau_2G_\sigma=\tau'_2G_\sigma$， 1)

又由于 $Var(G_\theta)\cap Var(G_\sigma)=\varnothing$，

所以，任给 $t_i/x_i\in\tau'_1$，$x_i\notin Var(G_\sigma)$，

同样，任给 $r_i/y_i\in\tau'_2$，$y_i\notin Var(G_\theta)$

所以，$\tau G_\theta=\tau'_1G_\theta,\tau G_\sigma=\tau'_2G_\sigma$ 2)

由1)，2)得：

$\tau G_\theta=\tau'_1G_\theta=\tau_1G_\theta,\tau G_\sigma=\tau'_2G_\sigma=\tau_2G_\theta$， 3)

由3)和反证假设得：

$\tau G_\theta=\tau G_\sigma$，

这与$\forall\rho(\rho G_\theta\neq\rho G_\sigma)$矛盾。

再证⇐，用反证法。

假设存在 ρ 使得 $\rho G_\theta=\rho G_\sigma$

其中 ρ 形如$\{t_1/x_1,\cdots,t_n/x_n\}$

我们构造如下替换：

$\rho_1=\rho-\{t_i/x_i\,|\,x_i\notin Var(G_\theta)\}$，

$\rho_2=\rho-\{t_i/x_i\,|\,x_i\notin Var(G_\sigma)\}$。

由于$\{t_i/x_i\,|\,x_i\notin Var(G_\theta)\}$在替换中对 G_θ 不起作用，故

$\rho_1G_\theta=\rho_1G_\theta$， 4)

同理 $\rho G_\sigma=\rho_2G_\sigma$。 5)

由4)，5)可得

$\rho_1G_\theta=\rho_2G_\sigma$，

这与$\forall\rho_1\rho_2(\rho_1G_\theta\neq\rho_2G_\sigma)$矛盾。

综上所述，本定理成立。 □

定理3.6 已知项对$\langle s,t\rangle$及其最一般合一子θ，函数集 F 中至少含有一个元数大于等于1的函数。若存在 $r/x\in\theta$，$r\in T$ 且 r 中含有不同于 x 的变量（比如说是 y），则$\langle s,t\rangle$必有无穷多个最一般反合一子。

证明：由已知：存在 $f\in F$，$arity(f)=k$，$(k\geq1)$

$r/x\in\theta$，$y\in Var(r)$，

我们构造如下一系列替换：

$$\rho=\left\{f\left(\underbrace{y,\cdots,y}_{k}\right)/y\right\},$$

$\sigma_1=(\theta-\{r/x\})\cup\{s_1/x\}$，其中 $s_1=\rho(r)$

$\sigma_2=(\sigma_1-\{s_1/x\})\cup\{s_2/x\}$， $s_2=\rho(s_1)$

…

$\sigma_{i+1}=(\sigma_i-\{s_i/x\})\cup\{s_{i+1}/x\}$，$s_{i+1}=\rho(s_i)$

…

不难验证出诸 σ_i 都是反合一子且诸 σ_i 之间，即 σ_i 与 $\sigma_j(i\neq j)$之间，不存在 $\sigma_i\leq\sigma_j$ 或 $\sigma_j\leq\sigma_i$ 的关系。利用诸 σ_i 之间在 x 处的替换的模式不同，可以构造出不同的最一般反合一子，在此不再赘述。由于 σ_i 的构造过程可无限递推下去，故$\langle s,t\rangle$的最一般反合一子有无穷多个。 □

推论3.7 已知项对$\langle s,t\rangle$，函数集 F 中不含零元函数，但至少含有一个元数大于等于1的函数。若$\langle s,t\rangle$仅有唯一的最一般反合一子 σ，则 σ 必为恒等替换。

证明：假设 σ 不为恒等替换，则$\langle s,t\rangle$必存在最一般合一子 θ，（因为$\langle s,t\rangle$不存在最一般合一子当且仅当最一般反合一子为恒等替换）。又由于 F 中不含零元函数，故存在 $r/x\in\theta$，r 中含有不同于 x 的变量 y，$y\in Var(s)\cup Var(t)$。由定理3.6可知，$\langle s,t\rangle$必有无穷多个最一般反合一子，这与已知条件中的$\langle s,t\rangle$仅有唯一的最一般反合一子 σ 矛盾，故 σ 只能是恒等替换。 □

顺便提一下，F 中不能含有零元函数，否则定理不成立。如：已知$\langle s,t\rangle$，$s=x$，$t=a$，$F=\{f,a\}$，$arity(f)=1$，$arity(a)=0$，通过观察可知$\langle x,a\rangle$的最一般反合一子唯一，为 $\sigma=\{f(x)/x\}$，而非恒等替换 $\rho=\{x/x\}$。

