形式系统 UL 的弱完备性*)

张小红[1,2]　何华灿[1]　李伟华[1]

（西北工业大学计算机科学与工程系　西安710072）[1]　（宁波大学理学院　浙江宁波315211）[2]

The Weak Completeness of Basic Formal Deductive System UL of Universal Logic

ZHANG Xiao-Hong[1,2]　HE Hua-Can[1]　LI Wei-Hua[1]

(Department of Computer Science and Engineering, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072)[1]

(College of Maths and Physics, Ningbo University, Ningbo 315211)[2]

Abstract　Based on the basic formal deductive system UL of Universal Logic, UL-algebra and D-ideal are proposed in this paper. After the discussion on their basic properties and the relation with BCK-algebra, the weak completeness theory of UL is proved through the present results on prime filter of BCK-algebra.

Keywords　Universal logic, Formal system UL, UL-algebra, BCK-algebra, Weak completeness

1　引言

自 Zadeh[1]于1965年建立模糊集理论以后，一种初始形态的模糊逻辑也被提出[2]。尽管模糊推理在模糊控制中有直接的应用，也受到模糊系统与人工智能学界的广泛关注。然而，由于模糊推理长期以来没有严格的逻辑基础，致使其进一步发展受到限制，且不可避免地受到怀疑与批判[3]。不过，近年来，以王国俊教授为首的一批学者成功地将模糊逻辑和模糊推理结合起来，通过建立模糊逻辑的形式演绎系统、创建模糊推理的三 I 算法等一系列漂亮的工作[4~8]，极大地推动了这一领域向理论和应用的纵深发展。

另一方面，本文第二作者为了探索逻辑的一般规律，建立了能包容各种逻辑形态和推理模式的泛逻辑学理论[9,10]。由于泛逻辑将模糊逻辑作为其特例，因而借鉴模糊逻辑和模糊推理研究的上述成功经验，建立泛逻辑学形式演绎系统、为不确定推理奠定坚实的逻辑基础，就自然成为一个极有意义的研究方向。我们在这方面已做了初步探索[11]，首次提出泛逻辑的基本形式演绎系统 UL，讨论了它的基本性质，建立了商代数结构，引入了 H-赋值的概念，证明了可靠性定理。文[11]中还说明了形式系统 UL 包含经典逻辑形式系统 L 为其特例，而形式系统 UL 与模糊逻辑形式系统 L^* 是两个互不包含的独立系统，L^* 可看成 Zadeh 以“取大取小”为特征的模糊推理的理论抽象，而 UL 则是体现柔性推理思想的泛逻辑的初步理论概括。

本文是文[11]的继续，以泛逻辑的基本形式演绎系统 UL 为背景，引入 UL-代数及其 D-理想的概念，讨论了它的基本性质，研究了 UL-代数与1966年日本数学家 K. Iseki 引入的逻辑代数系统 BCK-代数[12]的关系；还将文[11]中的 H-赋值拓广到 UL(M)-赋值，并借用 BCK-代数素滤子的现有重要结果[13~17]，证明了形式演绎系统 UL 的弱完备性，这将为形式系统 UL 及其在不确定推理中的应用研究奠定基础。

2　关于形式系统 UL

定义1[11]（UL 中的公理）　设 S 是无穷集，$\neg$是 S 上的一元运算，$\vee$，$\rightarrow$ 是 S 上的二元运算。$F(S)$是由 S 生成的($\neg$, $\vee$, $\rightarrow$)型自由代数。称 $F(S)$中具有以下各种形式的公式为公理：

(UL1) $A\rightarrow(B\rightarrow A)$

(UL2) $A\rightarrow((A\rightarrow B)\rightarrow B)$

(UL3) $(A\rightarrow B)\rightarrow((B\rightarrow C)\rightarrow(A\rightarrow C))$

(UL4) $A\rightarrow\neg\neg A$

(UL5) $A\rightarrow(A\vee B)$

(UL6) $(A\wedge B)\rightarrow A$

(UL7) $(A\vee B)\rightarrow(B\vee A)$

(UL8) $A\vee(B\vee C)\rightarrow(A\vee B)\vee C$

(UL9) $(\neg A\rightarrow\neg B)\rightarrow(B\rightarrow A)$

(UL10) $((A\rightarrow B)\rightarrow B)\rightarrow((B\rightarrow A)\rightarrow A)$

(UL11) $(B\rightarrow C)\rightarrow(A\vee B\rightarrow A\vee C)$

其中，$P\wedge Q$ 是$\neg(\neg P\vee\neg Q)$的简写。

定义2[11]（UL 中的推理规则）　UL 中有下述推理规则：MP 规则（分离规则）——由 A 和 $A\rightarrow B$ 推得 B。

定义3[11]（系统 UL）　由公式集 F(S)、公理(UL1)～(UL11)以及 MP 规则组成的系统称为系统 UL。

定理1[11]（UL 中的三段论规则 HS）　设 $\Gamma=\{A\rightarrow B, B\rightarrow C\}$，则 $\Gamma\vdash(A\rightarrow C)$。

