计算机科学2000Vol. 27№. 5

Dempster 规则的有效性和限制*)

On the Validity and Limits of Dempster's Rule

杨 春 李怀祖
(西安交通大学管理学院 西安710049)

Abstract Dempster's rule(of combination) is the main facility of Dempster-Shafer's theory of evidence, but its validity is controversial all the time. This paper presents a strict derivation for Dempster's rule based on the compatibility view of belief functions. From that the validity and restrictions of the rule are expounded, and the sources of the disputes over the rule are indicated.

Keywords Evidence theory, Belief functions, Dempster's rule

1 引言

Dempster-Shafer 证据理论(以下简称证据理论)是在 A. P. Dempster[1,2]提出的"上、下概率"及其合成规则的基础上由 G. Shafer 在其1976年出版的专著《证据的数学理论》[3]中建立起来的。80年代初,SRI 的 J. Lowrance 等人将证据理论引入人工智能;J Gordon 和 E. Shortliffe 在专家系统的框架中研究了证据推理。此后,证据理论逐渐发展成为一类重要的不确定性推理方法[4]。现在,基于证据理论的不确定性处理方法已是设计专家系统及其它智能系统的标准工具之一。

证据理论的特征是用信度函数表示证据,用 Dempster 规则综合"独立的"证据。这些特征使证据理论在某些问题中比概率方法更便于使用。由于信度函数不满足可加性,因此它比概率函数能更恰当地表示信息中的"不知性"(ignorance)[3,5]。更重要的是,概率论框架无法对不同信息提供的概率进行综合[6],而证据理论具有起类似综合作用的 Dempster 规则。如果把证据理论看作贝叶斯概率论的一种推广,那末这一推广的主要意义在于它的 Dempster 规则。

然而,Dempster 规则的合理性却颇有争议。一方面,以 Shafer 为代表的一些学者用许多简单信度函数和例子说明 Dempster 规则作为证据汇集(pooling of evidence)规则的合理性(符合人的直觉);另一方面,文献中也有不少例子说明应用 Dempster 规则导出的结论是错误的。两种观点至今相持不下。虽然有些研究者(如 Halpem 和 Fagin[7])把出现这种争议的原因归结为两种观点对信度函数所持的解释不同,即分别把信度函数解释为证据表示与解释为概率下界,但我们认为,更深层的原因在于两种观点都没有对 Dempster 规则提出一个严格的证明或反驳。本文将在信度函数的相容性观点下基于若干假定给出 Dempster 规则的一个推导,由此清楚地阐明该规则的有效性与限制,并解释上述争议的根源。

2 信度函数的相容性观点

描述证据理论有两个基本视角,分别称为证据理论的相容性观点(compatibility view)与概率分配观点(Probability allocation view)[8]。相容性观点提供了信度函数的一种明确的建模方法,但概率分配观点却是对证据理论的更确切描述。本文仅考虑相容性观点,以下按这一观点定义证据理论的一些基本概念。

设 Q_T 是一个问题,其所有可能的答案定义为一个集合 T,假定其中有且仅有一个答案是正确的。集合 T 称为识别框。任意子集 $A\subseteq T$ 表示命题"正确答案在 A 中"。T 的势集 2^T 表示判断该问题正确答案的所有命题构成的集合,空集∅和全集 T 分别代表恒假命题和恒真命题。

定义1 考虑两个识别框 E 和 T,分别由问题 Q_E 和 Q_T 定义。一个元素 $e\in E$ 称为相容于另一个元素 $t\in T$,记为 eCt,如果 e 是问题 Q_E 的答案不排除 t 是问题 Q_T 的一个答案的可能性。

两个识别框 E 和 T 之间的一个相容关系,记为 C(E,T),定义为 $E\times T$ 的如下子集:

*)国家自然科学基金(69831040)资助项目。杨春 博士,副教授,主要从事神经网络、模糊系统、不确定推理的研究工作。李怀祖 博士生导师,主要从事企业管理与决策分析、管理信息系统与专家系统等研究工作。

