猜想发现中的模糊类比研究*)

宋 坤 蔡庆生
(中国科学技术大学计算机系 合肥230027)

The Research of Fuzzy Analogy in the Guess-Discovery

SONG Kun CAI Qing-Sheng
(Department of Computer Science, USTC, Hefei 230027)

Abstract This paper combines Guess-Discovery with Fuzzy-Maths on the base of the Guess-Discovery model, and introduces a model of Combined-Reasoning, and shows the feasibility of the model with experiments. It breaks through the restriction of precious maths and classic thinking, and it is important for our research, manufacture, and life.

Keywords Association-analogy, Guess-discovery, Fuzzy-maths

1. 猜想学习和发现模型

1.1 基础知识

下面给出作为猜想学习和知识发现基础的一种综合推理过程的形式表示[1]。

如图1所示，假定源系统(基)为 S，目标系统(靶)为 T，S 和 T 分别表示系统中元素的非空集，源系统可为多个。

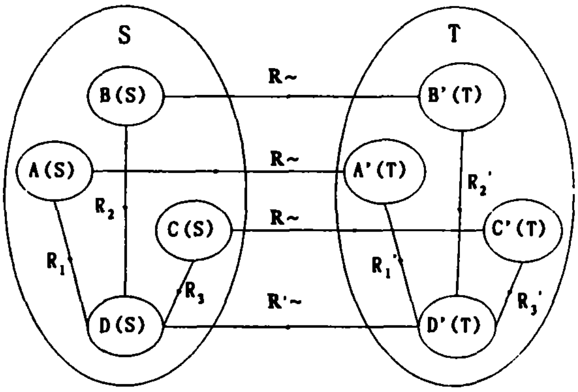

图1

问题：能否由源系统推出目标系统？

已知：源系统元素集 S，目标系统元素集 T，有：

1. $A(S), B(S), C(S), D(S) \subseteq S$；

2. $A(S), B(S), C(S)$ 分别与 $D(S)$ 有关系：

$R_1 = \{\langle a,d\rangle \mid a \in A(S) \wedge d \in D(S) \wedge P_1(a,d)\}$

$R_2 = \{\langle b,d\rangle \mid b \in B(S) \wedge d \in D(S) \wedge P_2(b,d)\}$

$R_3 = \{\langle c,d\rangle \mid c \in C(S) \wedge d \in D(S) \wedge P_3(c,d)\}$

这里谓词 $P_1(a,d)$ 表示 $a \in A$ 与 $d \in D$ 有性质 P_1；谓词 $P_2(b,d)$ 表示 $b \in B$ 与 $d \in D$ 有性质 P_2；谓词 $P_3(c,d)$ 表示 $c \in C$ 与 $d \in D$ 有性质 P_3。

3. $A'(T), B'(T), C'(T) \subseteq T$；

4. 存在联想关系 R～，且有 $A'(T)$ R～ $A(S)$，$B'(T)$ R～ $B(S)$，$C'(T)$ R～ $C(S)$。

猜想：1. 存在 $D'(T) \subseteq T$；

2. 存在 $D'(T)$ R～ $D(S)$；

3. T 中有关系：

$R_1' = \{\langle a',d'\rangle \mid a' \in A'(T) \wedge d' \in D'(T) \wedge P_1'(a',d')\}$

$R_2' = \{\langle b',d'\rangle \mid b' \in B'(T) \wedge d' \in D'(T) \wedge P_2'(b',d')\}$

$R_3' = \{\langle c',d'\rangle \mid c' \in C'(T) \wedge d' \in D'(T) \wedge P_3'(c',d')\}$

4. 存在联想关系 R'～，且有 P_1' R'～ P_1，P_2' R'～ P_2，P_3' R'～ P_3，其中 R'～是与 R～相关的。

1.2 联想条件

在猜想学习和发现方法中，联想条件是一个重要概念，猜想的成功与否，很大程度上取决于联想条件的选择是否正确。下面给出几种基本的联想条件：同构相似联想、同态相似联想、接近联想、对比联想、模糊联想。

1.3 模糊数学的引入

如何在整个模型的推理过程中刻画⟨R,R'⟩的相关性和差异性，将其体现在最后的推理结果 $D'(T)$ 中，从而更准确地完成猜想发现的任务，使之更接近于事物的本质，成为我们所要研究的方向。所以我们采用模糊数学的方法，将源和靶模糊化，充分发挥模糊数学对未知世界的模糊度量特性，帮助完成猜想发现的工作，甚至能发现一些确定模式下无法得到的结论，较好地完成类比猜想在知识发现上的任务。