定理2[11]　以下公式是系统 UL 的定理

(T1) $(A\rightarrow(B\rightarrow C))\rightarrow(B\rightarrow(A\rightarrow C))$

(T2) $(B\rightarrow C)\rightarrow((A\rightarrow B)\rightarrow(A\rightarrow C))$

(T3) $\neg\neg A\rightarrow A$

(T4) $A\rightarrow A$

定理3[11]　在系统 UL 中成立

(T5) 左保序规则：

若 $\vdash B\rightarrow C$，则 $\vdash(A\rightarrow B)\rightarrow(A\rightarrow C)$。

(T6) 右反序规则：

若 $\vdash A\rightarrow B$，则 $\vdash(B\rightarrow C)\rightarrow(A\rightarrow C)$。

定理4[11]　以下公式是系统 UL 的定理

(T7) $(A\rightarrow B)\rightarrow(\neg B\rightarrow\neg A)$

*)国家自然科学基金资助项目（批准号：60273087）。张小红　教授，博士生，主要研究方向为代数学、人工智能及应用。何华灿　教授，博士生导师，主要研究领域为人工智能及应用、泛逻辑学。李伟华　教授，博士生导师，主要研究领域为网络与多媒体通信、人工智能与决策支持。

(T8) $A\wedge B\to B\wedge A$

(T9) $(A\to B)\wedge(A\to C)\to(A\to B\vee C)$

定义4[11] 设 $A,B\in F(S)$，如果 $\vdash A\to B$ 且 $\vdash B\to A$，则称 A 与 B 可证等价，记作 $A\approx B$。

定理5[11] 可证等价≈是 $F(S)$ 上的等价关系，且≈是 $F(S)$ 上的(¬, ∨, →)型同余关系，即

i) 若 $A\approx B$，则 $\neg A\approx\neg B$。

ii) 若 $A\approx B$ 且 $C\approx D$，则 $A\vee C\approx B\vee D$。

iii) 若 $A\approx B$ 且 $C\approx D$，则 $A\to C\approx B\to D$。

定理6[11] F(S)上的可证等价关系≈具有下述性质：

(T10) $A\vee(B\vee C)\approx(A\vee B)\vee C$

(T11) $A\wedge(B\wedge C)\approx(A\wedge B)\wedge C$

(T12) $\neg(A\vee B)\approx\neg A\wedge\neg B$

(T13) $\neg(A\wedge B)\approx\neg A\vee\neg B$

定理7[11] 设 $F(S)$ 是 UL 系统中的(¬, ∨, →)型自由代数，≈是 $F(S)$ 上的可证等价关系，则可在(¬, ∨, →)型商代数 $[F]=F(S)/\approx$ 中引入序关系≤使得

i) $([F],\leqslant)$ 构成偏序集，对[F]中任二元 $a=[A]$ 与 $b=[B]$，$a\vee b=[A\vee B]$ 恰为 a 与 b 在这个偏序集中的上界，且∨满足交换律和结合律。

ii) 偏序集 $([F],\leqslant)$ 有界，其最大元、最小元分别用1、0表示。如果 A 是 UL 中的定理，则 $[A]=1$、$[\neg A]=0=\neg 1$。

iii) 对[F]中任二元 $a=[A]$ 与 $b=[B]$，$a\leqslant b$ 当且仅当 $a\to b=1$。

iv) ¬是关于序≤而言的[F]上的逆序对合对应，即 $a\leqslant b\Rightarrow\neg b\leqslant\neg a$ 且对任意的 $a=[A]\in[F]$ 有 $\neg\neg a=a$。

v) 以 $f(a,b)$ 记[F]上的蕴含运算 $a\to b$，则

① $f(1,a)=a$，$f(a,a)=1$，$f(a,0)=\neg a$

② $f(\neg a,\neg b)=f(b,a)$

③ $f(a,b)\leqslant f(f(b,c),f(a,c))$

④ $f(a,f(b,c))=f(b,f(a,c))$

⑤ $f(f(a,b),b)=f(f(b,a),a)$

⑥ $f(f(b,c),f(a\vee b,a\vee c))=1$

3 UL-代数及其 D-理想

由定理7知，自由代数 $F(S)$ 关于可证等价关系≈构成的(¬, ∨, →)型商代数 $[F]=F(S)/\approx$ 具有很好的性质。为了深入研究其特性，我们引入 UL-代数的概念。

