

模糊 T-粗集的粗糙性测量^{*})

刘华文 史开泉

(山东大学数学与系统科学学院 济南250100)

Measures of Roughness of Fuzzy T-Rough Sets

LIU Hua-Wen SHI Kai-Quan

(School of Mathematics and System Sciences, Shandong University, Jinan 250100)

Abstract In this paper, we discuss roughness measure of the fuzzy T-rough sets, and introduce an axiom description of the degree of roughness and a characteristic theorem. Furthermore, we give several special expressions of the degree of roughness. The results of this paper will be helpful to the farther study and application of the theory of rough sets and fuzzy sets.

Keywords Rough sets, Rough fuzzy sets, Fuzzy T-rough sets, Degree of roughness

1 引言

模糊集与粗集理论在处理不确定性和不精确性问题方面都推广了经典集合论,它们都可以用来描述知识的不精确性和不完全性,但二者的着眼点不同:粗集理论着眼于集合的粗糙程度,模糊理论着眼于集合的模糊性;粗集理论基于集合中对象间的不可分辨性思想,模糊理论建立这个集合的子集边缘的病态定义模型;粗集理论的计算方法是知识的表达与简化,模糊理论的计算方法主要是连续特征函数的产生。二者结合形成的粗模糊集与模糊粗集不仅丰富了对信息系统中不完善、不准确知识的描述、处理,而且也为了C演算、随机集合、模型逻辑等几种知识近似模型提供了一种统一的描述。关于这两种集合的不确定性测量,文[2]给出其模糊性度量,文[3]定义了粗模糊集的粗糙度,文[4]将知识的不确定性考虑进去,给出粗模糊集的粗糙信息熵测量。由于实际问题中知识库中的知识往往是模糊的,因此有必要将模型推广,基于三角模的模糊粗集是一种推广方式,我们称之为模糊 T-粗集,它是粗集和粗模糊集的推广。本文的目的是讨论模糊 T-粗集的粗糙性测量,并给出其公理化描述。

2 模糊 T-粗集的概念

本文约定: $U = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ 是一非空有限集, $F(U)$ 为 U 的模糊幂集, $I = [0, 1]$ 。

定义2.1 设 A 是 U 上的一个模糊集, R 是 U 上的一个等价关系,定义 A 关于近似空间 (U, R) 的一对下近似 $\underline{A}_R$ 和上近似 $\overline{A}_R$ 为 U 上的一对模糊集合,其隶属函数分别为

$$\underline{A}_R(x) = \inf\{A(y) \mid y \in [x]_R\}, x \in U$$

$$\overline{A}_R(x) = \sup\{A(y) \mid y \in [x]_R\}, x \in U$$

其中 $[x]_R$ 为元素 x 在关系 R 下的等价类。若 $\underline{A}_R = \overline{A}_R$, 则称 A 是可定义的, 否则, 称 A 是粗模糊集。称 $\underline{A}_R$ 是 A 关于 (U, R) 的正域, 称 $(\overline{A}_R)'$ 是 A 关于 (U, R) 的负域, 称 $\overline{A}_R \cup (\underline{A}_R)'$ 为 A 的边界。

定义2.2 设 T 是 I 上的下半连续三角模, 定义二元算子 $\theta_T: I \times I \rightarrow I$ 为:

$$\theta_T(a, b) = \sup\{c \in I \mid T(a, c) \leq b\}, a, b \in I \text{ 称 } \theta_T \text{ 为 } T \text{ 的剩}$$

余蕴涵。

定义2.3 设 T 是 I 上的下半连续三角模, U 上的二元模糊关系 R 称为 T 相似关系, 若 R 是自反, 对称和 T 传递 (即 $T(R(x, z), R(x, y)) \leq R(z, y), x, y, z \in U$) 的。

U 上的 T 相似关系 R 对应 U 的一模糊 T 划分 $\{A_1, \dots, A_k\} \subset F(U)$, 称 (U, R) 为模糊 T 近似空间。