$C(E,T)=\{(e,t)|e\in E,t\in T,eCt\}$

定义2 一个元素 $e\in E$ 与一个元素 $t\in T$ 矛盾，如果 e 与 t 不相容，即 $(e,t)\in C(E,T)$。

二元对 $(e,t)\in C(E,T)$ 是两个问题 Q_E 和 Q_T 的合取的一个可能答案，所以 $C(E,T)$ 也是一个识别框。

相容关系可用来定义来自两个不同识别框的命题之间的"蕴含"概念。

定义3 一个命题 $A\in 2^T$ 称为蕴含另一个命题 $B\in 2^T$，记为 $A\Rightarrow B$，如果 $e\in A, eCt$，必有 $t\in B$。

定义4 一个命题 $A\in 2^T$ 称为恰蕴含另一个命题 $B\in 2^T$，记为 $A*\Rightarrow B$，如果 A 蕴含 B 且不蕴含 B 的其它子集。

相容关系的概念可以拓展到三个以上识别框。

定义5 考虑三个识别框 E_1，E_2 和 T。元素 $e_1\in E_1$，$e_2\in E_2$ 和 $t\in T$ 称为相容的，如果 $(e_1,e_2)\in C(E_1,E_2)$，且 $((e_1,e_2),t)\in C(C(E_1,E_2),T)$。

设 T 是一个识别框，它表示一个问题 Q_T 的所有可能答案的集合。假定现在有一证据，我们希望基于该证据获得 T 上的一个概率函数 $P_T: 2^T\to(0,1)$，又假定不能直接由证据建立这个概率函数，但可以从该证据定义一个识别框 E 以及 E 上一个概率函数 P_E。下面将借助识别框 E 与 T 的关系来建立 T 中各个命题的信度 识别框 E 也称为证据框。

为了获得 T 上的概率 P_T，需要建立 E 和 T 之间的相容关系 C(E,T)以及作为识别框的 C(E,T)上的概率函数 $P_{C(E,T)}$。此后概率函数 P_T 可按下式计算：

$$P_T(t)=\Sigma\{P_{C(E,T)}((e,t))|eCt,e\in E\} \quad (1)$$

C(E,T)上的概率函数 $P_{C(E,T)}$ 按贝叶斯规则定义为：

$$P_{C(E,T)}((e,t))=P_E(e)\times P_{T|e}(t) \quad (2)$$

其中 $P_{T|e}(t)$ 是给定 e 是问题 Q_E 的答案的条件下 t 是问题 Q_T 的正确答案的概率。这些条件概率定义在 T 的下列子集上

$$T|e=\{t\in T|eCt\},e\in E$$

(注：当有额外知识表明 e 是问题 Q_E 的正确答案时，则 $\{e\}$ 成为 Q_E 的新识别框，而 T|e 成为问题 Q_T 的新识别框。)

贝叶斯方法的精确性将依赖于对条件概率函数 $P_{T|e}$ 的估计。在有些问题中不大可能得到这些条件概率的合理估计。在这样的情形，可以把信度函数的相容性观点用作贝叶斯概率函数的一种逼近。

按相容性观点，给定证据框 E 上的概率函数 P_E，可按如下方式定义 mass 函数(或基本概率分配函数) $m_E: 2^T\to(0,1)$：

$$m_E(A)=\Sigma\{P_E(e)|\{e\}*\Rightarrow A\},A\in 2^T \quad (3)$$

相应的信度函数 Bel_E 定义为：

$$Bel_E(A)=\sum_{B\subseteq A}m_E(B),A\in 2^T \quad (4)$$

由式(3)，$Bel_E(A)$ 也可表示为：

$$Bel_E(A)=\Sigma\{P_E(e)|\{e\}\Rightarrow A\} \quad (5)$$

在相容性观点中定义 mass 函数和信度函数的另一种方式是采用 Dempster[1]的多值映射。给定识别框 E 和 T 之间的一个相容关系 C(E,T)，定义如下映射：