定义5 设 M 是(¬, →, ∨)型代数，称 M 是 UL-代数，如果 M 满足

i) M 上有序≤使 $(M,\leqslant)$ 成为偏序集，对任意 $a,b\in M$ 有 $a\leqslant a\vee b$、$b\leqslant a\vee b$，即 $a\vee b$ 为 a,b 在 M 中的上界，且∨满足交换律和结合律。

ii) 偏序集 $(M,\leqslant)$ 有界，若用1、0表示最大元、最小元，则有 $0=\neg 1$，$1=\neg 0$。

iii) 对 M 中任二元 a 与 b，$a\leqslant b$ 当且仅当 $a\to b=1$。

iv) ¬是关于序≤而言的 M 上的逆序对合对应，即有 $a\leqslant b\Rightarrow\neg b\leqslant\neg a$ 且对任意的 $a\in M$ 成立 $\neg\neg a=a$。

v) 对任意 $a,b,c\in M$ 成立

(A1) $1\to a=a$

(A2) $\neg a\to\neg b=b\to a$

(A3) $(a\to b)\leqslant(b\to c)\to(a\to c)$

(A4) $a\to(b\to c)=b\to(a\to c)$

(A5) $(a\to b)\to b=(b\to a)\to a$

(A6) $(b\to c)\to(a\vee b\to a\vee c)=1$

显然，$F(S)$ 关于可证等价关系≈构成的(¬, ∨, →)型商代数 $[F]=F(S)/\approx$ 是一个 UL-代数。

定理8 设 M 是 UL-代数，$a,b,c\in M$，则

(A7) $a\to 0=\neg a$

(A8) $a\to a=1$

(A9) $a\leqslant b\Rightarrow(b\to c)\leqslant(a\to c)$

(A10) $a\to 1=1$

(A11) $b\leqslant(a\to b)$

(A12) $a\leqslant b\Rightarrow(c\to a)\leqslant(c\to b)$

(A13) $\neg a\leqslant(a\to b)$

(A14) $a\to((a\to b)\to b)=1$

证明：由定义5 ii)及(A2)、(A1)可得

$a\to 0=a\to\neg 1=1\to\neg a=\neg a$

即(A7)成立。由(A1)、(A3)可得

$1=1\to 1\leqslant(1\to a)\to(1\to a)=a\to a$

而由定义5 ii)知1为最大元，故有 $a\to a=1$，即(A8)成立。

假若 $a\leqslant b$，则由定义5 iii)得 $a\to b=1$，于是由(A3)得 $1=a\to b\leqslant(b\to c)\to(a\to c)$，由于1为最大元，故 $(b\to c)\to(a\to c)=1$，从而 $(b\to c)\leqslant(a\to c)$，即(A9)成立。

由于 $a\leqslant 1$ 恒成立(1为最大元)，应用(A9)得 $1\to 1\leqslant a\to 1$，从而由(A8)得 $1\leqslant a\to 1$，于是 $a\to 1=1$，即(A10)成立。

同样，由于 $a\leqslant 1$ 恒成立(1为最大元)，应用(A9)得 $1\to b\leqslant a\to b$，从而由(A1)得 $b\leqslant a\to b$，即(A11)成立。

假若 $a\leqslant b$，则由定义5 iii)得 $a\to b=1$，而由(A3)得 $(c\to a)\leqslant(a\to b)\to(c\to b)$，即 $(c\to a)\leqslant 1\to(c\to b)$，应用(A1)得 $1\to(c\to b)=(c\to b)$，从而 $(c\to a)\leqslant(c\to b)$，即(A12)成立。

(A13)可由(A7)、0为最小元及(A12)得到，(A14)可由(A4)、(A8)得到。

下面的定理表明，UL-代数可由一组等式定义，即全体 UL-代数之集(以下记为 YΛ)构成一个代数簇，因此 YΛ 关于子代数、同态像以及直积封闭。

定理9 设 M 是具有常元1和0的(→, ∨)型代数，M 是 UL-代数，当且仅当对任意 $a,b,c\in M$ 下述等式成立：

(B1) $(a\to b)\to b=(b\to a)\to a$

(B2) $a\to(b\to c)=b\to(a\to c)$

(B3) $a\to a=1$

(B4) $1\to a=a$

(B5) $0\to a=1$

(B6) $a\vee b=b\vee a$

(B7) $a\vee(b\vee c)=(a\vee b)\vee c$

(B8) $a\to(a\vee b)=1$

(B9) $(b\to c)\to(a\vee b\to a\vee c)=1$

证明：容易验证，如果 M 是 UL-代数，则 M 一定满足(B1)～(B9)。

设 M 是具有常元1和0的(→, ∨)型代数，且满足(B1)～(B9)，下证 M 是 UL-代数。

首先在 M 中定义¬如下：

对任意 $a\in M$，$\neg a=a\to 0$

于是对任意 $a,b\in M$ 有

$\neg a\to\neg b=(a\to 0)\to(b\to 0)$ 由¬的定义

$=b\to((a\to 0)\to 0)$ 由(B2)

