

信号处理

小波分析

滤波器

滤波器

①

计算机科学2000Vol. 27No. 1

小波滤波器系数的解析构造^{*}

Analytic Construction of Wavelet Filter Coefficient

91-9297

李建平

(后勤工程学院一室 重庆400016)

严中红

(重庆工业高等专科学校 重庆400018) (电子科技大学应用数学系 成都610054)

张万萍

TN 91.7

Abstract In this paper, for $N=2^{k-1}$, the analytic construction of wavelet filter coefficient on compact support sets is found. That is the general solutions structure of equations which fits to the orthogonal wavelet basis conditions.

Keywords Wavelet basis, Filter, Analytic construction

1 引言

小波分析与应用已十分深入,特别是紧支集上的小波变换已广泛应用在信号处理,如图像压缩、声音处理、文字识别等领域,但小波基或小波滤波器的构造却是一件十分艰苦的工作,多尺度方程:

$$\varphi(x) = \sum h(n)\varphi(2x-n), n \in \mathbb{Z} \quad (1)$$

不仅复杂,且多尺度分析的生成元也很不好寻找,其中 $h(n), n \in \mathbb{Z}$ 就是要寻找的小波滤波系数。

著名数学家 Daubechies 对较小的 N , 已给出了部分小波滤波系数。在信号自适应处理中,有必要弄清这些系数的来历,以及怎样选择适合特殊信号的小波基是十分重要的。众所周知小波基的构造取决于小波基滤波系数的构造,由于在紧支集上正交小波基滤波系数只有有限个不为零(设为 $2N$),在数字计算中特别有用,因此本文仅局限于紧支集上正交小波基的研究。

紧支集上正交小波基应满足如下4个条件(2)~(5)式

$$\sum_{i=0}^{2N-1} h(i) = \sqrt{2} \quad (2)$$

$$\sum_{i=0}^{N-1} h(2i) = \sum_{i=0}^{N-1} h(2i+1) = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (3)$$

$$\begin{bmatrix} h_0 & h_1 & h_2 & \cdots & h_{2N-1} \\ & h_0 & h_1 & h_2 & \cdots & h_{2N-1} \\ & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & h_0 & h_1 & h_2 & \cdots & h_{2N-1} \end{bmatrix}_{N \times 2N} \quad \text{为行正}$$

交矩阵

$$\sum_{i=0}^{2N-1} h(i)h(i) = 1 \quad (4)$$

条件(2)式应改为:

$$\max \sum_{i=0}^{2N-1} h(i) \text{ 满足 (3), (4), (5) 式}$$

因为在实际应用中 $h(n)$ 是一个低通滤波器,当一组常数信号通过它时(卷积)能量和应最大,这时小波二分之一抽样才具有最好的信息压缩效率。

式(3)中的行正交实际上是卷积

$$\sum_{i=0}^{2N-1} h(i)h(i+2q) = 0, q=1, 2, 3, \cdots$$

成立。其中当 $i+2q$ 超过 $2N-1$ 时 $h(i+2q)=0$ 。

既然小波滤波系数计算比较困难,在应用中要动态选择小波基就更难了,能否找出满足这一结果必将在小波理论及应用、模式识别等领域产生十分积极的作用,能否找出满足小波正交性条件滤波器的解析形式呢?它有没有统一的形式?这就是本文的主要目的。

Daubechies 小波与其他如 Coifman 小波、Beylkin 小波等满足式(2)~(4)条件。在很多实际应用中式(2),(3)可以不满足,如 Vaidyanathan 小波。本文我们将讨论它们的解析构造问题。

2 $N=1, N=2$ 滤波器的解析构造

当 $N=1$ 时,滤波器有两个系数,因为式(5),并记参数角为 α ,我们可设:

$$h_0 = \cos \alpha \quad h_1 = \sin \alpha$$

^{*} 本文的研究得到国家自然科学基金和重庆市中青年科技专家基金资助。李建平 博士,教授,研究方向是小波分析及其应用。严中红 博士生。张万萍 硕士。

即可,显然若式(2),(3)成立,则 $\alpha=\pi/4$,此时即 Haar 小波.反过来对任意参数 α ,式(4),(5)自然成立,但式

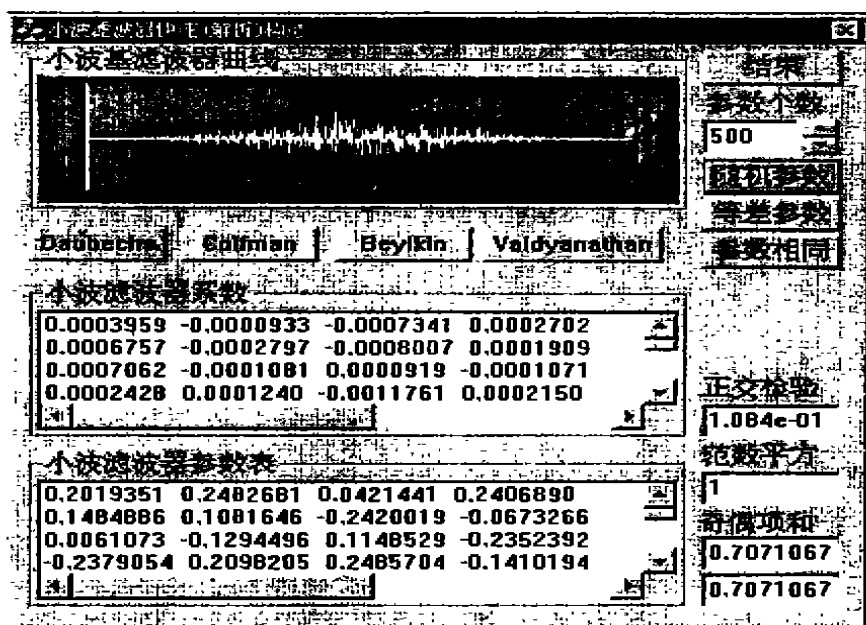


图1

定理1 对 $N=2$ 时满足正交小波基条件(2),(3),(4),(5)式的小波滤波系数 $\{h_0, h_1, h_2, h_3\}$ 的充要条件是存在参数角 α, β 使得下列等式成立:

$$\alpha - \beta = \pi/4$$

$$h_0 = \cos\alpha\cos\beta \quad h_1 = \sin\alpha\cos\beta$$

$$h_2 = -\sin\alpha\sin\beta \quad h_3 = \cos\alpha\sin\beta$$

当 $\alpha = \pi/3, \beta = -\pi/12$ 时,得到:

$$h_0 = 0.482963 \quad h_1 = 0.836516$$

$$h_2 = 0.224144 \quad h_3 = -0.129410$$

这就是所谓 $N=2$ 时 Daubechies 的小波滤波系数.显然该组公式还可以给出无穷多种类似的滤波系数.

证明: (1)充分性.此时很容易验证式(2),(3),(5);而 $N=2$ 时式(4)的正交性条件变为: $h_0h_2 + h_1h_3 = 0$;将上述公式代入:

$$h_0h_2 = -\cos\alpha\cos\beta\sin\alpha\sin\beta$$

$$h_1h_3 = \sin\alpha\cos\beta\cos\alpha\sin\beta$$

显然, $h_0h_2 + h_1h_3 = 0$ 成立.证毕.

(2)必要性.根据 $N=2$ 时式(4)的正交性条件: $h_0h_2 + h_1h_3 = 0$.不妨改为 $-h_1/h_0 = h_2/h_3$,必然存在一参数角 α ,使:

$$\tan\alpha = \frac{-h_1}{h_0} = \frac{h_2}{h_3}$$

并不妨设 $h_0 = R_1\cos\alpha, h_1 = -R_1\sin\alpha, h_2 = R_2\sin\alpha, h_3$

$= R_2\cos\alpha$.又由条件(5)即:

$$h_0h_0 + h_1h_1 + h_2h_2 + h_3h_3 = 1$$

得到:

$$R_1^2 + R_2^2 = 1$$

因此设 $R_1 = \cos\beta, R_2 = \sin\beta, \beta \in (-\infty, \infty)$ 即有:

$$h_0 = \cos\alpha\cos\beta, h_2 = -\sin\alpha\sin\beta$$

$$h_1 = \sin\alpha\cos\beta, h_3 = \cos\alpha\sin\beta$$

显然此时

$$h_0 + h_2 = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha + \beta)$$

$$h_1 + h_3 = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta = \sin(\alpha + \beta)$$

由条件(3)有 $h_0 + h_2 = h_1 + h_3$,即 $\cos(\alpha + \beta) = \sin(\alpha + \beta)$ 得到 $\alpha + \beta = \pi/4 + n\pi, n \in \mathbb{Z}$.此时 $h_0 + h_1 + h_2 + h_3$ 取值为: $-\sqrt{2}, \sqrt{2}$ 两种情形,又 $h_0 + h_1 + h_2 + h_3 = \cos(\alpha + \beta) + \sin(\alpha + \beta)$;它取最大值,只需取 β 满足:

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{4} + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$$

且最大值为:

$$h_0 + h_1 + h_2 + h_3 = \sqrt{2}$$

此时 $h_0 + h_2 = h_1 + h_3 = \sqrt{2}/2$ 自动成立,因此(2),(3)条件满足了.不妨取 $n=0$,必要性得证.

下面我们忽略 $2n\pi$ 或 $n\pi$ 带来的符号影响,只考虑一个主值的作用.至此定理1得证.