2. 推理过程

2.1 推理原理

借鉴 Zadeh 提出的"合成推理规则"[4,5]的思想，提出我们猜想发现的基本原理：首先将源系统中 $A(S), B(S), C(S)$ 与 $D(S)$ 等概念模糊化，再将它们之间的关系 R_1, R_2, R_3 模糊化，求出它们的模糊关系，然后利用模糊关系和靶中 $A'(T)$，$B'(T)$，$C'(T)$ 模糊概念的合成，便能得出猜想的结论。简单地来说，源：X is A，Y is D；靶：X is A'，Y is D'，对于这样的问题，可以看到 A 和 D 之间存在某种确定的关系 $R = \{\langle a,d\rangle \mid a \in A \wedge d \in D \wedge P(a,d)\}$，可以把 A'和 D'看成是一个相应的一元模糊关系，这样我们的合成推理规则即可表示如下：(A 和 D are R, A')→(D' = A' · R)；(A 和 D are R, D')→(A' = D' · R)，其中运算符"·"表示两个模糊关系的合成。就模糊关系的合成来说，将+、-、⊙、⊕、∨、∧等运算相互组合就可以得到多种合成关系，这里我们在模糊推理中采用推理效果较好的 Max-⊙合成：

*)本文得到国家自然科学基金项目(No.60075015，No.90104030)支持。宋 坤 硕士生，主要研究领域：人工智能、机器学习。蔡庆生 教授，博导，主要研究领域：人工智能、机器学习、知识发现。

$$R \circ S \Leftrightarrow \mu_{R \circ S}(\mu,w)=\bigvee_{v}\{\mu_R(\mu,v)\otimes\mu_s(v,w)\}$$

其中 $x\otimes y=0\vee(x+y-1)$

2.2 推理原则

使用不同的方法可以模糊模拟 A 和 B 之间的关系 R，因此在模糊刻画 A 和 B 之间的相互关系 R 之前，必须寻求为评价各种方法好坏而遵循的原则。

原则 Ⅰ：

源：X is A，Y is B
靶：X is A ⟶ 靶：Y is B

这个原则是类似于广义的肯定前件的假言推理。即当 $A'=A$ 时，Y 必须为 B；

原则 Ⅰ-1：

源：x is A，Y is B
靶：X is very A ⟶ 靶：Y is very B

这一原则与人们经常采用的推理形式相吻合。

原则 Ⅰ-2：

源：X is A，Y is B
靶：X is very A ⟶ 靶：Y is B

如果在源中“X is A”和“Y is B”之间没有较强的因果关系，这样的推理结论也是允许的。

原则 Ⅱ-1：

源：X is A，Y is B
靶：X is more or less A ⟶ 靶：Y is more or less B

同原则 Ⅰ-1，也符合人们的推理习惯。

原则 Ⅱ-2：

源：X is A，Y is B
靶：X is more or less A ⟶ 靶：Y is B

同原则 Ⅰ-2。

原则 Ⅳ-1：

源：X is A，Y is B
靶：X is not A ⟶ 靶：Y is unknown

这一推理原则表明，当“X is not A”时，从源中不能得到 Y 的任何信息。

原则 Ⅳ-2：

源：X is A，Y is B
靶：X is not A ⟶ 靶：Y is not B

尽管这一原则在经典逻辑中是不被接受的，但在日常生活中，这一原则是成立的。

原则 Ⅴ：

源：X is A，Y is B
靶：Y is not B ⟶ 靶：X is not A

这一推理原则类似于经典逻辑中的否定后件的假言推理。

原则 Ⅵ：

源：X is A，Y is B
靶：Y is not very B ⟶ 靶：X is not very A

原则 Ⅶ：

源：X is A，Y is B
靶：Y is not more or less B ⟶ 靶：X is not more or less A

原则 Ⅵ 和 Ⅶ 同原则 Ⅰ-1。

原则 Ⅷ-1：

源：X is A，Y is B
靶：Y is B ⟶ 靶：X is unknown

原则 Ⅷ-2：

源：X is A，Y is B
靶：Y is B ⟶ 靶：X is A

原则 Ⅷ 同原则 Ⅳ。

2.3 模糊关系

上文提及的 R_1,R_2,R_3 是源系统中 A(S)，B(S)，C(S)与 D(S)的关系描述，所以将这种关系模糊化并非是轻而易举，它有赖于具体问题的特殊性以及我们对具体问题的认识程度，同时也需要不断地检验模糊关系的正确性和完备性。