$=b\to((0\to a)\to a)$ 由(B1)

$=b\to(1\to a)$ 由(B5)

$= b\to a$ 由(B4)

这说明在M中(A2)成立。

再在M中定义序≤如下：

对任意 $a, b\in M$，$a\leqslant b$ 当且仅当 $a\to b=1$

则对 $a, b, c\in M$ 有

$(a\to b)\to((b\to c)\to(a\to c))$

$= (a\to b)\to(a\to((b\to c)\to c))$ 由(B2)

$= (a\to b)\to(a\to((c\to b)\to b))$ 由(B1)

$= a\to((a\to b)\to((c\to b)\to b))$ 由(B2)

$= a\to((c\to b)\to((a\to b)\to b))$ 由(B2)

$= (c\to b)\to(a\to((a\to b)\to b))$ 由(B2)

$= (c\to b)\to((a\to b)\to(a\to b))$ 由(B2)

$=(c\to b)\to 1$ 由(B3)

$=\neg 1\to\neg(c\to b)$ 由(A2)，已证

$=(1\to 0)\to\neg(c\to b)$ 由$\neg$的定义

$=0\to\neg(c\to b)$ 由(B4)

$=1$ 由(B5)

于是由≤的定义知 $(a\to b)\leqslant(b\to c)\to(a\to c)$，即(A3)成立。这样，在M中成立定义5 v)中的各公式。下面证明定义5中的i)～iv)也成立。

首先，定义5中的iii)恰好是我们对≤的定义。

定义5iv)中的 $a\leqslant b\Rightarrow\neg b\leqslant\neg a$ 可由已证的(A2)直接得到，而且 $\neg\neg a=a$ 可如下证明：

$\neg\neg a=(a\to 0)\to 0$ 由$\neg$的定义

$=(0\to a)\to a$ 由(B1)

$=1\to a$ 由(B5)

$= a$ 由(B4)

0为最小元可由(B5)得到，1为最大元可如下证明：对任意的 $a\in M$

$a\to 1=\neg 1\to\neg a$ 由(A2)，已证

$=(1\to 0)\to\neg a$ 由$\neg$的定义

$=0\to\neg a$ 由(B4)

$=1$ 由(B5)

此即 $a\leqslant 1$。而由上述证明过程知 $\neg 1=0$，而由已证的 $\neg\neg a=a$ 可知 $\neg 0=\neg\neg 1=1$，所以定义5中的ii)成立。

最后证明(M,≤)为偏序集。由(B3)及≤的定义知≤是自反的；若 $a\leqslant b$、$b\leqslant a$，则由≤的定义及(B4)、(B1)得

$a=1\to a=(b\to a)\to a=(a\to b)\to b=1\to b=b$

这说明≤是反对称的；若 $a\leqslant b$、$b\leqslant c$，则由≤的定义得 $a\to b=b\to c=1$，应用已证的(A3)及(B4)可得

$1=a\to b\leqslant(b\to c)\to(a\to c)=1\to(a\to c)=a\to c$

由已证"1为最大元"得 $a\to c=1$，此即 $a\leqslant c$，这说明≤是传递的。故(M，≤)为偏序集。而由(B8)、(B6)、(B7)知 $a\vee b$ 为 a,b 在M中的上界，且∨满足交换律和结合律，所以定义5中的i)成立。

综上所述，M满足定义5中所有条件，即M是UL-代数。

定理10 设 $M\in Y\Lambda$，定义M上的二元运算⊙如下：

$a\odot b=\neg(a\to\neg b)$

则对任意 $a, b, c\in M$ 有下式成立

(A15) $a\to(b\to c)=(a\odot b)\to c$

证明：设 $a, b, c\in M$，则

$(a\odot b)\to c=\neg(a\to\neg b)\to c$ 由⊙的定义

$=\neg c\to(a\to\neg b)$ 由(A2)

$=a\to(\neg c\to\neg b)$ 由(A4)

$=a\to(b\to c)$ 由(A2)

即在M中(A15)成立。

定义6 设 $M\in Y\Lambda$，F是M的非空子集。

i) 如果 $0\in F$，且当 $a,\neg(\neg a\to\neg b)\in F$ 时有 $b\in F$，则称F是D-理想。{0}及M是M的D-理想。如果M的D-理想 $F\neq M$，则称F是M的真D-理想。

ii)如果F是M的真D-理想，且对任意 $a,b\in M$，$\neg((\neg a\to\neg b)\to\neg b)\in F$ 蕴含 $a\in F$ 或 $b\in F$，则称F是M的素D-理想。