$$\sigma: E\to 2^T$$

$$\sigma(e)=\{t\in T|eCt\}=T|e \quad (6)$$

对任意 $A\in 2^T$，可定义 A 关于映射 σ 的两种逆象：

$$\bar{\omega}(A)=\{e\in E|\sigma(e)\cap A\neq\varnothing\}$$

$$\underline{\omega}(A)=\{e\in E|\sigma(e)\subseteq A\}$$

其中 $\bar{\omega}(A)$ 与 $\underline{\omega}(A)$ 分别称为 A 关于映射 σ 的上、下逆象。

仍设证据框 E 上的概率函数为 P_E。对 $A\in 2^T$，定义：

$$m_E(A)=\Sigma\{P_E(e)|e\in E,\sigma(e)=A\} \quad (7)$$

$$Bel_E(A)=P_E(\underline{\omega}(A)) \quad (8)$$

易证，(7)和(3)式定义的 mass 函数是相同的，(8)和(5)式定义的信度函数也是相同的。

对(5)或(8)式定义的信度函数 Bel_E 有两种典型的解释，即作为概率下界的解释和作为证据或理由度量(measure of reason)的解释。在仅有一个信度函数的情形，这两种解释都是合理的。在有多个信度函数并考虑 Dempster 规则的应用时，信度函数作为概率下界的解释明显不成立[7]，而作为证据强度的解释则具有直观的合理性[3]。

3 Dempster 规则的推导

本节对 Dempster 规则给出一个推导，旨在揭示 Dempster 规则所蕴涵的假定。

令 E_1 和 E_2 是两个证据框，P_{E_1} 和 P_{E_2} 分别是 E_1 和 E_2 上已知的概率函数，T 是问题的识别框。假定证据处理者已建立了两个相容关系 $C(E_1,T)$ 和 $C(E_2,T)$。于是按前面的方法可建立两个信度函数 Bel_{E_1} 和 Bel_{E_2}。这两个信度函数的综合可分为如下两步实现：

1)建立两个证据框 E_1 和 E_2 之间的相容关系 $C(E_1,E_2)$，以及 $C(E_1,E_2)$ 与 T 之间的相容关系 $C(C(E_1,E_2),T)$；

2)建立集合 $C(E_1,E_2)$ 上的概率函数 $P_{C(E_1,E_2)}$。

实际的相容关系 $C(E_1,E_2)$ 与 $C(C(E_1,E_2),T)$ 本应由证据处理者给出，但如果证据处理者没有提供这两个相容关系，那末可采用如下两个假定：

假定1 对 $e_1\in E_1$，$e_2\in E_2$，如果存在某个 $t\in T$ 使 e_1Ct 且 e_2Ct，则有 e_1Ce_2。

假定2 对 $e_1\in E_1$，$e_2\in E_2$，$t\in T$，如果 e_1Ct 且

e_2Ct，则$(e_1,e_2)Ct$。

信度函数综合的关键是建立集合$C(E_1,E_2)$上的概率函数$P_{C(E_1,E_2)}$。严格的方法是采用贝叶斯规则：

$$P_{C(E_1,E_2)}((e_1,e_2))=P_{E_1}(e_1)\times P_{E_2|e_1}(e_2) \quad (9)$$

贝叶斯规则的应用需要已知条件概率$P_{E_2|e_1}$，$\forall e_1\in E_1$，这是原证据中不包括的额外信息。但如果已知两个证据框E_1和E_2是概率独立的，则(9)式取简单的形式。

定义6 证据框E_1和E_2是概率独立的，如果$\forall e_1\in E_1,e_2\in E_2$有：

$$P_{C(E_1,E_2)}((e_1,e_2))=P_{E_1}(e_1)\times P_{E_2}(e_2) \quad (10)$$

实际中，概率函数$P_{C(E_1,E_2)}$是未知的。事实上，综合规则本质上就是试图计算这个概率函数，因此，一般情况下不大可能识别到E_1与E_2之间的概率独立性。下面给出估计概率函数$P_{C(E_1,E_2)}$的一种方法。