为了讨论方便，首先讨论两个模糊集之间的关系。这里令 A 和 B 分别为 U 和 V 中的具有如下形式的模糊集：

$$A=\int_U \mu_A(u)/u,\ B=\int_V \mu_B(v)/v$$

令 $\times,\cup,\cap,\neg,\oplus$ 分别表示模糊集的笛卡尔积、并、交、补和有界和，这样就可以利用这些运算去模拟 $U\times V$ 中的模糊关系。

可以运用多值逻辑系统的蕴涵规则来定义我们的模糊关系[8]，即由 $Rm:a\rightarrow b=(a\wedge b)\vee(1-a)$ 定义模糊关系：

$$Rm=(A\times B)\cup(\neg A\times V)$$
$$=\int_{U\times V}(\mu_A(u)\wedge\mu_B(v))\vee(1-\mu_A(u))/(u,v)$$

由 $Rc:a\rightarrow b=a\wedge b$ 定义模糊关系：

$$Rc=A\times B=\int_{U\times V}\mu_A(u)\wedge\mu_B(v)/(u,v)$$

由 $Rs:a\xrightarrow[s]{}b=\begin{cases}1 & a\leqslant b\\0 & a>b\end{cases}$ 定义模糊关系：

$$Rs=A\times V\underset{s}{\Rightarrow}U\times B=\int_{U\times V}[\mu_A(u)\underset{s}{\rightarrow}\mu_B(v)]/(u,v),$$

其中 $\mu_A(u)\underset{s}{\rightarrow}\mu_B(v)=\begin{cases}1 & \mu_A(u)\leqslant\mu_B(v)\\0 & \mu_A(u)>\mu_B(v)\end{cases}$

由 $Rg:a\underset{g}{\rightarrow}b=\begin{cases}1 & a\leqslant b\\b & a>b\end{cases}$ 定义模糊关系：

$$Rg=A\times V\underset{g}{\Rightarrow}U\times B=\int_{U\times V}[\mu_A(u)\underset{g}{\rightarrow}\mu_B(v)]/(u,v)$$

其中 $\mu_A(u)\underset{g}{\rightarrow}\mu_B(v)=\begin{cases}1 & \mu_A(u)\leqslant\mu_B(v)\\\mu_B(v) & \mu_A(u)>\mu_B(v)\end{cases}$

下面的方法也以此类推定义相应的模糊关系：

$$Rsg:a\xrightarrow[sg]{}b=(a\xrightarrow[s]{}b)\wedge(1-a\xrightarrow[g]{}1-b)$$

$$Rgg:a\xrightarrow[gg]{}b=(a\xrightarrow[g]{}b)\wedge(1-a\xrightarrow[g]{}1-b)$$

$$Rgs:a\xrightarrow[gs]{}b=(a\xrightarrow[g]{}b)\wedge(1-a\xrightarrow[s]{}1-b)$$

$$Rss:a\xrightarrow[ss]{}b=(a\xrightarrow[s]{}b)\wedge(1-a\xrightarrow[s]{}1-b)$$