定义2.4 设 R 是 U 上的二元模糊 T 相似关系, 对 $\forall A \in F(U)$, A 关于近似空间 (U, R) 的下近似 $\underline{A}$ 和上近似 $\overline{A}$ 是定义在 U 上的一对模糊集, 其隶属函数定义为:

$$\underline{A}(x) = \bigwedge_{u \in U} \theta_T(R(u, x), A(u)), x \in U$$

$$\overline{A}(x) = \bigvee_{u \in U} T(R(u, x), A(u)), x \in U$$

若 $\underline{A} = \overline{A}$, 则称 A 是可定义的, 否则, 称 A 为模糊 T -粗集。模糊 T 近似空间 (U, R) 中模糊 T -粗集的全体记作 $FTRS_T(U, R)$ 。

定理2.1 设 R 是 U 上的一经典 T 相似关系 (即普通等价关系), 则

(1) 对于任意模糊集 $A \in F(U)$ 和 $x \in U$, 有

$$\underline{A}(x) = \inf\{A(u) \mid u \in [x]\}$$

$$\overline{A}(x) = \sup\{A(u) \mid u \in [x]\}$$

(2) 对于任意经典集 $X \subseteq U$ 和 $x \in U$ 有

$$\underline{X} = \{x \in U \mid [x] \subseteq X\}$$

$$\overline{X} = \{x \in U \mid [x] \cap X \neq \emptyset\}$$

该定理表明, 定义2.1中粗模糊近似算子和 Pawlak 近似算子都是模糊 T -近似算子的特殊情形。

定义2.5 设 $A, B \in FTRS_T(U, R)$, 定义如下关系

$$(1) A \leq B \Leftrightarrow \forall x \in U, \underline{A}(x) \leq \underline{B}(x), \overline{A}(x) \leq \overline{B}(x)$$

$$(2) A < B \Leftrightarrow \forall x \in U, \underline{A}(x) < \underline{B}(x), \overline{A}(x) < \overline{B}(x)$$

$$(3) A = B \Leftrightarrow A \leq B, B \leq A$$

$$(4) A' \text{ 的下近似为 } (\overline{A})', \text{ 上近似为 } (\underline{A})'.$$

3 模糊 T-粗集的粗糙性测量

定义3.1 设函数 $\rho: FTRS_T(U, R) \rightarrow R^+$ (R^+ 为所有正实数的全体)。若 ρ 满足:

(1) $\rho(A) = 0$ 当且仅当 A 是可定义的;

(2) 若 $A < B$, 则 $\rho(A) \geq \rho(B)$;

^{*}) 国家自然科学基金资助项目(70271048), 刘华文 副教授, 博士生, 主要研究领域为模糊推理, 模糊决策与识别, 粗集理论与应用。史开泉 教授, 博士生导师, 主要研究领域为粗集与粗系统, 模糊决策与识别。

(3) 对 $\forall A \in RFSs(U, R)$, 有 $\rho(A) = \rho(A')$;

(4) $\rho(A) = \text{card}(U) = n$ 当且仅当对 $\forall x \in U$, 有 $\underline{A}(x) = 0, \bar{A}(x) = 1$. $\text{card}(U)$ 表示集合 U 的基数. 则称 $\rho(A)$ 为 A 的粗糙度.

据上定义, 若 A 是 U 的经典子集且是全不可定义的, 即 $\underline{A} = \emptyset, \bar{A} = U$, 则 $\rho(A) = n$. 此时 A 有最大的边界域, $\rho(A)$ 应是最大的粗糙度.

定理 3.1 设 $A \in FTRSs(U, R)$, $\rho(A)$ 是最大值当且仅当对 $\forall x \in U$, 有 $\underline{A}(x) = 0, \bar{A}(x) = 1$.

证明: 充分性. 设对 $\forall x \in U$, 有 $\underline{A}(x) = 0, \bar{A}(x) = 1$. 由于对 $\forall B \in FTRSs(U, R)$, 有

$$\underline{B}(x) \geq 0, \bar{B}(x) \leq 1 (\forall x \in U),$$

即 $A < B$, 据定义 3.1 的条件 (2), 有 $\rho(A) \geq \rho(B)$.