定义7 证据框E_1和E_2称为先验独立的，如果在不考虑相容关系$C(E_1,E_2)$的情况下，$E_1\times E_2$上的联合概率函数$P_{E_1\times E_2}$满足：$\forall e_1\in E_1,e_2\in E_2$有：

$$P_{E_1\times E_2}((e_1,e_2))=P_{E_1}(e_1)\times P_{E_2}(e_2) \quad (11)$$

这个定义表明，我们从证据框E_1与E_2提供的证据中分离出一个证据，使之产生$E_1\times E_2$上一个先验概率函数$P_{E_1\times E_2}$，而且这个证据表明，$P_{E_1\times E_2}$满足(11)式。后面将说明，Dempster规则要求被综合的两个证据具有独立性，其确切含义可以用证据框E_1与E_2的先验独立性来描述。

显然，证据框E_1与E_2不仅包括(11)式的证据，而且相容关系$C(E_1,E_2)$也可看作一个证据。于是，可把(11)式的$P_{E_1\times E_2}$作为先验概率，以命题$C(E_1,E_2)$为真作为条件，应用贝叶斯规则得：

$$\begin{aligned}&P_{E_1\times E_2}((e_1,e_2)|C(E_1,E_2))\\&=\frac{P_{E_1\times E_2}(\{(e_1,e_2)\}\cap C(E_1,E_2))}{P_{E_1\times E_2}(C(E_1,E_2))}\\&=\frac{P_{E_1\times E_2}(\{(e_1,e_2)\}\cap C(E_1,E_2))}{1-\Sigma\{P_{E_1}(e_1)P_{E_2}(e_2)|(e_1,e_2)\notin C(E_1,E_2)\}}\\&=\begin{cases}\dfrac{P_{E_1}(e_1)P_{E_2}(e_2)}{1-k}, & \text{若}(e_1,e_2)\in C(E_1,E_2)\\0, & \text{否则}\end{cases}\end{aligned} \quad (12)$$

其中，$k=\Sigma\{P_{E_1}(e_1)P_{E_2}(e_2)|(e_1,e_2)\notin C(E_1,E_2)\}$ (13)

证据框E_1和E_2中是否还包含其它证据？如果确有进一步证据，则需要用它对(12)式的概率函数继续更新。从仅有信息看，虽然E_1与E_2之间可能存在其它交互关系，但却不能提炼出明确的、以命题形式表达的证据。由于这个原因，我们采用如下假定：

假定5 (12)式的条件概率函数可作为联合证据框$C(E_1,E_2)$上的概率函数$P_{C(E_1,E_2)}$，即$\forall(e_1,e_2)\in C(E_1,E_2)$

$$P_{C(E_1,E_2)}((e_1,e_2))=\frac{1}{1-k}P_{E_1}(e_1)P_{E_2}(e_2) \quad (14)$$

以下将证明，在假定1～3下，将概率$P_{C(E_1,E_2)}$按相容关系$C(C(E_1,E_2),T)$转移到识别框T上得到的信度函数$Bel_{C(E_1,E_2)}$就是原两个信度函数Bel_{E_1}和Bel_{E_2}经Dempster规则综合的结果。

现定义如下三个映射：

$\sigma_1:E_1\to 2^T$

$\sigma_1(e_1)=\{t\in T|e_1Ct\}$

$\sigma_2:E_2\to 2^T$

$\sigma_2(e_2)=\{t\in T|e_2Ct\}$

$\sigma_{12}:C(E_1,E_2)\to 2^T$

$\sigma_{12}((e_1,e_2))=\{t\in T|(e_1,e_2)Ct\}$

引理1 对$e_1\in E_1,e_2\in E_2,(e_1,e_2)\notin C(E_1,E_2)$当且仅当$\sigma_1(e_1)\cap\sigma_2(e_2)=\varnothing$。

证明：设$(e_1,e_2)\notin C(E_1,E_2)$，即$e_1$与$e_2$矛盾，由假定1，不存在$t\in T$使$e_1Ct$且$e_2Ct$，故：

$\sigma_1(e_1)\cap\sigma_2(e_2)=\{t\in T|e_1Ct\}\cap\{t\in T|e_2Ct\}=\{t\in T|e_1Ct$且$e_2Ct\}=\varnothing$。反之亦然。