$$Rb:a\rightarrow b=(1-a)\vee b\quad R^{*}:a\rightarrow b=1-a+ab$$

2.4 推理演示

现在分析各种方法所推出的结论是否符合我们给出的推理原则。限于篇幅，这里只讨论 Rm，Rc，Rs 等3种情况。为了便于分析，令

$$A'=A=\int_U\mu_A(u)/u\quad B'=B=\int_V\mu_B(v)/v$$

$$A'=veryA=A^2=\int_U\mu_A^2(u)/u$$

$$B'=not\ veryB=\neg B^2=\int_V 1-\mu_B^2(v)/v$$

$$A'=more\ or\ lessA=A^{0.5}=\int_U\mu_A^{0.5}(u)/u$$

$$B'=not\ more\ or\ lessB=\neg B^{0.5}=\int_V 1-\mu_B^{0.5}(v)/v$$

$$A'=notA=\neg A=\int_U 1-\mu_A(u)/u$$

$$B'=not\ B=\neg B=\int_V 1-\mu_B(v)/v$$

同时令 U＝V＝0＋1＋…＋8＋9

A＝0.1/0＋0.5/1＋0.7/2＋1/3＋0.8/4＋0.3/5，

B＝0.4/3＋0.6/4＋0.8/5＋1/6＋0.9/7＋0.5/8

根据我们的假设可以得到：

A′ = very A = 0.01/0 + 0.25/1 + 0.49/2 + 1/3 + 0.64/4 + 0.09/5

A′ = more or less A = 0.32/0 + 0.71/1 + 0.84/2 + 1/3 + 0.89/4 + 0.55/5

A′ = not A = 0.9/0 + 0.5/1 + 0.3/2 + 0/3 + 0.2/4 + 0.7/5 + 1/(6 + …9)

A′ = not very A = 0.99/0 + 0.75/1 + 0.51/2 + 0/3 + 0.36/4 + 0.91/5 + 1/(6 + …9)

A′ = not more or less A = 0.64/0 + 0.29/1 + 0.16/2 + 0/3 + 0.11/4 + 0.45/5 + 1/(6 + …9)

B′ = very B = 0.16/3 + 0.36/4 + 0.64/5 + 1/6 + 0.81/7 + 0.25/8

B′ = more or less B = 0.63/3 + 0.77/4 + 0.89/5 + 1/6 + 0.95/7 + 0.71/8

B′ = not B = 1/(0 + 1 + 2) + 0.6/3 + 0.4/4 + 0.2/5 + 0/6 + 0.1/7 + 0.5/8 + 1/9

B′ = not very B = 1/(0 + 1 + 2) + 0.84/3 + 0.64/4 + 0.36/5 + 0/6 + 0.19/7 + 0.75/8 + 1/9

B′ = not more or less B = 1/(0 + 1 + 2) + 0.37/3 + 0.23/4 + 0.11/5 + 0/6 + 0.05/7 + 0.29/8 + 1/9

Unknown = 1/0 + 1/1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + 1/6 + 1/7 + 1/8 + 1/9

我们将 Rm 表示为矩阵形式

$$Rm = (A \times B) \cup (\neg A \times V) = \int_{U \times V} (\mu_A(u) \wedge \mu_B(v)) \vee (1 - \mu_A(u))/(u,v)$$

$$= \begin{bmatrix} 0.9 & 0.9 & 0.9 & 0.9 & 0.9 & 0.9 & 0.9 & 0.9 & 0.9 & 0.9 \\ 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 \\ 0.3 & 0.3 & 0.3 & 0.4 & 0.6 & 0.7 & 0.7 & 0.7 & 0.5 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0.6 & 0.8 & 1 & 0.9 & 0.5 & 0 \\ 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.4 & 0.6 & 0.8 & 0.8 & 0.8 & 0.5 & 0.2 \\ 0.7 & 0.7 & 0.7 & 0.7 & 0.7 & 0.7 & 0.7 & 0.7 & 0.7 & 0.7 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

现在通过 Bm′ = A′ ∘ Rm 和 Am′ = Rm ∘ B′ 来看看到底能不能达到预期的目的，注意这里的"∘"是我们上文提及的 Max-⊙合成运算。

1. A ∘ Rm = 0.4/3 + 0.6/4 + 0.8/5 + 1/6 + 0.9/7 + 0.5/8 = B

2. very A ∘ Rm = 0.4/3 + 0.6/4 + 0.8/5 + 1/6 + 0.9/7 + 0.5/8 = B

3. more or less A ∘ Rm = 0.25/(0 + 1 + 2) + 0.4/3 + 0.6/4 + 0.8/5 + 1/6 + 0.9/7 + 0.5/8 + 0.25/9 = 0.25 ∨ μ_B

4. not A ∘ Rm = 1/0 + 1/1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + 1/6 + 1/7 + 1/8 + 1/9 = Unknown

