Agent 的遗传算法研究*)

On Agent's Genetic Algorithm

李凡长[1]　佘玉梅[2]

(苏州大学计算机工程系　苏州 215006)[1]　(云南民族学院计算中心　昆明 650031)[2]

Abstract　Agent is likely human or intelligence object, that has ability to autonomy, guess, repercussion, cooperate, self-techer, mutual learning and so on. Based on theories of Darwin's nature evolution and Mendel's hereditary and variation, in this paper, the Agent's genetic algorithm and evolution model are given. By this work, which has enriched the Agent's content system theory.

Keywords　Genetic algorithm, Evolution, Hereditary, Variation

Agent 是指具有智能的人，或其它智能物或相当于智能物体的实体，以及能进行种种工作的软件等[1]。这种 Agent 对给定介质环境中的事件变化能迅速作出反应，具有自治、推测、反响、协作、自学习和相互学习等能力。鉴于 Agent 的这些特点，借助 Darwin 自然进化论与 Mendel 遗传变异理论来研究 Agent 是科学的、合理的。我们知道，在生物的演化过程中，生命期模式在个体的成长中占据十分重要的地位[2]；生态环境中的生物个体在进化时，即使在它自己的局部环境，也是有生命周期的。个体在不同的局部环境和生命期的各个不同阶段具有不同的成长特性，并在生命期模式的控制下体现出实际成长的特点。关于 Agent 遗传理论的研究，目前还未见诸文字。综上所述，本文抓住 Agent 类似于生物的特性，从遗传变异和生物演化两个生物的本质属性方面给出 Agent 的遗传算法与演化模型，真正从本质上刻画 Agent 的智能本能行为，填补了这方面的工作。

1. 基本概念

为了以后讨论的方便，我们先做一些约定。

约定 1　Agent 是指有智能的人，它具有生物的遗传，变异特性。

此约定告诉我们，现在对 Agent 的研究可以借助 Darwin 自然进化论与 Mendel 遗传变异理论来进行。因此，进一步有：

约定 2　由多个 Agent 构成的集合称为 Agent 族。

众所周知，Agent 理论与技术被喻为 21 世纪软件技术取得重大突破的突破口。为了实现这种目标，把一个软件称为一个 Agent，多个软件就称为 Agent 族。

约定 3　由 Agent 的不同应用领域确定 Agent 的族别，例：若 Agent 用于通信，则称通信 Agent；若 Agent 用于空间数据，则称为数据多 Agent。

由如上几个约定可以得到：

约定 4　Agent 与 Agent 之间是能复制、杂交的，且是随机进行的。

约定 5　用于进行杂交的 Agent 构成的群体称为 Agent 种群。

根据这些约定，我们进一步给出 Agent 求解问题模型，由此有：

约定 6　Agent 求解的全局化问题可描述为：

(P)　$\max\{F(x): x\in D\subset R^n\}, F: D\subset R^n \subset R^1$

其中(P)为基本策略求解问题，F 为目标函数，“x”为染色体的编码(最常见的为定常二进制数串编的)。D 为编码空间，R 为遗传空间。

约定 7　Agent 的遗传算法是通过求解组合优化问题

(P′)　$\max\{f(x): x\in S\}$

来求解问题(P)的，这里 $S=\{0,1\}^L$ 为 D 的编码空间，(即 D 中所有实变量的长度为 L 的二进制数串码全体)。

2. Agent 的简单遗传算法

遗传算法是一个群体优化过程，它不是由一个初始值而是由一组始值即一组 Agent 群出发进行优化，优化的过程就是不断繁衍、竞争、遗传和变异的过程，根据约定 7，我们有：

求解问题(P′)的简单 Agent 的遗传算法(Genetic Algorithm of Agent, GAA)可描述如下：

GAA：

步 1　初始化

1.1　指定 Ag 群体规模 N，杂交概率 P_c，变异概率 P_m 及终止进化准则；

1.2　确定初始种群 $X(0)=(X_1(0), X_2(0), \cdots, X_N(0))\in S^N$，幂 $k=0$。

步 2　种群进化

2.1(选择)　依据 $X_i(k)$ 的适应性，随机种群，重复地从 $X(k)$ 中选取 N 对个体为母体；

2.2(杂交)　依概率 P_c 独立地对所选 N 对母体进行杂交，以产生新的 N 个中间个体；

2.3(变异)　依概率 P_m 独立地对杂交生成的 N 个中间个体执行变异，从而生成新一代种群。

$X(k+1)=(X_1(k+1), \cdots, X_N(K+1))$

步 3　终止检验

如果 $X(k+1)$ 满足假设的进化终止准则，则停止，否则置 $k:=k+1$，转步 2。在 GAA 中，种群进化步(即步 2)反映了 Agent 遗传算法对生物进化过程的类化。在步 2.1—2.3 中所出现的选择杂交和变异作用(理解作为对应算子)，可做进一步