定理11 设 $M\in Y\Lambda$，F是M的D-理想。则F是下集，即当 $b\leqslant a$ 且 $a\in F$ 时有 $b\in F$。

证明：设 $b\leqslant a$ 且 $a\in F$，则

$\neg(\neg a\to\neg b)=\neg(b\to a)=\neg 1=0\in F$

故由D-理想的定义知 $b\in F$，即F是下集。

为了进一步阐述UL-代数D-理想的特性，我们要借助BCK-代数的已有结果。

4 BCK-代数及其素滤子

1966年，日本数学家K. Iseki以组合逻辑为背景引入BCK-代数[12]的概念，之后许多国家的数学工作者对其做了深入研究[13~17]。下面我们罗列若干本文需要引用的概念和重要结果。

定义7[12,13] (2,0)型代数(X；*，0)称为是BCK-代数，如果对任意 $x,y,z\in X$ 成立

(BCK1) $[(x*z)*(x*y)]*(y*z)=0$；

(BCK2) $x*0=x$；

(BCK3) $x*y=0$，$y*x=0$ 蕴含 $x=y$。

在BCK-代数中，定义序关系如下：$x\leqslant y$ 当且仅当 $x*y=0$，则(X，≤)为偏序集。为了下面引用方便，这里将该序关系记为π。如果BCK-代数(X；*，0)关于序π有最大元，即存在 $m\in X$ 使得对任意 $x\in X$ 有 $m\leqslant x$，则称X是有界的，并记 $m=1$，$Nx=1*x$。

定义8[13] BCK-代数(X；*，0)称为是可换的，如果对任意 $x,y,z\in X$ 成立

(C-B) $x*(x*y)=y*(y*x)$

在BCK-代数的研究中习惯使用记号 $x\wedge y=y*(y*x)$，为避免混淆，这里用记号Ⓐ，即 xⒶ$y= y*(y*x)$。

容易证明下述结论成立。

命题1 设M是(¬,∨,→)型UL-代数，定义M上的二元运算*如下

$x*y=y\to x$

则(M；*，1)构成有界可换BCK-代数。

注意：上述由(¬,∨,→)型UL-代数M导出的BCK-代数(M；*，1)，其BCK序π正好与M的原有序≤相反，即 $x\leqslant y$ 当且仅当 $y\pi x$。这样对于≤来说，1是最大元、0是最小元；而对于π来说，0是最大元、1是最小元。

定义9[13] BCK-代数(X；*，0)称为是具有条件(S)的，如果对任意 $x, y\in X$ 成立

(S-B)集 $\{z\in X|\ z*x\leqslant y\}$ 有最大元(关于序π)。

对具有条件(S)在BCK-代数，记上述最大元 xoy。

命题2[13] BCK-代数(X；*，0)是具有条件(S)的，如果存在二元运算⊙，对任意 $x,y,z\in X$ 成立

$(x*y)*z=x*(y\odot z)$

则X是具有条件(S)的，且对任意 $x,y\in X$ 有 $xoy=x\odot z$。

应用命题2及定理10可得

命题3 设 M 是$(\neg,\vee,\to)$型 UL-代数，定义 M 上的二元运算 $*$ 如下

$x*y=y\to x$

则$\langle M;*,1\rangle$是具有条件(S)的有界可换 BCK-代数，且 $x\circ y=\neg(x\to\neg y)$。

定义10[13] BCK-代数$\langle X;*,0\rangle$的非空子集 I 称为 X 的理想，如果满足

(i) $0\in I$;

(ii) $x*y\in I$, $y\in I$ 蕴含 $x\in I$。

显然，{0}及 X 是 X 的两个理想，称 X 为平凡理想，理想 $I\neq X$ 称为 X 的真理想。

定义11[17] 有界 BCK-代数$\langle X;*,0\rangle$的非空子集 F 称为 X 的一个 BCK-滤子，如果满足

i) $1\in F$,

ii) 当 $y\in F$, $N(Nx*Ny)\in F$ 时有 $x\in F$。

显然，{1}及 X 均为 X 的 BCK-滤子。若 BCK-滤子 $F\neq X$，则称 F 为 X 的真 BCK-滤子。

定义12[17] 有界可换 BCK-代数$\langle X;*,0\rangle$的真 BCK-滤子 F 称为素的，如果满足

(P-F) $x \circledvee y\in F$ 蕴含 $x\in F$ 或 $y\in F$，这里 $x\circledvee y=N(Nx \circledwedge Ny)$

由定义6关于 UL-代数 D-理想、素 D-理想的定义，再根据定义11、12及命题1可得

命题4 设 M 是 UL-代数，即 $M\in Y\Lambda$，F 是 M 的非空子集。则 F 是 M 的 D-理想当且仅当 F 是 M 按命题1的方式导出的 BCK-代数$\langle M;*,1\rangle$的 BCK-滤子；F 是 M 的素 D-理想当且仅当 F 是 M 按命题1的方式导出的 BCK-代数$\langle M;*,1\rangle$的素 BCK-滤子。