引理2 对$e_1\in E_1,e_2\in E_2$，有

$$\sigma_{12}((e_1,e_2))=\sigma_1(e_1)\cap\sigma_2(e_2) \quad (15)$$

证明：设$t\in\sigma_{12}((e_1,e_2))$，则$(e_1,e_2)Ct$，由假定2，应有$e_1Ct$且$e_2Ct$，即$t\in\sigma_1(e_1)$且$t\in\sigma_2(e_2)$，故$t\in\sigma_1(e_1)\cap\sigma_2(e_2)$。反之亦然。故(15)式成立。

引理3 式(13)的常数k可表示为：

$$k=\sum_{X\cap Y=\varnothing}m_{E_1}(X)m_{E_2}(Y) \quad (16)$$

其中m_{E_1}和m_{E_2}是分别对应于Bel_{E_1}和Bel_{E_2}的mass函数。

证明：

$$\begin{aligned}k&=\Sigma\{P_{E_1}(e_1)P_{E_2}(e_2)|(e_1,e_2)\notin C(E_1,E_2)\}\\&=\Sigma\{P_{E_1}(e_1)P_{E_2}(e_2)|\sigma_1(e_1)\cap\sigma_2(e_2)=\varnothing\}\\&=\Sigma P_{E_1}(e_1)P_{E_2}(e_2)|\sigma_1(e_1)=X,\sigma_2(e_2)=Y,X\cap Y=\varnothing\}\\&=\sum_{X\cap Y=\varnothing}\sum_{\sigma_1(e_1)=X}\sum_{\sigma_2(e_2)=Y}P_{E_1}(e_1)P_{E_2}(e_2)\\&=\sum_{X\cap Y=\varnothing}m_{E_1}(X)m_{E_2}(Y)\end{aligned}$$

定理 令$Bel_{C(E_1,E_2)}$是证据框$C(E_1,E_2)$上的概率函数$P_{C(E_1,E_2)}$按相容关系$C(C(E_1,E_2),T)$转移到识别框T上得到的信度函数，相应的mass函数记为$m_{C(E_1,E_2)}$，则对任意$A\in 2^T$有：

$$\begin{aligned}m_{C(E_1,E_2)}(A)&=(m_{E_1}\oplus m_{E_2})(A)\\&=\frac{\sum_{X\cap Y=A}m_{E_1}(X)m_{E_2}(Y)}{1-\sum_{X\cap Y=\varnothing}m_{E_1}(X)m_{E_2}(Y)}\end{aligned}$$

证明：

$$\begin{aligned}m_{C(E_1,E_2)}(A)&=\Sigma\{P_{C(E_1,E_2)}((e_1,e_2))|\sigma_{12}((e_1,e_2))=A\}\\&=\Sigma\{P_{C(E_1,E_2)}((e_1,e_2))|\sigma_1(e_1)\cap\sigma_2(e_2)=A\}\\&=\frac{1}{1-k}\Sigma\{P_{E_1}(e_1)P_{E_2}(e_2)|\sigma_1(e_1)=X,\sigma_2(e_2)=Y,X\end{aligned}$$

$$\cap Y=A\}$$
$$=\frac{1}{1-k}\sum_{\cap Y=A}\Big(\sum_{e_1}P_{E_1}(e_1)\Big)\Big(\sum_{e_2}P_{E_2}(e_2)\Big)$$
$$=\frac{1}{1-k}\sum_{\cap Y=A}m_{E_1}(X)m_{E_2}(Y)$$
$$=\frac{\sum_{X\cap Y=A}m_{E_1}(X)m_{E_2}(Y)}{1-\sum_{X\cap Y=\varnothing}m_{E_1}(X)m_{E_2}(Y)}$$
$$=(m_{E_1}\oplus m_{E_2})(A)$$

到此就推出了 Dempster 规则。

讨论与结论 由引理1～3及上述定理可见，Dempster 规则的成立需要四个条件，即前面的假定1～3以及证据框 E_1 与 E_2 之间的先验独立性。Shafer[3]对 Dempster 规则的表述强调了被合成的两个信度函数必须是完全独立的(entirely distinct)，但他对这种独立性未给出严格的描述。这个概念的不精确性是导致指责 Dempster 规则的根源之一。例如，一些批评论据本质上是基于对信度函数独立性的不恰当理解，因此其实并不成立。本文在相容性观点的框架内给出了信度函数独立性的确切定义(定义7)。不难看到，要验证两个证据(或两个信度函数)的这种独立性是困难的。