*)本文的研究得到国家自然科学基金和苏州大学科研处基金资助。李凡长　教授，主要研究方向是人工智能、动态模糊智能理论、智能软件等。佘玉梅　副教授，主要研究方向是人工智能。

解释如下：

(1)Agent 的选择算子(记为 T_s)：它用于刻画算法允许父代 Agent 种群每一个体繁殖的可能性。用 $S^N=\{(X_1,X_2,\cdots,X_N);X_i\in S,i=1,2,\cdots,N\}$，$S^2=\{(X_1,X_2);X_1,X_2\in S\}$ 分别表示种群空间和母体空间，(Ω,P) 为一抽象概率空间，则选择算子 T_s 可看作是 $S^N\times\Omega\to S^2$ 的一个随机映射。依据"适者生存，不适者遭淘汰"的自然选择规律，T_s 常以与个体适应性成比例的方式定义。换言之，对任何给定的种群 $X\in S^N$，在 T_s 作用下选取 $(Y_1,Y_2)\in S^2$ 为母体的概率为

$$P\{\omega;T_s(X,\omega)=(Y_1,Y_2)\}=\begin{cases}\dfrac{f(Y_1)f(Y_2)}{\sum_{i=1}^{N}f(X_i)^2}, & 如果\{Y_1,Y_2\}\subset\{X_1,\cdots,X_N\},\\ 0, & 否则。\end{cases}$$

(2)Agent 的杂交算子(记为 T_c)：该算子作用于两个个体而产生一个新的个体(因而是 $S^2\times\Omega\to S$ 的随机映射)，是对生物种群有性繁殖的抽象。常见的杂交方式有单点杂交、多点杂交和均匀杂交等[5]。以单点杂交为例，对于给定的允许杂交概率 P_c 和母体对 $(X_1,X_2)\in S^2$，单点杂交的作用方式是：在所规定的编码格式(长度为 L 的二进制数串)中随机选取一点(杂交位置)，然后依概率 P_c 交换 X_1 与 X_2 杂交位置以后的部分，以形成新的 2 个个体，任选其中之一便获得由 X_1 和 X_2 所产生的单点杂交后代。所以，对于给定的母体对 $X_i=(X_{i1},X_{i2},\cdots,X_{iL})\in S,i=1,2$，单点杂交算子可定义为

$$P\{\omega;T_c((X_1,X_2),\omega)=Y\}=\begin{cases}P_c/L, & 如果\ Y\neq X,但\ Y=AX_1+(I-A)X_2\\ 1-P_c, & 如果\ Y=X_1\\ 0, & 其它\end{cases}$$

其中 A 为前 $m(1\leqslant m\leqslant L)$ 个元素为 1，后 $L-m$ 个元素为 0 的对角阵，I 为 L 阶单位阵。

(3)Agent 的变异算子(记为 T_m)：这一算子是从 $S\times\Omega\to S$ 的映射。对于给定的个体 $X\in S$ 和变异概率 P_m，T_m 对 X 的作用在于独立地以概率 P_m 对 X 的各分量进行改变，其意义在于模拟生物进化中基因的变异。这样，$\forall\ X\in S$，变异算子定义为

$$P\{\omega;T_m(X,\omega)=Y\}=P_m^{|X-Y|}(1-P_m)^{L-|X-Y|},$$

这里 $|X-Y|$ 表示 X 与 Y 间的 Hamming 距离(即 X 与 Y 间取不同分量值的位数)。

利用以上定义的 Agent 的选择、杂交和变异算子，GAA 可写做以下种群迭代过程：

$$X(k+1)=\{T_m^i(T_c^i(T_s^i(x(k)))),i=1,2,\cdots,N\},k\geqslant 1 \tag{1.1}$$

其中 $T_m^i,T_c^i,T_s^i,i\geqslant 1$ 是相互独立，且分别是与 T_m,T_c,T_s 同分布的选择、杂交和变异算子。由于从 $X(k)$ 生成 $X(k+1)$ 的方式是随机的，且第 $k+1$ 代种群 $X(k+1)$ 的生成仅与第 k 代种群相关，由(1.1)式，GAA 种群序列 $\{X(k),k\geqslant 0\}$ 是一个以 S^N 为状态空间的马氏链，以下简称 GAA 马氏链。

对任何种群 $X=(X_1,\cdots,X_N)$，$Y=(Y_1,\cdots,Y_N)$，根据 Agent 的选择、杂交和变异算子的定义不难推出[3]

$$\prod_{i=1}^{N}P\{T_m^i(T_c^i(T_s^i(X)))=Y_i\}>0 \tag{1.2}$$

因此，GAA 马氏链的一步转移概率矩阵 $(P_k(X,Y))_{X,Y\in S^N}$ 非负且与 k 无关，从而是时齐、非周期和不可约的(所以 GAA 种群序列 $\{X(k)\}$ 从一个状态出发，将以概率 1 在有限步内达到 S^N 中任一状态)。

