维普资讯 http://www.cqvip.com

计算机科学2002Vol.29№.10

多端口模式下的多消息广播算法与分析

Algorithm and Analysis of Multiple Messages Broadcast in the Multiport Model

丁 丁 李伟生

(北方交通大学计算机与信息技术学院 北京100044)

Abstract In this paper, we first make a comparison between two kinds of one-to-all broadcast—— one message broadcast and multiple messages broadcast. And through simple introduction to a multiple messages broadcast algorithm presented in [1], called k-tree algorithm, in the multiport model, we sum up its basis and model of theory and provide essential proof for theorems. At last, we make a detailed analysis of its time complexity.

Keywords Broadcast, Multiport model, Nodes, Broadcaster, Round

1 引言

网络通信一般可分为五类，单播(Unicast)、组播(Multicast)、汇播(Concast)、群播(MultiPoint to MultiPoint)和广播(Broadcast)。其中，广播通信是实现一点对所有点通信(one-to-all Broadcast)的简便有效形式，在很多并行计算问题，如神经网络、优化、线性代数等问题中的使用非常频繁。

这篇文章的依据是文[1]中介绍的消息机制下多端口(multiport model)系统中的一种广播算法——k 树算法。k 树算法主要基于 n 结点扫描树的构造以及树结点的命名，时间复杂度是$[m/k]+\max([\log_k(n+2k)],2)$。实验证明[1]，这种算法虽然不是最优的，其时间复杂度与最短广播周期$[\log_{k+1} n]+[m/k]-1$很接近，每个消息的广播延迟只有$\log(k+1)/\log k$个周期。而且由于对 k 扫描树——一种变形完全 k 叉树的应用，使其在广播算法的实现上不需要任何的代码，而变得非常简单和实用。

但是，文[1]中在 k 树算法的描述过程中，重点放在算法本身的介绍和实现，目的是讨论另外一种以 k 树算法理论为基础的广播算法，因此在 k 树算法理论的推理、证明和时间复杂度的分析上没有进行过多的工作。基于此，本文有两个重点，其一，明确广播的概念，通过对两种广播形式——单消息广播和多消息广播的比较，总结出多端口模式下多消息广播的特点；其二，在原文 k 树算法的基础上，归纳出两条广播定理，完善 k 树算法的理论模型，同时简单概括了 k 扫描树是如何支持多消息广播算法的实现，对以 k 扫描树为基础的广播算法进行时间复杂度的分析。

2 单消息广播与多端口下多消息广播的异同

在网络通信中通常使用一种特殊的地址将分组发送到所有目标。使用此地址发送分组后，网络的每一台机器都会接收和处理它，这种操作被称之为广播。广播的方法在多处理器系统中是一种非常重要的通信操作。特别地，可以在 EREW (Exclusive-Read Exclusive-Write)的系统中模拟 CREW (Concurrent-Read Exclusive-Write)的方式，把位于某个存储器中的单条消息广播给所有的处理器，这种操作我们称之为单消息广播。但是，随着网络技术的发展，网络通信中的多点通信功能也越来越重要，当需要进行大量的数据通信时，要求把数据分成一系列的消息，可以独立地发送和接收，而这对于上述的单消息广播来说，效率就会大大降低——单消息广播的方法每次只能广播一条消息，这样就提出了我们现在谈到的多端口模式下的多消息广播。

事实上，从同属于广播的类别上看，单消息广播和多消息广播有本质和目的上的相同之处：

a. 如果我们定义最初发起广播并向外发送广播分组的结点称为广播源(broadcaster)[3]，则无论是单消息广播还是多消息广播都是单广播源(记为 P_0)，也就是说所有需要广播的消息只存放在广播源一个结点中；