在 Dempster 规则成立所需要的三个假定中，假定1和假定2在直觉上是比较合理的。假定3相对较难理解。在对先验概率 $P_{E_1\wedge E_2}$ 更新时，假定3仅考虑了证据"命题 $C(E_1,E_2)$ 为真"。文[5]的实例表明，一方面，这个证据往往比证据框 E_1 与 E_2 的合取所包涵的信息少，但另一方面，它又是唯一确定的证据。从这个角度看，假定3并不是限制性很强的条件。

概括起来，在上述四个条件下，Dempster 规则是精确成立的。另一方面，这些条件也构成了应用 Dempster 规则的限制，特别是信度函数的独立性不易验证。

参 考 文 献

1 Dempster A P. Upper and lower probabilities induced by a multivalued mapping. Annl. Math. Stat., 1967,38

2 Dempster A P. A generalization of Bayesian inference (with discussion). J R Stat. Soc., 1968,B30

3 Shafer G. A mathmatical theory of evidence. Princeton University Press, 1976

4 张文修，梁怡. 不确定性推理原理. 西安交通大学出版社，1996

5 杨春，李怀祖. 证据理论在一类侦察信息综合中的应用. 二炮工程学院学报，1997,3

6 张尧庭，杜劲松. 人工智能中的概率统计方法. 科学出版社，1998

7 Halpern J Y, Fagin R. Two views of belief: belief as generalized probability and belief as evidence. Artl Intell, 1992,54

8 Lingras P, Wong S K M. Two perspectives of the Dempster-Shafter theory of belief functions. Int. J. Man-Mach. Stud., 1990,33

9 Kyburg H E. Bayesian and non-Bayesian evidential updating. Artl. Intell., 1987,31

(上接第86页)

已的介绍，最新的 NDS8将可以支持10亿个对象。缺点是 X.500协议比较复杂，特别是为了支持 LDAP 客户端的访问，增加了一个 LDAP/DAP 的网关来实现对 LDAP 客户端的支持，致使 NDS 的性能不如纯 LDAP 服务器。

Netscape 公司的目录服务器采用 LDAPV3协议实现，降低了实现的复杂性，性能比 Novell 公司的服务器好，最新的 Netscape DS4.0可支持5000万个对象。

我们的目录服务器是纯 LDAP 服务器，由于采用了 ODBC 连接数据库，其容量和查询速度与后台数据库的性能有很大关系。

在复制方面的区别已在第3.2节中做了比较。

总之，三种目录服务器的区别主要在于其应用定位不同，Novell 的 NDS 用于网络管理，需要较大的容量，Netscape 的目录服务器用于其应用服务程序的集成，所以没有使用关系数据库。我们开发的目录服务器用于建立企业信息目录，所以使用了 ODBC 去连接不同的关系数据库，以保证企业原有的投资。由于目录服务的分布式特征，单个目录服务器容量大小意义不大。

参 考 文 献

1 Tang A, Scoggins S. 开放式网络和开放系统互连. 电子工业出版社，227～275

2 Judd S. Strassner J. Directory-enabled Networks Information Model and Base Schema. Available at: http. // murchiso. com/den

3 ITU-T X.500(93)建议系列. X.500, X.501, X.509, X.511, X.518, X.519, X.520, X.521, X.525

4 Yeong W, et al. Lightweight Directory Access Protocol, RFC1777. March 1995

5 LDAPV3 标准系列: RFC2251, RFC2252, RFC2253, RFC2254, RFC2255, RFC2256

6 Gordon Good. The LDAP Data Interchange Format (LDIF)-Technical Specification, draft-ietf-asid-ldif-02. txt, July 1997. Available at: ftp: // ietf. org/internet-drafts/draft-ietf-asid-ldif-02. txt