这一论证对于不存在选择与杂交作用的 GAA 仍是有效的。这意味着：从理论上讲，只要有变异存在，GAA 必然是不收敛的，从而也不会发生过早收敛。但是，从普通 GA 我们观察到，在 GA 的执行实践中，杂交概率 P_c 通常取在 0.6～0.95 之间，而变异概率仅取在 0.001～0.01 之间[5]，故变异使种群发生显著改变的概率极小，而杂交算子在 GA 中起着核心的作用。基于这一事实，我们认为 GAA 也会出现类似的过早收敛。所以，下面将从分析杂交算子的搜索能力入手，详尽刻画杂交算子引起过早收敛的特征与起因。

3. GAA 特征分析及相关理论

先从刻画 Agent 的杂交算子在 GAA 中的搜索能力入手。

定义 1 设 $X=(X_1,\cdots,X_N)\in S^N$ 为一种群，用 $\lambda(X)$ 表示向量 $\sum_{i=1}^{N}X_i$ 取值不为 0 和 N 的分量个数，称作 X 的多样度。称 $\beta(X)=L-\lambda(X)$ 为 X 的成熟度，它表示 X 中所有个体具有相同取值的分量个数。

若将种群 X 用矩阵表示，即

$$X=[X_1|X_2|\cdots|X_N]^T=\begin{bmatrix}x_{11}&x_{12}&\cdots&x_{1L}\\x_{21}&x_{22}&\cdots&x_{2L}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\x_{N1}&x_{N2}&\cdots&x_{NL}\end{bmatrix},$$

则 $\lambda(X)$ 表示矩阵 X 中分量不全为 0 或 1 的列的个数。特别地，当 $\lambda(X)=0$ 时，X 的 N 个个体全部相同。

回想，一个 Schema L 是指编码空间 S 中具有相同构形(Configuration)的编码子集[4]，它可表示为

$$L=\{X=(x_1,\cdots,x_L)\in S;x_{i_k}=a_{i_k},1\leqslant i_k\leqslant L,1\leqslant k\leqslant K\}$$

其中 $K(1\leqslant K\leqslant L)$ 称作 L 的定义长度，$\{a_{i_k};1\leqslant k\leqslant K\}$ $(a_{i_k}\in\{0,1\})$ 称作 L 的定义分量值，$\{i_1,\cdots,i_k\}$ 称作定义分量。为了突出 L 的定义分量与分量值，也可将 L 记作 $L(a_{i_1},\cdots,a_{i_k})$。显然 $L(a_{i_1},\cdots,a_{i_k})$ 包含 2^{L-K} 个不同的个体。

定义 2 设 $X=(X_1,\cdots,X_N)\in S^N$，$\lambda(X)$ 为多样度，$\beta(X)$ 为成熟度。设 $\{X_1,\cdots,X_N\}$ 中具有相同取值的分量为 $\{i_1,\cdots,i_k,\cdots,i_{\beta(X)}\}$，而在 i_k 处的共同取值为 $a_{i_k}\in\{0,1\}$，则 Schema $L(a_{i_1},\cdots,a_{i_{\beta(X)}})$ 称作包含 X 的极小 Schema，记作 $L(a_{i_1},\cdots,a_{i_{\beta(X)}};X)$。

利用定义 1 和定义 2，可证明精确刻画杂交算子在 GAA 中搜索能力的下述定理。

定理 1 设 $\{\overline{X}(k),k\geqslant 0\}$ 表示 GAA 当变异概率 $P_m=0$ 时相应的 GAA 马氏链，如 $\overline{X}(0)=X_0$，则

(1)$\forall\ Y\in L(a_{i_1},\cdots,a_{i_{\beta(X)}};X_0)$，必存在 $n\geqslant 0$，使得 $P\{Y\in\overline{X}(n)/\overline{X}(0)=X_0\}>0$；

(2)$\forall\ Y\notin L(a_{i_1},\cdots,a_{i_{\beta(X)}};X_0)$ 和 $n\geqslant 0$，均有 $P\{Y\in\overline{X}(n)/\overline{X}(0)=X_0\}=0$。

证 (1)设 $Y=(y_1,y_2,\cdots,y_L)\in L(a_{i_1},\cdots,a_{i_{\beta(X)}};X_0)$，

$$X_0=[X_1,X_2,\cdots,X_N]^T=\begin{bmatrix}x_{11}&x_{12}&\cdots&x_{1L}\\x_{21}&x_{22}&\cdots&x_{2L}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\x_{N1}&x_{N2}&\cdots&x_{NL}\end{bmatrix}$$