必要性. 设 $B \in FTRSs(U, R)$, $\rho(B)$ 是最大值. 假设 $B \neq A$, 则存在 $x \in U$ 使得 $\underline{B}(x) \neq 0$ 或 $\bar{B}(x) \neq 1$. 不妨设 $\underline{B}(x) \neq 0$, 令

$$\underline{C}(x) = \frac{1}{2} \underline{B}(x), \bar{C}(x) = \bar{B}(x) (\forall x \in U),$$

则 $C < B$, 于是 $\rho(C) \geq \rho(B)$, 与 $\rho(B)$ 是最大值矛盾, 所以 $B = A$. $\square$

定理 3.2 设 $U = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, $A \in FTRSs(U, R)$. 若函数 $\Phi: D \rightarrow [0, 1]$ (其中 $D = \{(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] | y \geq x\}$) 满足下列条件:

- (a) $\Phi(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
- (b) $\Phi(x, y) = 1 \Leftrightarrow x = 0, y = 1$;
- (c) $\Phi(x, y) = \Phi(1 - y, 1 - x)$;
- (d) 若 $x \leq x', y \geq y'$, 则 $\Phi(x, y) \geq \Phi(x', y')$

则 $\rho(A) = \sum_{i=1}^n \Phi(\underline{A}(x_i), \bar{A}(x_i))$ 是 A 的粗糙度.

证明: 只需证明这里的 ρ 满足定义 3.1 的条件 (1)~(4) 即可.

(1) $\rho(A) = 0 \Leftrightarrow \forall x_i \in U, \Phi(\underline{A}(x_i), \bar{A}(x_i)) = 0 \Leftrightarrow \forall x_i \in U, \underline{A}(x_i) = \bar{A}(x_i) \Leftrightarrow A = \bar{A}$.

(2) 若 $A < B$, 即对 $\forall x_i \in U, \underline{A}(x_i) \leq \underline{B}(x_i), \bar{A}(x_i) \geq \bar{B}(x_i)$, 则 $\Phi(\underline{A}(x_i), \bar{A}(x_i)) \geq \Phi(\underline{B}(x_i), \bar{B}(x_i))$, 于是 $\rho(A) \geq \rho(B)$.

(3) $\rho(A') = \sum_{i=1}^n \Phi((\bar{A})'(x_i), (\underline{A})'(x_i)) = \sum_{i=1}^n \Phi(1 - \bar{A}(x_i), 1 - \underline{A}(x_i)) = \sum_{i=1}^n \Phi(\underline{A}(x_i), \bar{A}(x_i)) = \rho(A)$.

(4) $\rho(A) = n \Leftrightarrow \forall x_i \in U, \Phi(\underline{A}(x_i), \bar{A}(x_i)) = 1 \Leftrightarrow \forall x_i \in U, \underline{A}(x_i) = 0, \bar{A}(x_i) = 1$. $\square$

容易验证, 以下几个函数 $\Phi: D \rightarrow [0, 1]$ 均满足定理中的条件 (a)~(d).

- (1) $\Phi(x, y) = y - x$.
- (2) $\Phi(x, y) = (y - x)^n, n = 2, 3, \dots$.
- (3) $\Phi(x, y) = (y - x)e^{1 - (y - x)}$.
- (4) $\Phi(x, y) = (y - x) \sin \frac{\pi}{2} (y - x)$.

于是, 我们可以构造如下形式的粗糙度:

$$(1) \rho(A) = \sum_{i=1}^n (\bar{A}(x_i) - \underline{A}(x_i)).$$

$$(2) \rho(A) = \sum_{i=1}^n (\bar{A}(x_i) - \underline{A}(x_i))^n, n = 2, 3, \dots$$

$$(3) \rho(A) = \sum_{i=1}^n (\bar{A}(x_i) - \underline{A}(x_i))e^{1 - (\bar{A}(x_i) - \underline{A}(x_i))}.$$

$$(4) \rho(A) = \sum_{i=1}^n (\bar{A}(x_i) - \underline{A}(x_i)) \sin \frac{\pi}{2} (\bar{A}(x_i) - \underline{A}(x_i)).$$

对 $A \in FTRSs(U, R)$, 若取其粗糙度 $\rho(A) = \sum_{i=1}^n (\bar{A}(x_i) - \underline{A}(x_i))$, 标准化 $\rho(A)$ 得

$$\begin{aligned} \rho^0(A) &= \frac{\sum_{i=1}^n (\bar{A}(x_i) - \underline{A}(x_i))}{\sum_{i=1}^n \bar{A}(x_i)} = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n \underline{A}(x_i)}{\sum_{i=1}^n \bar{A}(x_i)} \\ &= 1 - \frac{\text{card}(\underline{A})}{\text{card}(\bar{A})} \end{aligned}$$

这正是文 [3] 给出的粗糙度定义.