引理1[17] 设 X 是有界可换的 BCK-代数，F 是 X 的真 BCK-滤子。则 F 是素 BCK-滤子的充要条件是

(P-F-1) 对任意 $x,y\in X$ 有 $N(x*y)\in I$ 或 $N(y*x)\in I$

引理2[17] 设 X 是有界可换的 BCK-代数，F 是 X 的 BCK-滤子。如果 $x\in X-F$，则一定存在 X 的一个素 BCK-滤子 A 使得 $A\supseteq F$ 且 $x\notin A$。

引理3[17] 设 X 是有界可换的 BCK-代数，则下列条件等价：

i) BCK-滤子{1}是素的；

ii) X 的所有真 BCK-滤子都是素的；

iii) $\langle X,\leqslant\rangle$是全序集。

引理4[13] 设 X 是有界可换 BCK-代数，F 是 X 的 BCK-滤子，定义关系$\sim_F$如下

$x\sim_F y$ 当且仅当 $N(x*y)\in F$、$N(y*x)\in F$

则$\sim_F$是 X 上的等价关系和同余关系，且$\langle X/F;*,[0]\rangle$为有界可换 BCK-代数，其中[0]为0所在的等价类，其上界为1所在的等价类[1]=F。

容易证明以下结果成立。

定理12 设 X 是有界可换 BCK-代数，F 是 X 的 BCK-滤子，关系$\sim_F$如上定义，则$\langle X/F;\leqslant\rangle$为全序集，当且仅当 F 是 X 的素 BCK-滤子。

证明：设$\sim_F$是 X 的素 BCK-滤子，则对任意$[x]$、$[y]\in X/F$，由引理1得 $N(x*y)\in F$ 或 $N(y*x)\in F$。由 $N(x*y)\in F$ 可得 $N((x*y)*0)\in F$，而 $N(0*(x*y))=N(0)=1\in F$，故$[x*y]=[0]$，即$[x]\leqslant[y]$；同样由 $N(y*x)\in F$ 可得$[y]\leqslant[x]$，即$\langle X/F;\leqslant\rangle$为全序集。

另一方面，若$\langle X/F;\leqslant\rangle$为全序集，则对任意 x、$y\in X$ 有$[x]\leqslant[y]$或$[y]\leqslant[x]$，从而$[x]*[y]=[0]$或$[y]*[x]=[0]$，于是 $N(x*y)\in F$ 或 $N(y*x)\in F$，据引理1，这说明 F 是 X 的素 BCK-滤子。

应用上述系列概念和结果，我们得到关于 UL-代数 D-理想的下述一些重要结论。

定理13 设 $M\in Y\Lambda$，F 是 M 的 D-理想。在 M 上定义二元关系$\sim_F$如下

$a\sim_F b$ 当且仅当$\neg(a\to b)\in F$、$\neg(b\to a)\in F$

则有：

i) $\sim_F$是 M 上的等价关系和同余关系，且 $M/F=\{[a]_F\mid a\in M\}$关于商运算构成 UL-代数，其中的偏序为$[a]_F\leqslant[b]_F$当且仅当$\neg(a\to b)\in F$。

ii) 如果 F 是素 D-理想，则 M/F 为全序集。

本定理可由引理4、定理12得到。

定理14 设 $M\in Y\Lambda$，F 是 M 的 D-理想。如果 $a\in M-F$，则一定存在 X 的一个素 D-理想 A 使得 $A\supseteq F$ 且 $a\notin A$。

本定理可由引理2得到。由于{0}为 D-理想，故得

推论1 设 $M\in Y\Lambda$，如果 $a\in M-\{0\}$，则一定存在 X 的一个素 D-理想 A 使得 $a\notin A$。

定义13 设 M 是 UL-代数，即 $M\in Y\Lambda$。如果 M 关于其序$\leqslant$构成全序集，则称 M 是 UL 链。

定理15 设 $M\in Y\Lambda$，$|M|>1$。则存在一簇 UL 链$\{M_t\mid t\in I\}$使得 M 可同构嵌入 $M^*=\prod_{t\in I}M_t$。

证明：设 $\Delta=\{F\mid F$ 是 M 的素 D-理想$\}$，由于$|M|>1$，应用推论1知 Δ 不空。由定理13ii)知，对任意 $F\in\Delta$，M/F 为 UL 链。下面证明，映射