若要构造 $N=3, 4, 5, \dots$.如果用以上推导方法就很

(下转第97页)

来的20年或更长一点的时间里国内外重要的计算科学学术研究机构将会逐步把研究重点集中在新一代计算机体系结构、并行与分布式软件开发方法学研究、人工智能理论及应用和其它计算机应用的关键技术等新的综合方向上,这些新的发展方向将更加丰富了计算教育科学的研究内容。

中国科学院院士李三立教授指出:要充分估计计算机技术对科学和工程、产业和社会生活的渗透和影响,以及对计算教育带来的需求。他列举了国际上核爆炸的计算机模拟、波音777飞机大部分传统实验的计算机模拟、国内大型水坝的优化设计、大面积石油储层的全面计算、复杂飞行物的整体优化设计等实例,说明了计算机技术对科学和工程领域的渗透和影响。目前计算机、通信和消费产品三种重要支柱产业的互相渗透和互相结合的过程正在加速,这三个产业的结合基础是数字化,换言之,“数字化世界”将比过去预期的要提前到来,计算教育要加强计算机、通信和视频/音频技术跨学科人材培养的研究。李教授还认为计算教育要在改造土木工程、机械工程等传统专业中起作用,并提出计算教育要充分估计计算机技术对人类生活的渗透和影响,以及由此而来的问题^[5]。

致谢 衷心地感谢中国科学院院士陈火旺教授、全国高等学校计算机教育研究会理事长袁开榜教授、

中国自然辩证法学会理事朱亚宗教授以及一切指导和支特“计算哲学研究”的专家和学者们!

参考文献

- 1 Denrung P J, et al. Computing as a discipline. CACM, 1983, 32(1): 9~23
- 2 Turner A J, et al. A Summary of the ACM, IEEE-CS Joint Curriculum Task Force Report. Computing Curricula 1991. CACM, 1991, 34(6): 68~84
- 3 国家教委社会科学研究与艺术教育司. 自然辩证法概论. 高等教育出版社, 1985
- 4 中国计算机学会教育委员会, 全国高等学校计算机教育研究会编. 计算机学科教学计划1993. 电子工业出版社, 1995
- 5 赵致琢. 计算科学导论. 科学出版社, 1998
- 6 李三立. 面向21世纪的计算机教育(大会报告). 面向21世纪高等学校计算机学科教学内容和课程体系改革研讨会(上海), 1998. 10
- 7 董荣胜. 计算学科中的科学技术方法论(大会发言). 面向21世纪高等学校计算机学科教学内容和课程体系改革研讨会(上海), 1998. 10
- 8 董荣胜. 《数据库系统概论》课程改革的实践与探讨. 见1996计算机教育学术年会论文集. 电子工业出版社, 1996. 82~84

(上接第92页)

困难了,但很容易想到:对任意自然数N的小波基滤波系数的总和满足如下形式:

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{2N-1} h(1i) &= \cos\alpha_1 + \sin\alpha_1, \\ \sum_{i=0}^{N-1} h(2i) &= \cos\alpha_1, \\ \sum_{i=0}^{N-1} h(2i+1) &= \sin\alpha_1,\end{aligned}$$

且若式(3)成立必然要求 $\alpha_1 = \pi/4$, 此处 α_1 是一组参数角的和。当 $N=2$ 时

$$\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \\ \sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta\end{aligned}$$

它们分别是偶数项 h_0, h_2 与奇数项 h_1, h_3 , 因此完全有理由认为: $\cos(\alpha-\beta+\gamma)$ 与 $\sin(\alpha+\beta+\gamma)$ 之完全分解产生8项将构成 $N=4$ 的小波基滤波系数, 详见文[6]。

3 举例说明

我们设计了一个非常方便的软件,可迅速简单地计算出任意个参数角的小波滤波器,如图1所示的是一个含有 $N=500$ 参数角(随机产生的),1000个滤波系

数的图形方式显示结果,我们给出的数据或计算公式,使得在应用中动态选择小波基变得极其容易,这一结果必将在小波理论及应用、模式识别等领域产生十分积极的作用。

参考文献

- 1 秦前清, 杨宗凯. 实用小波分析. 西安: 西安电子科技大学出版社, 1994. 41~53
- 2 Wickerhauser M V. Adapted wavelet analysis from theory to software. New York: SIAM, 1994. 442~462
- 3 Vaidyanathan P P, Huong P Q. Lattice structures for optimal design and robust implementation of twochannel perfect-reconstruction QMF banks. IEEE Trans. On ASSP, 1998, 36(1): 81~94
- 4 李建平. 小波分析与信号处理——理论、应用及软件实现. 重庆: 重庆出版社, 1997. 282~300
- 5 李建平. 矢量积小波变换及小波分析的理论与应用研究. [博士学位论文]. 重庆: 重庆大学, 1998. 6
- 6 李建平, 唐远炎. 小波分析方法的应用. 重庆: 重庆大学出版社, 1999