b. 单消息广播与多消息广播都是应用在具有多个处理器(nodes)的并行系统中的广播算法。在这种系统中，我们认为所有的结点之间都可以进行通信；

c. 单消息广播与多消息广播都是一点对所有点通信的广播形式，目的也都是为了使系统中的所有处理器得到广播源的内容；

但是在分布存储并行计算消息传递系统中，多端口模式下的多消息广播较之单消息广播而言，有其自身的特点，因此能在更大程度上提高资源的利用率和通信的效率：

a. 多消息广播虽然只有一个广播源，但是这个广播源的内容被分割成多个消息(m 个)，独立存在于广播源中；

b. 在应用多消息广播的并行系统中，每个处理器有 k 个不同的输入端口和 k 个不同的输出端口；

c. 在每一个广播周期(round)，每个处理器向其他的 k 个处理器发送 k($k<=m$)条不同的消息，与此同时，接收来自 k 个处理器的 k 条消息。

由此可以看出，由于各自的特点，单消息广播适用于 EREW 的系统，而多消息广播在 CREW 或 CRCW 系统中的效率会更高。

3 多端口模式下的多消息广播理论

根据文[1]中 k 树算法的介绍和性能分析，我们归纳得到 k 树理论中用到的，进而推广到所有多消息广播算法都适用的定理，并且给出较为严格的推理证明，希望能够对其它树形拓扑结构的广播算法有一定的参考价值。

假设广播源内的消息数目有限(m 个)，在每个时间周期向其他 k 个(或者少于 k 个)处理器发送 k 条(或者少于 k 条)新消息。同时，为了避免不同 m 和 k 问题规模之间的计算误差，在这里定义最短广播时间的概念，即所有消息广播完成的

丁 丁 硕士研究生，研究方向为并行算法分析与数据库。李伟生 教授，研究方向为并行算法分析与数据库。

维普资讯 http://www.cqvip.com

最大周期。

定理1 在k端口模式中向n个处理器广播单一消息的最短时间是$\lceil \log_{k+1} n \rceil$个周期[1]。

证明：假设单一消息存在于广播源P_0中

初始状态：P_0等待把单一消息向其余处理器广播；

第一个广播周期后，P_0把消息广播给另外k个处理器，此时有(k+1)个处理器得到该消息；

第二个广播周期过后，上述(k+1)个处理器又分别同时把消息广播给k个处理器，此时，有$(k+1)+k\times(k+1)=(k+1)\times(k+1)=(k+1)^2$个处理器得到消息；……

以此类推，如果共需要x个周期完成广播的操作，则在具有n个处理器(结点)的k端口并行系统中，有如下不等式成立：

$(k+1)^x \geqslant n \quad \therefore x \geqslant \log_{k+1} n$

又∵x是整数 $\quad \therefore x \geqslant \lceil \log_{k+1} n \rceil$

命题得证。

定理2 k端口模式中向n个处理器广播m条消息的最短时间是$\lceil m/k \rceil - 1 + \lceil \log_{k+1} n \rceil$个周期[1]。

证明：在k端口模式的并行系统中，广播m条消息的结束标志是第m条消息广播操作的完成。根据多消息广播的特点(在每一个广播周期，每个处理器向其他的k个处理器发送k($k<=m$)条不同的消息，与此同时，接收来自k个处理器的k条消息)，第m条消息可以进行广播的周期为$\lceil m/k \rceil - 1$；同时根据定理1，广播一条消息的最短时间是$\lceil \log_{k+1} n \rceil$个周期，因此，广播m条消息的最短时间是$\lceil m/k \rceil - 1 + \lceil \log_{k+1} n \rceil$个周期。

4 数据结构的定义

我们依据熟悉的完全二叉树理论，给出完全k叉树的定义，并由此讨论了完全k叉树的性质，提出k树算法中k扫描树的数据模型。

4.1 完全k叉树

性质1 一棵深度为h的满k叉树的结点数n为$(k^h-1)/(k-1)$。

证明：对于满k叉树而言，每个结点都有k个孩子，同时，除根结点以外的结点都只有一个父结点，因此：

$$n=\sum_{i=0}^{h} k^i = 1\times(1-k^{h+1})/(1-k) = (k^h-1)/(k-1)$$

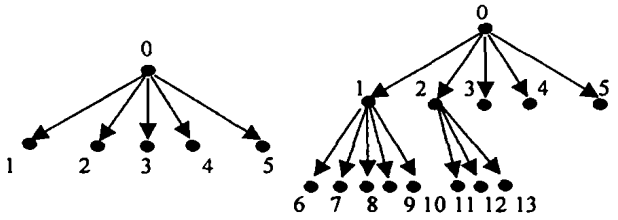
可以对满k叉树的结点进行连续编号，从根结点起，自上而下，自左而右，由此引出完全k叉树的定义。