5. Rm ∘ not B = 0.9/0 + 0.5/1 + 0.3/2 + 0/3 + 0.2/4 + 0.7/5 + 1/(6 + …9) = not A

6. Rm ∘ not very B = 0.9/0 + 0.5/1 + 0.3/2 + 0.25/3 + 0.25/4 + 0.7/5 + 1/(6 + …9) ≈ 0.25 ∨ (1 − μ_A)

7. Rm ∘ not more or less B = 0.9/0 + 0.5/1 + 0.3/2 + 0/3 + 0.2/4 + 0.7/5 + 1/(6 + …9) = not A

8. Rm ∘ B = 0.9/0 + 0.5/1 + 0.7/2 + 1/3 + 0.8/4 + 0.7/5 + 1/(6 + …9) = A U not A

从这个例子可以看到 Rm 满足推理原则 Ⅰ、Ⅱ-2、Ⅳ-1、Ⅴ。

同样地，也可以对其他模糊关系进行相似的运算，下面是 Rc、Rs 的运算结果。

Rc 满足推理原则 Ⅰ、Ⅱ-2、Ⅲ-1、Ⅶ-2，而 Rs 基本符合给出的所有推理原则，是相对较好的推理方法。另外我们还发现，通过运算还能得到一些并不十分满足我们原先设定的习惯原则的情况，这些情况往往是我们习惯思维所忽略的，很可能导致新知识、新问题的发现。

2.5 模糊推理的扩展

一个系统的性能往往取决于多个决定因素，即我们开始提到的推理模型中 A(S)，B(S)，C(S)都可能对 D(S)起一定的作用 R1、R2、R3，所以有必要对我们的模糊推理方法进行扩展。

	A	Very A	More or less A	Not A	Not B	Not very B	Not more or less B	B
Rc	B	B	B	Φ	Φ	$\begin{cases} \mu_A - \mu_A^2 & \mu_A \leqslant \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \mu_A > \frac{1}{2} \end{cases}$	Φ	A
Rs	B	Very B	More or less B	unknown	Not A	Not very A	Not more or less A	unknown

$$Rm(A,B,C;D) = \int [\mu_A(u) \wedge \mu_B(v) \wedge \mu_C(w) \wedge \mu_D(x)] \vee [1 - (\mu_A(u) \wedge \mu_B(u) \wedge \mu_C(u))]/(u,v,w,x)$$

$$Rc(A,B,C;D) = \int \mu_A(u) \wedge \mu_B(v) \wedge \mu_C(w) \wedge \mu_D(x)/(u,v,w,x)$$

$$Rs(A,B,C;D) = \int \mu_A(u) \wedge \mu_B(v) \wedge \mu_C(w) \to \mu_D(x)/(u,v,w,x)$$

其中

$$\mu_A(u) \wedge \mu_B(v) \wedge \mu_C(w) \to \mu_D(x) = \begin{cases} 1 & (\mu_A(u) \wedge \mu_B(v) \wedge \mu_C(w)) \leqslant \mu_D(x) \\ 0 & (\mu_A(u) \wedge \mu_B(v) \wedge \mu_C(w)) > \mu_D(x) \end{cases}$$

同理，也可以对其他方法进行类似扩展。

结束语 人类思维本身充满了模糊性、不确定性，所以我们把这种模糊类比特性运用到猜想发现中，为我们发现新问题提供一种途径。模糊化源系统与目标系统之间的关系，为我们在新系统与未知系统建立联系给出相关的准则，以便我们发现未知系统的性能。我们的实验已经证明了这种思路的可行性，下面我们要面临的工作是：继续寻求能够更符合人类类比思维习惯的推理方法 R，通过实验进一步完善该思想。

参考文献

1 蔡庆生，方瑾，倪志伟. 一种猜想学习和发现模型. 南京大学学报，2000，36：1～7
2 王士同，夏祖勋，陈剑夫. 模糊数学在人工智能中的应用. 机械工业出版社，1991
3 李波，罗玉龙，赵沁平. 类比转换原理及实现. 软件学报，1995，6(3)
4 Zadeh L A. Fuzzy logic and approximate reasoning. Sythese，1975，30：407～428
5 Zadeh L A. Fuzzy Logic. Computer，1988，21(4)：83～93
6 Wang S-L，Huang T-J. Analogical Reasoning to Answer Null Queries in Fuzzy Object-Oriented Data Model
7 Buckles B P，Petry P B. A Fuzzy Representation of data for relational databases. Fuzzy Set And Systems，1982，7：213～226
8 Bouchon-Meunier B，Delechamp J，Marsala C，Rifqi M. Several Forms of Fuzzy Analogical Reasoning