$f:M\to M^*, x\,\alpha([x]_F)_{F\in D}$

是从 M 到 M^* 的嵌入映射，即 M 到 M^* 的单同态。

f 显然是同态映射。又，对任意 $a,b\in M$，若 $a\neq b$，不访设 $a\nleqslant b$，则 $a\to b\neq 1$，即$\neg(a\to b)\neq 0$，从而由推论1知，存在 M 的素 D-理想 F 使得$\neg(a\to b)\notin F$，于是在 M/F 中$[a]_F\leqslant[b]_F$不成立，即 $f(a)\neq f(b)$。

5 UL(M)-赋值及形式系统 UL 的弱完备性

定义14[11] 函数 $v:F(S)\to[0,1]$叫做 $F(S)$的 H-赋值，如果 v 满足

(i) $v(\neg A)=1-v(A)$;

(ii) $v(A\to B)=\min(1,1-v(A))+v(B)$

iii) $v(A\vee B)=\min(1,v(A)+v(B))$

可以在集合[0,1]上引入运算$\neg,\to,\vee$，对任意 $x,y\in[0,1]$规定

(i)$\neg x=1-x$;

(ii) $x\to y=\min(1,1-x+y)$

(iii) $x\vee y=\min(1,x+y)$

为叙述方便，称如上定义了运算$\neg,\to,\vee$运算的[0, 1]为 UL 区间，记为$[0,1]_{UL}$。

定义15 设 M 为 UL-代数，函数 $v:F(S)\to M$ 叫做一个 UL(M)-赋值，如果 v 满足

(i) $v(\neg A)=\neg v(A)$

(ii) $v(A\to B)=v(A)\to v(B)$

iii) $v(A\vee B)=v(A)\vee v(B)$

这就是说一个 UL(M)-赋值是从 $F(S)$ 到一个 UL-代数 M 的 $(\neg, \rightarrow, \vee)$ 型同态。

用 $\Omega(M)$ 表示全体 UL(M)-赋值之集。

定义16 设 M 是 UL-代数，即 $M\in Y\Lambda$，A 是 $F(S)$ 中的公式，如果对任意的 $v\in\Omega(M)$ 均有 $v(A)=1$，则称 A 为 UL(M)-重言式(永真式)，记为 $\models_M A$。特别地，当 $M=[0,1]_{UL}$，$\models_M A$ 简写为 $\models A$。

容易证明下述结论成立。

定理16 系统 UL 中的任意一条公理是任一个 UL-代数中的重言式。

定理17 设 M1、M2 $\in Y\Lambda$，且 M1 $\cong$ M2，则 UL(M1)-重言式一定是 UL(M2)-重言式、UL(M2)-重言式一定是 UL(M1)-重言式。

证明：设 A 是 UL(M1)-重言式，即 $\models_{M1} A$，且 $\sigma: M1\rightarrow M2$ 是同构映射，则对任意 $v\in\Omega(M2)$，$\sigma^{-1}ov\in\Omega(M1)$，从而 $\sigma^{-1}ov(A)=1$。但 σ^{-1} 是保序双射，故 $v(A)=1$，即 $\models_{M2} A$，这说明 UL(M1)-重言式一定是 UL(M2)-重言式．同理可证 UL(M2)-重言式一定是 UL(M1)-重言式。

定义17 设 A 是 $F(S)$ 中的公式，如果对任意的关于序 $\leqslant$ 构成全序集的 UL-代数 M 来说均有 $\models_M A$，则称 A 关于所有 UL 链永真。

定理18 若 A 关于所有 UL 链永真，则对任意 $M\in Y\Lambda$，A 是 UL(M)-重言式。

证明：根据定理15及定理17，只需证明对任意一簇 UL 链 $\{M_t|t\in I\}$，A 是 UL(M^*)-重言式，这里 $M^*=\prod_{t\in I}M_t$。

事实上，对任意 $v\in\Omega(M^*)$，有 $\sigma_t ov\in\Omega(M_t)$，其中 $\sigma_t: M^*\rightarrow M_t$ 是投影映射。若 $v(A)=(a_t)_{t\in I}\neq 1$，则存在 $t\in I$ 使得 $a_t\neq 1$，即 $\sigma_t\, ov(A)=\sigma_t(v(A))\neq 1$，这与 A 关于所有 UL 链永真矛盾。

定理19(可靠性) 设 A 是 $F(S)$ 中的公式，若 A 是定理，则对任意 $M\in Y\Lambda$，$\models_M A$。

证明：由定理16知，系统 UL 中的任意一条公理是 M 中的重言式。又 MP 规则保持重言式，即当 $A, A\rightarrow B$ 是 UL(M)-重言式，则 B 是 UL(M)-重言式。事实上，当 $v(A)=1$，$v(A\rightarrow B)=1$ 时有

$$v(B)=1\rightarrow v(B)=v(A)\rightarrow v(B)=v(A\rightarrow B)=1$$

定理20(关于赋值中介[F]的完备性) 设 A 是 $F(S)$ 中的公式，则 $\vdash A$ 当且仅当 $\models_{[F]} A$，这里 $[F]=F(S)/\approx$，$\approx$ 是可证等价关系。