由于 X_0 的多样度为 $\lambda(X_0)$，为简便起见，不妨设 X_0 的个体前 $L-\lambda(X_0)=\beta(X_0)$ 个分量取值相同，即

$x_{ij}=y_j, \forall\ 1\leqslant i\leqslant N, 1\leqslant j\leqslant \beta(X_0)$

并且由种群多样度的定义,任给 $\beta(X_0)+1\leqslant j\leqslant L$,必存在 X_0 的某一个个体 X_i,使其第 j 个分量 x_{ij} 等于 y_j。

首先考虑 $\lambda(X_0)=2$ 的情形,此时 X_0 的所有个体的前 L−2 个分量取值相同,且

$x_{ij}=y_j, \forall\ 1\leqslant i\leqslant N, 1\leqslant j\leqslant L-2$

取 $1\leqslant p,q\leqslant N$,使得 $x_{p(L-1)}=y_{L-1}$,$x_{qL}=y_L$。$Z=(Z_1,\cdots,Z_N)\in S^N$,使得 $Z_i=X_i(i\neq p)$,而 Z_p 为 X_p 与 X_q 在第 L 分量处杂交所得个体,即

$$Z_p=(x_{p1},x_{p2},\cdots,x_{p(L-1)},x_{qL})=(y_1,y_2,\cdots,y_{L-1},y_L)=Y$$

因此依杂交、选择算子的定义可知

$$P\{Y\in\overline{X}(1)/\overline{X}(0)=X_0\}\geqslant P\{\overline{X}(1)=Z/\overline{X}(0)=X_0\}\geqslant$$

$$\Big(\prod_{i\neq p}\frac{f^2(X_i)}{(\sum\limits_{j=1}^{N}f(X_j))^2}\Big)\cdot\Big(\frac{P_c}{L}\frac{f(X_p)f(X_q)}{(\sum\limits_{j=1}^{N}f(X_j))^2}\Big)>0$$

即 $\lambda(X_0)=2$ 情形(1)得证。

现假设 $\lambda(X_0)=m-1$ 时定理结论成立,$\lambda(X_0)=m$ 情形。此时,

$x_{ij}=y_j, \forall\ 1\leqslant j\leqslant L-m, 1\leqslant i\leqslant N$

且必存在 $1\leqslant i_0\leqslant N$ 使得 $x_{i_0L}=y_L$。取 $Z(1)=(Z_1,Z_2,\cdots,Z_N)$ 满足

$$Z_{i_0}=X_{i_0}, Z_i=(x_{i1},x_{i2},\cdots,x_{i(L-1)},x_{i_0L}), i=i_0$$

则 Z(1) 的多样度为 $\lambda(z(1))=m-1$,且 $Y\in L(y_1,y_2,\cdots,y_{L-m},y_L;Z(1))$。由杂交、选择算子的定义,于是

$$P\{\overline{X}(1)=Z(1)/\overline{X}(0)=X_0\}$$

$$\geqslant\Big[\prod_{i\neq i_0}\Big(\frac{f(X_i)f(X_{i_0})}{(\sum\limits_{j=1}^{N}f(X_j))^2}\cdot\frac{P_c}{L}\Big)\Big]\frac{f^2(X_{i_0})}{(\sum\limits_{j=1}^{N}f(X_j))^2}>0$$

根据归纳假设及马氏链 $\{\overline{X}(k),k\geqslant0\}$ 的时齐性,必存在 $n'>0$ 使得

$$P\{Y\in\overline{X}(n')/\overline{X}(1)=Z(1)\}>0$$

令 $n=n'+1$,则由马氏性知

$$P\{Y\in\overline{X}(n)/\overline{X}(0)=X_0\}\geqslant P\{Y\in\overline{X}(n'+1)/\overline{X}(1)=Z(1)\}\times P\{\overline{X}(1)=Z(1)/\overline{X}(0)=X_0\}>0$$

从而 $\lambda(X_0)=m$ 时定理结论也成立。于是,定理 1(1)得证。

(2)用记号 $X\subset L(a_{i_1},\cdots,a_{i_{\beta(X)}};X_0)$ 表示种群 X 的每一个体均属于 Schema $L(a_{i_1},\cdots,a_{i_{\beta(X_0)}};X_0)$,此时 X 的所有个体在分量 $i_1,i_2,\cdots,i_{\beta(X_0)}$ 处取值相同,从而选择、杂交不改变种群个体在这些分量处的取值。所以 $\forall\ Y\subset L(a_{i_1},\cdots,a_{i_{\beta(X_0)}};X_0)$,

$$P\{\overline{X}(k+1)\subset L(a_{i_1},\cdots,a_{i_{\beta(X_0)}};X_0)/\overline{X}(k)=Y\}=1$$