定义1 (完全k叉树) 深度为h，n个结点的k叉树，当且仅当其每一个结点都与深度为h的满k叉树中编号从1至n的结点一一对应时，称之为完全k叉树。

n个结点的完全k叉树用$T_k(n)$表示，构造方法如下：

从根结点开始以自上而下方式一层一层地添加结点，第l层是向第l-1层的每个结点从左向右添加k个结点，直至第l层已经添满或者已经达到n个结点的数目。

例如：n=14，k=5



性质2 具有n个结点的完全k叉树的深度h为$\lceil \log_k (nk-n+1) \rceil - 1$。

证明：∵一棵深度为h的满k叉树有$(k^h-1)/(k-1)$个结点；

一棵深度为h-1的满k叉树有$(k^{h-1}-1)/(k-1)$个结点。

∴一棵深度为h的完全k叉树的结点数满足：

$(k^{h-1}-1)/(k-1) \leqslant n \leqslant (k^h-1)/(k-1)$

$\therefore (k^{h-1}-1) \leqslant n\times(k-1) \leqslant (k^h-1)$

$\therefore \log_k(nk-n+1) \leqslant h \leqslant \log_k(nk-n+1)+1$

$\therefore h=\lceil \log_k(nk-n+1) \rceil - 1$

4.2 k树理论

定义1 (k扫描树) 在k树算法中用到的k扫描树，就是以完全k叉树为基础并稍作调整。具体地说，就是把$T_k(n-1)$的根结点连接到一个新的结点上，把这个新的结点作为k扫描树的根结点，这样形成的k棵树就称为k扫描树，记做$T'_k(n)$。

性质1 如果可以构造k扫描树，使其具有如下特征：(a)对于每一棵树都有n个结点，根结点标记为0，其余顺次标记为1，2…，n-1；(b)树的高度为h；(c)所有的k棵树中，标号相同的结点全部的孩子结点数最多为k。

那么，k端口模式中向n个处理器广播m条消息的最短时间周期为$\lceil m/k \rceil - 1 + h$[1]。

证明：k扫描树建好后，在各个周期里，P_0向每一棵扫描树发出一条不同的消息，这些消息在各自的扫描树中每一个周期向下传递一层。由于每个非根结点在每棵k扫描树中只有一个父结点，因此在每个周期里最多收到k条消息。同时根据扫描树的特点，所有的k棵扫描树中，标号相同的结点所有孩子结点的数目最多为k，所以每个周期广播的消息数目也不会超过k。根据多消息广播定理2，k端口模式中向n个处理器广播m条消息的最短时间周期为$\lceil m/k \rceil - 1 + h$成立。

这样构造的k扫描树满足前面提到的多端口模式下多消息广播的特点，我们把它作为k树算法的数据结构，也就是广播的链路。

5 k树算法分析

k树算法的实质就是k扫描树的建立。k扫描树建立以后，每个处理器也就是树中的结点，都知道每个周期向哪k个处理器广播消息，也知道接收哪k个处理器的消息，因此，只要m个消息沿着建好的k棵扫描树由根结点向叶子结点并行传播即可。这样，k树算法时间复杂度的分析归根结底是k扫描树高度的分析。令h表示这些树的最大高度，由k树理论可知，多消息(m个)广播的周期是$\lceil m/k \rceil - 1 + h$。这里设关于n和k的函数f(n,k)=h，下面分三种情况讨论：

