维普资讯 http://www.cqvip.com

计算机科学1999Vol 26№ 11

图中含有k-因子的判定算法

An Algorithm for Deciding Whether a Given Graph Contains k-Factor

孟 亚

(五邑大学计算机系 广东江门529020)

摘 要 本文依据文[3]已有的一个理论成果(定理1),给出了判定一个图是否含有k-因子的一个算法,同时对算法的复杂性作了分析,并示出了一些简单情况的结果。

关键词 哈密尔顿图,k-因子,判定算法。

一、引言

设连通无向简单图 $G=(V,E)$,其中 V 和 E 分别是顶点集合和边的集合,且设 $V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$,$|V|=n$,并设 $E=\{e_1,e_2,\cdots,e_m\}$,即 $|E|=m$,以 d_i 记图中顶点 v_i 的度数,令 $\min=\min\{d_i|i=1,2,\cdots,n\}$,$\max=\max\{d_i|i=1,2,\cdots,n\}$。在图 G 中,依次连接其度数之和不小于 t 的不相邻的顶点对,得到一个图,记为 $C_t(G)$,显然有性质:该图中任意两个不相邻的顶点,其度数之和均小于 t,称 $C_t(G)$为 G 的 t-闭包。

设 k 是一个正整数,G 的"k 正则子图"是 G 的一个子图,它的每个顶点的度数都是 k。G 的一个 k-正则支撑子图,称为图 G 的一个 k-因子。

对 G 中不相邻的两顶点 x,y,$G+xy$ 表示由 G 衍生的一个图,即在 G 中增加 xy 这条边所生成的图,显然有 $V(G+xy)=V$,$E(G+xy)=E\cup\{xy\}$。

在图论的研究中,哈密尔顿问题是人们所关注的问题之一。从1859年哈密尔顿问题提出到现在,对哈密尔顿问题的研究已进行了140年,至今未有像判定欧拉图那样简便的结果[1]。近来,对 k-因子的研究逐渐增多。由于1-因子等价于完全匹配问题(完美边无关集);2-因子等价于哈密尔顿问题,即 G 是哈密尔顿图等价于 G 中含有2-因子[2]。因此可看到,对 k-因子的研究其意义已超出了对于哈密尔顿图本身的研究范围。本文依据已有的理论成果,对图中是否含 k-因子给出了一个判定算法,并对该算法的复杂性作了相应的分析,最后示出了一些简单结果。

二、已有理论结果

由文[3]可知有下列结果。

定理1 设 G 是连通的简单图,其阶数为 n,k 是一个正整数,kn 为偶数,且 $\delta(G)\geqslant k$,u,v 是 G 中两个不相邻的顶点,如果

$$d_G(u)+d_G(v)\geqslant\begin{cases}n+2k-3 & k\text{ 是奇数}\\ n+2k-4 & k\text{ 是偶数}\end{cases}$$

则 $G+uv$ 含 k-因子等价于 G 含 k-因子。

设

$$t=\begin{cases}n+2k-3 & k\text{ 是奇数 且 }k\leqslant(n+1)/2\\ n+2k-4 & k\text{ 是偶数 且 }k\leqslant(n+2)/2\end{cases}$$

推论1 G 含 k-因子当且仅当 G 的 t-闭包 $C_t(G)$含 k-因子。

推论2 如果 $C_t(G)$是一个完全图,则 G 必含 k-因子。

以下我们可以利用这一理论结果来判定图中是否含有 k-因子。

三、图中是否含 k-因子的判定算法

1. 数据结构

采用邻接距阵 A 来存储图的全部信息。由于无向图 G 的邻接矩阵是对称矩阵,故可采用下三角压缩存储。由于一方面简单图的邻接矩阵其主对角线上的元素都为零,而另一方面又要开辟空间存放 n 个顶点的度数,为节省空间与编码长度,故将 n 个顶点的度数 d_i 就依次存放在 A 的主对角线上:d_i——>$A[i,i]$,$i=1,2,\cdots,n$,这样所占空间为$(n+1)n/2$。

若要保留图 G 的原始信息,可采用矩阵 A2做为工作矩阵,仍然可用下三角压缩方式存储,主对角线上放度数 d_i。

2. 图中是否含 k-因子的判定算法

以下是我们给出的算法。给定图 G,且设阶数为 n。

输入整型数 n,建立整型二维数组 A[n,n]来表示该图的诸顶点间的关系;

```
min=n; //min 是最小度//
for(i=1;n;i++)
  {for (j=1;n;j++)
```