在下式中记 $L=L(a_{i_1},\cdots,a_{i_{\beta(X_0)}};X_0)$,则依马氏性有

$$P\{\overline{X}(n)\subset L/\overline{X}(0)=X_0\}\geqslant\sum_{Y(k)\subset L,1\leqslant k\leqslant n}P\{\overline{X}(1)=Y(1)/\overline{X}(0)=X_0\}\cdot P\{\overline{X}(2)=Y(2)/\overline{X}(1)=Y(1)\}\cdots P\{\overline{X}(n)=Y(n)/\overline{X}(n-1)=Y(n-1)\}=1$$

由于 $Y\in\overline{X}(n)$ 等价于 $\overline{X}(n)\not\subset L$,故知

$$P\{Y\in\overline{X}(n)/\overline{X}(0)=X_0\}=P\{\overline{X}(n)\not\subset L/\overline{X}(0)=X_0\}=0$$

(2)得证。

注 1 定理 1 中(1)的说明:在 GAA 中杂交算子有能力搜索包含当前种群极小 Schema 中的所有个体,而(2)则说明:杂交算子的搜索能力也仅限于包含当前种群的极小 Schema。这样,杂交算子的搜索能力由定理 1 给出了完全刻画。

我们注意到,当 GAA 中当前种群的多样度越大时,包含它的极小 Schema 的定义长度越小,从而它包含更多的可行解种群。所以,当前种群的多样度越大,杂交算子的搜索能力越强。从定理 1 推出:如果初始种群 X(0)的极小 Schema 包含问题(P′)的某个最优解,则 GAA 应用能力搜索到这个最优状态。然而,正如以下要说明的,杂交算子在搜索过程中存在着严重的成熟化效应——它在起搜索作用的同时,不可避免地使种群多样度渐趋于 0,从而逐渐减少自己的搜索范围,以引起过早收敛。

定义 3 称种群集 $A=A_1\times A_2\times\cdots\times A_N\subset S^N$ 为早熟集,如果 $\forall\ X\in A$ 和任何 $1\leqslant i\leqslant N$,必有 $P\{T_c(T_s(X))\in A_i\}=1$。

显然,$S^N=S\times S\times\cdots\times S$ 是"最大"早熟集,而 S^N 中所有形如 $\{X\}\times\{X\}\times\cdots\times\{X\}$,$X\in S$ 的单点种群集为"最小"的早熟集(称作单点型早熟集)。用 $B=\{\{X\}\times\cdots\times\{X\};X\in S\}$ 表示所有单点型早熟集全体。不难看到,B 包含适应性函数 f(x)的所有全局极小、局部极小构成的单点型早熟集。

引理 1 如果 $A=A_1\times A_2\times\cdots\times A_N$ 为早熟集,则 $\forall\ 1\leqslant i,j\leqslant N$,必有 $A_i=A_j$。

证 仅需证明 $A_1\subset A_2$。$\forall\ X_1\in A_1$,取 $Y=(X_1,X_2,\cdots,X_N)\in A$,则 $P\{T_c(T_s(Y))=X_1\}\geqslant\dfrac{f^2(X_1)}{(\sum\limits_{j=1}^{N}f(X_j))^2}>0$,从而依定义必有 $X_1\in A_2$,故引理 1 得证。

引理 2 若 $A\times A\times A\cdots\times A$ 为早熟集,则 A 必是包含 A 的极小 Schema。

证 取 L 为包含 A 中所有个体的极小 Schema,则 $A\subset L$。下面证明 $L\subset A$。$\forall\ X\in L$,设 A 的多样度为 $\lambda(A)$,成熟度为 $\beta(A)$,相应的极小 Schema 记作 $L(a_{i_1},\cdots,a_{i_{\beta(A)}};A)$,则 $\forall\ 1\leqslant k\leqslant\beta(A)$。

$x_{i_k}=a_{i_k}$

其中 x_{i_k} 为 X 的 i_k 分量。考虑分量 $I=\{1,2,\cdots,L\}\backslash\{i_1,\cdots,i_{\beta(A)}\}$。将 I 重新编号,并记作 $\{j_1,j_2,\cdots,j_{\lambda(A)}\}$。显然 $\forall\ 1\leqslant k\leqslant\lambda(A)$,必存在 $Y_k\in A$ 使得 $y_{k_{j_k}}=x_{j_k}$(其中 x_{j_k} 为 X 的 j_k 分量)。取 $\overline{Y}_1=(Y_1,Y_2,Y_2,\cdots,Y_2)$,则