基于定理 3.2, 以下对粗糙度的构造形式作进一步的讨论.

定理 3.3 设映射 $\varphi: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ 满足以下条件:

- (1) φ 是单调增加的一一映射;
- (2) $\varphi(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
- (3) $\varphi(x) = 1 \Leftrightarrow x = 1$;
- (4) $\forall x \in [0, 1], \varphi(x) + \varphi(1 - x)$ 为一常数, 则 $\Phi(x, y) = \varphi(y) - \varphi(x)$
 $((x, y) \in D = \{(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] | y \geq x\})$

满足定理 3.2 中的条件 (a)~(d).

证明: (a) $\Phi(x, y) = 0 \Leftrightarrow \varphi(y) - \varphi(x) = 0 \Leftrightarrow x = y$;

(b) $\Phi(x, y) = 1 \Leftrightarrow \varphi(y) - \varphi(x) = 1 \Leftrightarrow \varphi(y) = 1, \varphi(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0, y = 1$;

(c) $\varphi(y) + \varphi(1 - y) = \varphi(x) + \varphi(1 - x) \Rightarrow \varphi(y) - \varphi(x) = \varphi(1 - x) - \varphi(1 - y) \Rightarrow \Phi(x, y) = \Phi(1 - y, 1 - x)$;

(d) $x \leq x', y \geq y' \Rightarrow \varphi(x) \leq \varphi(x'), \varphi(y) \geq \varphi(y') \Rightarrow \varphi(y) - \varphi(x) \geq \varphi(y') - \varphi(x') \Rightarrow \Phi(x, y) \geq \Phi(x', y')$. $\square$

满足定理 3.3 中条件的函数 $\varphi: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, 如:

$$(1) \varphi(x) = x;$$

$$(2) \varphi(x) = \begin{cases} 2^{p-1} x^p, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 1 - 2^{p-1} (1 - x)^p, & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases} \quad p > 0.$$

由定理 3.2 及定理 3.3, 容易得出如下结论.

定理 3.4 设 $U = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, $\varphi: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ 满足定

理 3.3 中的条件 (1)~(4), $A \in FTRSs(U, R)$, 则 $\rho(A) = \sum_{i=1}^n (\varphi(\bar{A}(x_i)) - \varphi(\underline{A}(x_i)))$ 是 A 的粗糙度.

结束语 本文引入模糊 T-粗糙集的粗糙度的公理化定义, 给出—特征定理, 进一步对粗糙度表达式的结构进行分析, 给出几种具体的表达形式. 模糊 T-粗糙集是基于三角模的模糊粗糙集, 是用知识库中的模糊知识来近似模糊集, 是粗糙集与模糊粗糙集的推广, 它丰富了信息系统中知识的描述和处理方法, 因此, 本文的结论将有益于对粗糙集和模糊集理论的进一步研究及应用.

参考文献

- 1 曾黄麟. 粗糙理论及应用. 重庆大学出版社, 1996. 87~99
- 2 程铁, 莫智文. 模糊粗糙集及粗糙模糊集的模糊度. 模糊系统与数学, 2001, 15(3): 15~18
- 3 张文修, 吴伟志, 等. 粗糙集理论与方法. 科学出版社, 2001. 158~187
- 4 李玉榕, 乔斌, 蒋静坪. 粗糙集理论中不确定的粗糙信息熵表示. 计算机科学, 2002, 29(5): 101~103
- 5 吴望名. 模糊推理的原理和方法. 贵州出版社, 1994. 1~72
- 6 Wygalak M. Rough sets and fuzzy sets—some remarks on interrelations. Fuzzy Sets and Systems, 1989, 29: 241~243
- 7 Morsi N N, Yakout M M. Axiomatics for fuzzy rough sets. Fuzzy Sets and Systems, 1998, 100: 327~342
- 8 Pawlak Z. Rough sets and fuzzy sets. Fuzzy sets and Systems, 1985, 17: 99~102