证明：由定理19及 $[F]=F(S)/\approx$ 为 UL-代数知，当 $\vdash A$ 时必有 $\models_{[F]} A$。

下设 $\models_{[F]} A$ 成立，则对每个 UL([F])-赋值 v 均有 $v(A)=1$，特别地对映射

$$f: F(S)\rightarrow[F],\ f(A)=(A)$$

应有 $f(A)=1$，即 $[A]=1$，而[F]的最大元1恰由 $F(S)$ 中的全部定理组成，故 $\vdash A$。

定理21(弱完备性) 系统 UL 是弱完备的，即若 A 是 $F(S)$ 中的公式且 A 关于所有 UL 链永真，则 $\vdash A$ 当且仅当 $\models A$。

证明：若 $\vdash A$，则由定理19知 $\models A$。若 $\models A$，由于 A 关于所有 UL 链永真，故由定理18知对任意 $M\in Y\Lambda$，A 是 UL(M)-重言式，特别地 UL-代数 $[F]=F(S)/\approx$ 来说，A 是 UL([F])-重言式，即 $\models_{[F]} A$，据定理20得 $\vdash A$。

参考文献

1 Zadeh L A. Fuzzy Sets. Inform Contr, 1965, 8:338～353
2 Zadeh L A. Outline of a new approach to the analysis of complex systems and decision processes. IEEE Trans SMC, 1973, 1:28～44
3 李洪兴．从模糊控制的数学本质看模糊逻辑的成功．模糊系统与数学，1995，9(4)：1～14
4 王国俊．Fuzzy 命题演算的一种形式演绎系统．科学通报，1997，42(10)：1041～1045
5 王国俊．模糊推理的全蕴含三 I 算法．中国科学，E 辑，1999，29(1)：43～53
6 Wang Guojun. On the logic foundation of fuzzy reasoning. Information Science, 1999, 177: 47～88
7 王国俊．非经典数理逻辑与近似推理．北京：科学出版社，2000
8 裴道武，王国俊．形式系统 L* 的完备性及其应用．中国科学(E辑)，2002，32(1)：56～64
9 何华灿，刘永怀，何大庆．经验性思维中的泛逻辑．中国科学，E辑，1996，26：72～78
10 何华灿．泛逻辑学原理．北京：科学出版社，2001
11 张小红，何华灿，李伟华．泛逻辑的基本形式演绎系统 UL 及其可靠性．计算机科学(待发表)
12 Iseki K. An algebra related with a prepositional calculus. Proc. Japan Acad., 1966, 42: 26～29
13 Meng Jie, Jun Y B. BCK-algebras. Seoul Korea: Kyung Moon Sa Co., 1994
14 Palasinski M. Ideals in BCK-algebras which are lower semilattics. Math. Japan., 1981, 26: 245～250
15 Ahsan J, Deeba E Y, Thaheem A B. On prime ideals of BCK-algebras. Math. Japon., 1991, 36: 875～882
16 Meng Jie. Implicative commutative semigroups are equivalent to a class of BCK-algebras. Semigroup Forum, 1995, 25(1): 89～96
17 Meng Jie. BCK-filters. Math. Japon., 1996, 44(1): 119～129
18 庞彦军，刘开弟，刘军．模糊数学中"取大取小"运算引发的问题．系统工程理论与实践，2001，9：98～100

(上接第85页)

些前测数据，形成各种各样的议价模式，以便能在新的议价过程中进行匹配操作，同时，前测数据也可以在动态价格生成过程中，起到辅助的作用。同时需要较多的前测数据也是 DOBS 系统目前比较大的一个缺点。

我们将在以后的研究过程中，针对这几方面的问题进行深入的讨论和研究。

参考文献

1 Sandholm T. eMediator: A Next Generation Electronic Commerce Server. In: Proc. Nat'l Conf. Artificial Intelligence (AAAI-99), AAAI Press, Menlo Park, Calif., 1999. 923～924
2 Wurman P, Wellman M, Walsh W. The Michigan Internet AuctionBot: A Configurable Auction Server for Human and Software Agents. In: Proc. Second Int'l Conf. Autonomous Agents (Agents'98), ACM Press, New York, 1998
3 Guttman R H, Maes P. Agent-Mediated Integration Negotiation for Retail Electronic Commerce. In: Proc. Workshop on Agent Mediated Electronic Trading (AMET'98), Springer Verlag, Berlin, 1998
4 Chaver A, Maes P. Kasbah: An Agent Markerplace for Buying and Selling Goods. In: Proc. First Int'l Conf. Practical Application of Intelligent Agents and MultiAgent Technology (PAAM'96), The Practical Application Company, Blackpool, UK, 1996