$P\{T_c(T_s(\overline{Y}_1))=Y_{12}\}>0$

其中 Y_{12} 表示 Y_1 与 Y_2 在分量 j_2 处杂交所得个体(于是 $Y_{12}\in A$)。取

$\overline{Y}_2=\{Y_{12},Y_3,\cdots,Y_3\}$

则 $P\{T_c(T_s(\overline{Y}_2))=Y_{13}\}>0$,$Y_{13}$ 表示 Y_{12} 与 Y_3 在分量 j_3 处杂交所得个体(从而 $Y_{13}\in A$),且 Y_{13} 与 X 的 j_1,j_2,j_3 分量已经相同。递归下去直至第 $\lambda(A)$ 步,$Y_{1\lambda(A)}\in A$,且 $Y_{1\lambda(A)}$ 与 X 的 $j_1,j_2,\cdots,j_{\lambda(A)}$ 分量均相同,$Y_{1\lambda(A)}=X$,所以 $X\in A$,从而 $L\subset A$,结论得证。

类似于定理 1(2)的证明,也容易证明 GAA 中的种群一旦落入某早熟集,则选择杂交算子无法使它逃离该早熟集,即有

引理 3 设 $A\times A\times\cdots\times A$ 为早熟集,$\{\overline{X}(k),k\geqslant0\}$ 为 GAA 当 $P_m=0$ 时相应的 GAA 马氏链,则 $\forall\ n\geqslant1$

$$P\{\overline{X}(n)\in A\times A\times\cdots\times A/\overline{X}(0)\in A\times A\times\cdots\times A\}=1$$

由引理 1~3,可证明下述有关杂交算子成熟化效应的结论:

定理 2 设 $\{\overline{X}(k),k\geqslant0\}$ 为 GAA 当 $P_m=0$ 时对应的 GAA 马氏链,B 为单点型早熟集全体,即 $B=\{(X,X,\cdots,X);X\in S\}$,则

(1) $\{\overline{X}(k),k\geq 0\}$ 以概率 1 收敛到 B，即

$$P\{\lim_k \overline{X}(k)\in B\}=1$$

(2)种群序列的多样度以概率 1 单调减，以非零概率严格单调降，且以概率 1 收敛到 0，即 $\forall\ k\geq 0$，

$$P\{\lambda(\overline{X}(k+1))\leq\lambda(\overline{X}(k))\}=1,$$

$$P\{\lambda(\overline{X}(k+1))<\lambda(\overline{X}(k))\}>0,$$

$$P\{\lim_k \lambda(\overline{X}(k))=0\}=1。$$

证 (1)设 $P(X,Y)$，$X,Y\in S^N$ 为 $\{\overline{X}(k),k\geq 0\}$ 的一步转移概率，即 $P(X,Y)=P\{\overline{X}(k+1)=Y/\overline{X}(k)=X\}$，则 $\forall\ X=(X_1,\cdots,X_N)\in S^N$ 和 $k\geq 0$，必有

$$P(X,B):=\sum_{Y\in B}P(X,Y)\geqslant\sum_{i=1}^{N}P\{\overline{X}(k+1)$$

$$=(X_i,X_i,\cdots,X_i)/\overline{X}(k)=X\}$$

$$\geqslant\sum_{i=1}^{N}\left[\frac{f^2(X_i)}{(\sum_{j=1}^{N}f(X_j))^2}\right]^N>0$$

令 $a=\inf_{Y\in B^c}P(Y,B)$，显然 $0<a<1$。定义

$$T=\inf\{k\geq 1;\overline{X}(k)\in B\}。$$

若 $X(0)\in B$，则依引理 3 知 $P\{T=1\}=1$，从而结论(1)成立。设 $X(0)=X\notin B$，则 $\forall\ \in\geq 1$，

$$P\{T=k\}=\sum_{Y_1,\cdots,Y_{k-1}\notin B}P(X,Y_1)P(Y_1,Y_2)\cdots P(Y_{k-2},$$

$$Y_{k-1})P(Y_{k-1},B)\leqslant(1-a)^{k-1}。$$

从而随机变量 T 的数学期望 $E(T)=\sum_{k=1}^{\infty}kP\{T=k\}<+\infty$，推出 $P\{T<+\infty\}=1$。依 T 的定义并结合引理 3 知 $T<+\infty$ 时必有 $\lim_k\overline{X}(k)\in B$，因此 $P\{\lim_k\overline{X}(k)\in B\}=1$。

(2)用 $L(X)$ 表示包含 X 的极小 Schema，则

$$P\{\lambda\overline{X}(k+1))\leqslant\lambda(\overline{X}(k))\}=\sum_{X\in S^N}P\{\lambda(\overline{X}(k+1))$$

$$\leqslant\lambda(X)/\overline{X}(k)=X\}\cdot P\{\overline{X}(k)=X\}\geqslant$$

$$\sum_{X\in S^N}P\{\overline{X}(k+1)\in L(X)\times L(X)\times\cdots\times L(X)/\overline{X}(k)$$

$$=X\}\cdot P\{\overline{X}(k)=X\}=1$$

此说明种群多样度以概率 1 单调降。由于

$$P\{\lambda(\overline{X}(k+1))<\lambda(\overline{X}(k))/X(k)=X\}=P\{\lambda(\overline{X}(k+1))\leqslant$$

$$\lambda(X)-1/\overline{X}(k)=X\}\geqslant$$

$$P\{\lambda(\overline{X}(k+1))=0/\overline{X}(k)=X\}\geqslant[\frac{f^2(X^1)}{(\sum_{j=1}^{N}f(X_j))^2}]^N>0$$