4. 进一步讨论

下面我们将利用前面的结果来求反合一子的完备集。

由推论3.2可知反合一子 σ 与最一般合一子 θ 的关系，即：

$\forall \rho_1\rho_2(\theta\cdot\rho_1(Z(s,t))\neq\sigma\cdot\rho_2(Z(s,t)))$

其中 θ 是可求的，现在要求的是 σ。可麻烦在于 ρ_1、ρ_2 都是任意的，不等式两边都不确定。如何去求 σ 并保证尽管 ρ_1、ρ_2 随意变动但不等式始终成立是我们面临的问题。

由于在讨论替换间的关系以及构造新替换时，直接拿替换来讨论不如把它先转化为项的形式来讨论方便，所以在前文我们引入了与 θ 对应的函数 G_θ。由定理3.3和定理3.4我们可以把 θ 与 σ 的关系转化成 G_θ 与 G_σ 的关系。这样一来我们希望通过构造 G_σ，使得 $\forall \rho_1\rho_2(\rho_1G_\theta\neq\rho_2G_\sigma)$，也就使得 $\forall \rho_1\rho_2(\theta\cdot\rho_1(Z(s,t))\neq\sigma\cdot\rho_2(Z(s,t)))$，从而得到与 G_σ 对应的 σ，σ 就是反合一子。

下面我们将通过一个小小的转化来摆脱 ρ_1 和 ρ_2 随意变动所带来的麻烦。

考察一下合一子就可以看出，最一般合一子 θ 相当于一个模式，其它的合一子只是在其上继续代入罢了。假如我们能找到另一些完全不同于最一般合一子 θ 模式的替换，则这些替换必为反合一子，这也正是定理3.1和推论3.2的含义。

既然最一般合一子 θ 是一种模式，我们就把它对应的 G_θ 中的所有变量改写成一些完全不同于项集 T 的符号系统 S 的符号。如：S 中含有变量▽、◇，我们可以把 $G_\theta(f(x),y)$ 改写成 $G_\theta'(f(▽),◇)$，而在构造其它替换 σ 所对应的 G_σ 时仍用项集 T 的符号系统。这样一来 $Var(G_\theta')\cap Var(G_\sigma)=\varnothing$。

我们只要使 G_σ 与 G_θ' 不能合一（合一过程是在符号系统 T∪S 下进行的），借助于定理3.5可得 $\forall\rho_1\rho_2(\rho_1G_\theta'\neq\rho_2G_\sigma)$，这样 ρ_1 和 ρ_2 随意变动所带来的问题就解决了。不过到目前为止，构造 G_σ 只找到了排列的方法，即在 G_{id} 的所有位置代入项的所有可能情形，并与 G_θ' 进行合一检测，留下与 G_θ' 不可合一的 G_σ，所有 G_σ 对应的 σ 就构成反合一子的完备集。

结束语 本文是以一阶项和字面合一为基础来讨论反合一问题的，至于以高阶项和方程式合一为基础来探讨反合一还是相当复杂的，有关这类问题我们将在以后的工作中进一步探索。

参 考 文 献

[1] J oRGH Siekmann. Unification Theory. J. Symbolic Computation vol. 7. 1989

[2] John C. Mitchell. Foundations for Programming Languages. The MIT Press Cambridge, Massachusetts, London, England. 1996

[3] Jean H. Galler et al. Complete sets of transformations for general E-unification. Theorem Computer Science. 67. 1989

[4] 许满武，戴劲雯等. 合一问题研究，南京大学计算机学术报告，1995

（上接第57页）

[3] J. de Kleer, Local methods for localizing faults in electronic circuits, MIT Artificial Intelligence Laboratory, 1976

[4] D. Sleeman, et al, Intelligent tutoring systems, Academic Press, 1982

[5] R. Patil, et al, Causal understanding of patient illness in medical diagnosis, IJCAI, 1981

[6] R. Reiter, A theory of first principles, Artificial Intelligence, 32(1)1987

[7] J. de Kleer et al, Diagnosing multiple faults, Artificial Intelligence, 32(1)1987

[8] D. Poole, Normality and faults in logic-based diagnosis, IJCAI, 1989

[9] T. Bylander, The computational complexity of abduction, Artificial Intelligence, 49(1-3), 1991

[10] K. Konolige, abduction versus closure in causal theories, Artificial Intelligence, 1992, 53

[11] O. Dressler, et al, Model-based diagnosis with the default-based diagnostic engine: effective control strategies that works in practice, ECAI, 1994

[12] L. Console, et al, Model-based Diagnoses, Science Publishers, 1994

[13] K. R. Apt, et al, Meta-logic and logic programming, Morgan Kaufmann Publisher, 1995

[14] W. Nejdl, et al, A formal framework for representings diagnosis stratigies in model-based diagnostic system, IJCAI, 1995

[15] F. V. Harmelen, Using domain knowledge to select solution in abductive diagnosis, ECAI, 1994

[16] M. P. Feret, et al, A formal model for experience-aided diagnosis, Computional intelligence, 13(2)1997

[17] J. I. J. Orlando, Future diagnostic technology, Expert System with Application, 1996, 11, 2