我们知道，在满k叉树中，除根结点以外，其余结点均出现在一个k结点组中，因此k可以整除n-1。当k可以整除n-2，且$n \geqslant k+2$时，$T'_k(n)$是n-1个结点的满k叉树增加一个结点生成。这样，对于k扫描树来讲，广播源是每棵树的根结点，我们从除了根结点以外的其余n-1个结点中选出n-2个作为k棵树的内部结点，每棵树就有(n-2)/k个内部结点。由于在k扫描树中，每个结点最多只有一次作为内部结点，在其他扫描树中只能作为叶子结点，从而保证所有的k棵扫描树中标号相同的结点其孩子结点的数目最多是k。那么，当k可以整除n-2，并且$n \geqslant k+2$时，k棵树的最大高度是$h_1=1+f(n-1,k)$。

维普资讯 http://www.cqvip.com

当k不能整除n-2，且n≥k+2时，令α=(n-2)mod k，即n-2除以k的余数。由于n≥k+2，所以T'k(n-2)至少有k+2个结点，也就是说至少有两个叶子结点，我们分别称为第一叶子结点和第二叶子结点，并且定义第一个叶子是以自上而下同层自左而右方式排列的第一个结点，第二个叶子是以同样方式排列中的第二个结点。首先构造k棵树，每棵树都是T'k(n-α)，把剩下的α个处理器分别用P0、P1、P2…Pα-1编号，然后再根据一定的算法把余下的α个结点加到每棵树上，确保在所有的k棵树中，每个处理器最多有k个孩子结点。那么，当k不能整除n-2，且n≥k+2时，k棵树的最大高度是$h_2=1+f(n-1-\alpha+2k,k)$。

对于n<k+2的情况(由于n=1，n=2的情况非常简单，我们这里讨论2<n<k+2的情况)，以上述方式定义的第二叶子结点不一定存在，因此重新定义第二个叶子结点为第一个叶子结点的第一个孩子，仍然用上述增加α个结点的算法，很明显在这种算法中，树的高度最多为3。

根据f(n,k)的表达式可以看出，f(n,k)是n的单调递增函数，而(n-1-α+2k)>(n-1)，所以只要得到k不能整除n-2，且n≥k+2情况下高度的上界，也就是k可以整除n-2，并且n≥k+2情况的界值。

$\because f(n,k)=\lceil\log_k(nk-n+1)\rceil-1$

$\therefore h=1+f(n-1-\alpha+2k,k)$

$=\lceil\log_k(n-1-\alpha+2k)(k-1)\rceil+1\leqslant\lceil\log_k(n+2k)k\rceil\leqslant\lceil\log_k(n+2k)\rceil+1$

因此k不能整除n-2，且n≥k+2时，算法的时间复杂度的最大值是$\lceil\log_k(n+2k)\rceil+\lceil m/k\rceil$；而k可以整除n-2，且n≥k+2时，由于$h_1<h_2$，因此算法的时间复杂度最大值也是$\lceil\log_k(n+2k)\rceil+\lceil m/k\rceil$；在n<k+2的时候，有h≤3，所以时间复杂度的最大值是$\lceil m/k\rceil+3-1=\lceil m/k\rceil+2$。

综上所述，对k≥2和任何值n，其时间复杂度都可以表示为$\lceil m/k\rceil+\max(\lceil\log_k(n+2k)\rceil,2)$，而最小值是$\lceil\log_{k+1}n\rceil+\lceil m/k\rceil-1$，因此该算法不是最优的。

结束语 随着广播技术的发展，广播算法越来越成熟，广播理论的总结完善也变得不可忽视。在这篇文章里，我们对单消息广播和多端口模式下多消息广播进行了比较，针对文[1]中算法理论上的不足，在满k叉树、完全k叉树的基础上，提出了k扫描的数据模型，并且根据算法的介绍和性能的分析，归纳得到两条广播定理，而且这两条定理普遍适用于多端口模式下的广播算法。