故 $P\{\lambda(\overline{X}(k+1))<\lambda(\overline{X}(k))\}>0$，从而种群多样度以非零概率严格单调降。

另外，由于 $\forall\ Y\in B,\lambda(Y)=0$，因此若 $\lim_k\overline{X}(k)\in B$，则必有 $\lim_k\lambda(\overline{X}(k))=0$，从而 $P\{\lim_k\lambda(\overline{X}(k))=0\}=1$，即种群多样度以概率 1 收敛到 0。证毕。

注 2 定理 2 表明：无变异的 GAA 总是收敛的，而且其收敛在多样度意义下还单调。然而，我们注意到，作为 GAA 此时的收敛极限，它既可以是问题(P′)的最优解(理想情况)，又可以是问题(P′)的局部极值单点型早熟集，还可以是非极值单点型早熟集(这后两种情形即引起 GAA 过早收敛)。这揭示了杂交算子所具有的二重性：它既可强迫算法收敛，使之达到问题(P′)的全局最优，而又可能在搜索过程中，过早成熟而使算法终止于非(全局或局部)最优状态。所以，我们的理想目标是合适修正遗传算法，使它“既要成熟又不要过早成熟，既要收敛又不要过早收敛”。

以下考察 GAA 早熟的过程特征。特别地，将推导在选择、杂交算子作用下趋于成熟的概率表达。

定义 4 给定种群 $X=\{X1,\cdots,X_N\}\in S^N$，$X_i=(x_{i1},x_{i2},\cdots,x_{iL})^T\in S(i=1,2,\cdots,N)$。对任何 $k\in\{1,2,\cdots,L\}$，令 $I_0^{(k)}=\{i\in\{1,2,\cdots,N\};x_{ik}=0\}$，$I_1^{(k)}=\{i\in\{1,2,\cdots,N\};x_{ik}=1\}$，

并记

$$f_0^{(k)}=\sum_{i\in I_0^{(k)}}f(X_i),f_1^{(k)}=\sum_{i\in I_1^{(k)}}f(X_i)$$

称

$$a_k=f_0^{(k)}/\sum_{j=1}^{N}f(X_j),k=1,2,\cdots,L$$

为种群 X 中第 k 个分量为 0 的个体适应比；称 $b_k=1-a_k$ 为种群 X 中第 k 个分量为 1 的个体适应比；称 $|a_k-\frac{1}{2}|$ 为种群 X 中第 k 个分量为 0 的个体适应比的偏差。

定理 3 设 $\{\overline{X}(n),n\geq 0\}$ 为 GAA 当 $P_m=0$ 时的马氏链，则对任何固定的 $k\in\{1,2,\cdots,L\}$。$P\{\overline{X}(1)$ 的所有个体在分量 k 处取相同值 $/\overline{X}(0)=X\}=a_k^N+b_k^N$。

证 令

$A=\{\overline{X}(1)$ 的所有个体在分量 k 处取值相同$\}$，

$A_i=\{\overline{X}(1)$ 的所有个体在分量 k 处取值为 $i\}$，$i=0,1$，

则 $A=A_1\cup A_2$，$A_1\cap A_2=\varnothing$，从而

$$P\{A/\overline{X}(0)=X\}=P\{A_0/\overline{X}(0)=X\}+P\{A^1/\overline{X}(0)=X\}$$

根据选择、杂交算子的含义，

$P\{A_0/\overline{X}(0)=X\}=$

$$[\sum_{i,j\in I_0^{(k)}}\frac{f(X_i)f(X_j)}{(\sum_{m=1}^{N}f(X_m))^2}+\sum_{i\in I_0^{(k)}}\sum_{j\in I_0^{(k)}}\frac{f(X_i)f(X_j)}{(\sum_{m=1}^{N}f(X_m))^2}\frac{L-k}{2}+$$

$$\sum_{i\in I_0^{(k)}}\sum_{j\in I_1^{(k)}}\frac{f(X_i)f(X_j)}{(\sum_{m=1}^{N}f(X_m))^2}\frac{k}{L}(1-P_c)+\sum_{i\in I_1^{(k)}}\sum_{j\in I_1^{(k)}}\frac{f(X_i)f(X_j)}{(\sum_{m=1}^{N}f(X_m))^2}\cdot$$

$$\frac{k}{L}P_c=\left[\frac{(\sum_{i\in I_0^{(k)}}f(X_i))^2}{(\sum_{m=1}^{N}f(X_m))^2}+\sum_{i\in I_0^{(k)}}\sum_{j\in I_0^{(k)}}\frac{f(X_i)f(X_j)}{(\sum_{m=1}^{N}f(X_m))^2}\right]^N$$

$$=(a_k^2+a_k(1-a_k))^N=a_k^N$$

同理可证 $P\{A_1/\overline{X}(0)=X\}=(1-a_k)^N=b_k^N$。证毕。

注 3 定理 3 说明：杂交算子使 GAA 中种群趋于“成熟”的趋势是与种群规模 N 和种群中第 k 个分量为 0 的个体适应比的偏差 $|a_k-\frac{1}{2}|$ 成反比的。换言之，种群规模越大，在某分量处为 0 的个体适应比越接近 $\frac{1}{2}$，则种群越不易在杂交算子趋于成熟(从而产生过早收敛)。

注 4 根据以上分析看到：文[4]所提出的通过动态改变适应性函数的方法来克服 GAA 过早收敛是有理论基础的建议(因为，在不改变当前种群平均适应度的前提下，变换适应性函数使个体适应度与平均适应度更加接近，自然会使得 a_k 更接近 $\frac{1}{2}$，从而降低杂交算子的成熟化)。然而，最近文[5]所提出的“当种群最优个体适应性与种群平均适应性相差较小时采用较大杂交、变异概率，以此消除 GAA 过早收敛”的建议难以从理论上加以支持(因为，定理 3 表明：杂交算子使 GAA 过早收敛的趋势是与杂交概率无关的，因而所建议的方

法只能起加速杂交算子搜索种群所处极小 Schema 的作用)。为了解决这种现象,我们借助 Agent 的进化模型来协调控制。

4. Agent 的演化模型

上节我们给出了 Agent 的遗传算法刻画,从生物进化的角度考虑,这仅仅是一个侧面,因此本节进一步给出 Agent 的演化模型。

众所周知,生命期模型是生物进化的主要特征之一,生物个体在生态环境中的生长是分阶段进行的,每一个阶段的成长特点并不相同,具体来讲,生物个体的生长历程一般被分为3个主要阶段:幼年期(此阶段的早熟问题前面已作了详细分析)、成熟期和衰态期。为了更客观地反映 Agent 的真实情况,我们用如下模型来刻画 Agent 的演化过程,即 Agent 的演化模型为:

$$AM=(Ag_1 \rightarrow Ag_2) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} Ag_1(u)=\begin{cases} 0 & 0 \leqslant u \leqslant m_1 \\ [1+(\frac{u-m_1}{u})^{-2}]^{-1} & m_1 < u \leqslant m_2 \end{cases} \\ Ag_2(u)=\begin{cases} 1 & 0 \leqslant u \leqslant m_1 \\ [1+(\frac{u-m_1}{u})^{-2}]^{-1} & m_1 \leqslant u < m_2 \end{cases} \end{cases}$$

从模型显然可得到结论:通过该模型可以协调控制 GAA 的过早收敛问题,即达到 GAA"要成熟,但不要早熟,要收敛,但不要过早收敛"的目的。

结束语 近年来,关于 Agent 的研究已取得了许多成果,但也存在不少问题,如文[6]所述现在对 Agent 的研究最缺乏的是理论基础不足。因此利用 Darwin 自然进化理论与 Mendel 遗传变异理论对 Agent 基本理论做深入研究,本文作出如下贡献:

1. 给出了 Agent 的遗传算法描述;
2. 给出了 Agent 的演化模型;
3. 对 Agent 早熟现象进行了分析,给出了若干结论;并提出用 Agent 进化模型来控制 GAA 的早熟问题。

本文的研究工作虽然填补了一些空白,但它仅是一些初步成果,还有许多内容需要补充,在今后的工作中将给出更全面、系统的 Agent 的遗传理论来进一步完善该内容,同时实现一些应用系统,使这些理论成果真正对 Agent 走向更广泛的应用领域有直接的指导作用。

参考文献

1 Hu Shanli,et al. The logic tool used in the formalized research on agent. Computer Science (in Chinese),1999,26(2):1~4
2 Huberman B A. The Ecology of computation. The Netherlands: Elservier Science Publishers B. V, 1988
3 Rudolph G. Convergence analysis of canonical genetic algorithms. IEEE Trans on Newral Networks, 1994,5(1):96~101
4 Vrscay E R. Moment and Collage methods for the inverse problem of fractal construction with iterated function systems. In: Peitgen H O. et al. eds. Fractals in the Fundamental and Applied Seiences. Netherlands: Elsevier Sei Publishers B. V, 1991. 443~461
5 Srinivas M,Patnaik L M. Adaptivs probabitities of crossover and mutation in genetic algorithms. IEEE Trans. Sys., Man and Cybern,1994, 24(4):656~667
6 Liu Dayou,et al. Agents: Present Status and Trands. Joumal of Software (in Chinese),2000,11(3):315~321