事实上，要使广播性能更加理想，单从算法入手是比较困难的。我们可以通过对网络的拓扑结构、网络的互联协议以及网络设备等基本入手，从根本上提高网络的性能，由此可以达到更加理想的广播效果。

参考文献

1 Amotz Bar-Noy, Ching-Tien Ho. Broadcasting Multiple Messages in the Multiport Model. IEEE Transactions On Parallel And Distributed Systems, 1999, 10(5): 500～507

2 Ko H, Latifi S, Srimani P K. Near-Optimal Broadcast in All-Port Wormhole-Routed Hypercubes Using Error-Correcting Codes. IEEE Transactions On Parallel And Distributed Systems, 2000, 11(3): 247～259

3 李宏，马建峰，李学干. 网络系统的广播技术和广播算法. 航空计算技术，1999，29(2)：35～39

4 严蔚敏，吴伟民编著.《数据结构》第二版，清华大学出版社，pp122～123

5 Akl S G. The Design and Analysis of Parallel Algorithm. Prentice Hall, Eaglewood Cliffs, NJ, 1989

6 Dimakopoulos V V. On Single-Port Multinode Broadcasting. IEEE Transactions On Parallel And Distributed Systems, 2001, 12(4): 75～78

(上接第97页)

从图1中可以看出：操作系统+TCP/IP形成了网络操作系统，再加上网格功能，来进一步管理资源，就形成了网格操作系统。从图1中也可看出：从Internet走向网格操作系统要比从Internet、软环境走向网格操作系统难得多，这也可以从J2EE支持Javalin这一网格研究得到证实。因此，我们不仅要重视网格的研究，更应当重视Internet软环境的研究。

结束语 1989年，NCFC的建设奠定了我国Internet 1的基础。Internet 2试验网的建设，更应当促进我国Internet 2应用的发展。全光网络的研究会为我国实现信息化创建更为先进、高速、安全的信息基础设施，为实现计算机、电信、电视三网合一奠定基础。

网络与经济相结合是网络发展的必由之路。Internet不仅要能支持科学和教育等应用领域，更应当与经济相结合，成为经济全球化、信息化发展的基础。为此，我们必须要高度重视Internet软环境的研究和应用的发展，促进我国的软件研究的产业化、规模化。网格应用将会充分利用网、机资源，极大地提高应用水平和效率。新技术的涌现为我们带来了机遇，我们更应当在跟踪的基础上实现创新。

加强Internet、Internet软环境和Internet上的各种应用的研究，会极大地促进我国的IT产业的迅猛发展，加速实现信息化带动工业化的宏伟目标。

参考文献

1 Rutkowski A M. Internet, Critical Infrastructure and Government: How dose it fit together; can it fit together. http://www.chaos.com/rutkowski.html

2 Rutkowski A M. A Strategic Perspective: Next Generation Internet http://www.ngi.org

3 Over view of next Generation Internet Developments, International ISP Forum Workshop, Cannes, 26 Oct 1998. http://www.ngi.org/pubic-presentsentations.html

4 Technology Central: CORBA 3 Release Information. http://www.omg.org

5 Technology Central: CORBA, IDL, and IIOP. http://www.omg.org

6 Distributed Multitiered Applications. The J2EE Tutorial. http://java.sun.com/j2ee/tutorial

7 J2EE connector architecture. http://java.sun.com/j2ee/white

8 Architecting and designing J2EE[tm] Application. http://suned.sun.com/us/catalog

9 Introducing microsoft.net. http://www.microsoft.com/net/

10 White papers. http://www.microsoft.com/net/whitepapers.asp

11 Computational Grid. Grid research. http://www.globus.org/research/papers

12 张怡，胡建平. 网格计算. 北京：计算机世界报，2000，12，4

13 李真文，杨学良. J2EE在网站建设中的应用. 计算机科学，2001，28(5)

14 徐泽同. Internet软平台. 计算机系统应用，2000(9)

15 Zetong Xu, et al. Technology of Shared LANs & Switched LANs in internetworking. In: Proc. Intl. Conf. on CADEM'95. 2-16 Oct. 1995