

粗糙模糊集的格论性质^{*}

刘贵龙

(北京语言大学信息科学学院 北京100083)

Lattice Theory Properties of Fuzzy Rough Sets

LIU Gui-Long

(School of Information Sciences, Beijing Language and Culture University, Beijing 100083)

Abstract Let U denote a finite and nonempty set called the universe, and $P(U)$ a power set. Suppose R is an equivalence relation on U . Consider the equivalence relation $\approx (X \approx Y \Leftrightarrow \overline{R}X = \overline{R}Y \text{ and } \underline{R}X = \underline{R}Y, X, Y \in F(U))$ on $F(U)$, the quotient set denoted by $F(U)/\approx$. In this paper we show that $F(U)/\approx$ is a distributive lattice.

Keywords Rough fuzzy set, Distributive lattice, Lower approximation, Upper approximation

由 Pawlak 于1982年提出来的粗糙集(rough set)理论是一种处理不完全和不充分信息的数学工具,是传统集合论的拓展,近年来由于在机器学习、知识发现、模式识别、决策支持等领域获得成功的应用引起广大研究人员的关注,经过近20年来计算机科学领域和数学领域的学者的努力,粗糙集理论和应用都得到迅速的发展。

随着人们对粗糙集理论研究的深入,人们对粗糙集的概念也进行了扩展,比如 M. Banerjee^[1]等就把 Pawlak 的粗糙集的概念搬到模糊集上,定义了粗糙模糊集,并得出一些有趣的结论,相对来说,对于粗糙集人们讨论得较为深入,有比较深入的结果,而对于粗糙模糊集的讨论较少,它的许多性质尚待进一步的研究,本文的目的就是要探讨粗糙模糊集的格论性质,把有关粗糙集的格论性质完整地推广到粗糙模糊集上。

1 粗糙集的格论性质

设 U 是全集, R 是 U 上的等价关系(或称为不可区分关系), (U, R) 是相应的近似空间,定义集对 $\langle X_1, X_2 \rangle$ 如下^[4]:

$$\langle X_1, X_2 \rangle = \{X | X \subseteq U, \underline{R}X = X_1, \overline{R}X = X_2\}$$

所有集对 $\langle X_1, X_2 \rangle$ 的集合记为 $P(U)/\approx$, 文^[4]指出按照

$$\langle X_1, X_2 \rangle \wedge \langle Y_1, Y_2 \rangle = \langle X_1 \cap Y_1, X_2 \cap Y_2 \rangle;$$

$$\langle X_1, X_2 \rangle \vee \langle Y_1, Y_2 \rangle = \langle X_1 \cup Y_1, X_2 \cup Y_2 \rangle;$$

$$\sim \langle X_1, X_2 \rangle = \langle \sim X_2, \sim X_1 \rangle, \text{ 这里 } \sim \text{ 表示集合的补运算}$$

$P(U)/\approx$ 构成一个分配格^[4], 本文我们将把此结论完整地推广到粗糙模糊集上, 即我们将证明粗糙模糊集也完全具有上述性质。

2 粗糙模糊集的定义及基本性质

设 (U, R) 是近似空间, $x \in U$, $[x]$ 表由等价关系 R 确定的、元素 x 所在的等价类, $F(U)$ 表 U 上模糊集的全体, 若 $X \in F(U)$, $X(x)$ 表元素 x 属于 X 的隶属度, 若 $\lambda \in [0, 1]$, X_λ 表模糊集 X 的截集, 即 $X_\lambda = \{x | X(x) \geq \lambda\}$, 模糊集 X 的上下近似^[1]分别定义为 $\overline{R}X, \underline{R}X \in F(U)$:

$$(\overline{R}X)(x) = \bigvee_{y \in [x]} X(y), (\underline{R}X)(x) = \bigwedge_{y \in [x]} X(y)$$

这里符号 $\bigvee, \bigwedge$ 分别表示取大、取小。对于模糊粗糙集我们有下列性质:

命题1 设 (U, R) 是近似空间, $X \in F(U)$, 则

(1) $\forall \lambda \in [0, 1]$ 有 $(\overline{R}X)_\lambda = \overline{R}X_\lambda$;

(2) $\forall \lambda \in [0, 1]$ 有 $(\underline{R}X)_\lambda = \underline{R}X_\lambda$ 。

证明: (1) 的证明见^[2], 现证 (2); 设 $x \in (\underline{R}X)_\lambda$, 按定义 $(\underline{R}X)(x) \geq \lambda$, 即 $\bigwedge_{y \in [x]} X(y) \geq \lambda$, 因此 $\forall y \in [x], X(y) \geq \lambda$, 于是 $[x] \subseteq X_\lambda, x \in \underline{R}(X_\lambda)$, 即我们有 $(\underline{R}X)_\lambda \subseteq \underline{R}X_\lambda$, 类似地可以证明 $(\underline{R}X)_\lambda \supseteq \underline{R}X_\lambda$, 即 (2) 得证。

与粗糙集的粗相等一样, 我们也可以定义粗糙模糊集的粗相等。

定义1 设 (U, R) 是近似空间, $X, Y \in F(U)$, (1) 如果 $\overline{R}X = \overline{R}Y$, 则称模糊集 X 与 Y 上粗相等; (2) 如果 $\underline{R}X = \underline{R}Y$, 则称模糊集 X 与 Y 下粗相等; (3) 如果模糊集 X 与 Y 上粗相等且下粗相等, 则称 X 与 Y 粗相等, X 与 Y 粗相等的事实记为 $X \approx Y$ 。

显然, 上粗相等、下粗相等、粗相等关系都是等价关系, 但由于上粗相等及下粗相等讨论起来较为简单, 本文不予考虑, 我们仅讨论粗相等, 由于粗相等是一个等价关系, 因而确定 $F(U)$ 的一个分类, 相应的商集(或称商空间)记为 $F(U)/\approx$, X 所在的等价类记为 $[X]$, 我们将证明 $F(U)/\approx$ 是一个有界分配格, 由于我们较多地用到模糊集的概念, 我们先给出模糊集的一个命题, 以备引用。

命题2 设 X, Y 均为 U 上的模糊集合, 则 $X = Y$ 当且仅当对任意的实数 $\lambda, 0 \leq \lambda \leq 1$, 有 $X_\lambda = Y_\lambda$ 。

证明: 由模糊集的分解定理, $X = \bigcup_{\lambda \in [0, 1]} \lambda X_\lambda = \bigcup_{\lambda \in [0, 1]} \lambda Y_\lambda = Y$ 。

命题3 设 (U, R) 是近似空间, $X, Y \in F(U)$, 则

(1) $\overline{R}(\overline{R}X \cup Y) = \overline{R}X \cup \overline{R}Y$;

(2) $\overline{R}(\overline{R}X \cap Y) = \overline{R}X \cap \overline{R}Y$ 。

证明: 由命题1、2, 我们仅需证明对任意的 $\lambda, 0 \leq \lambda \leq 1$, 有 $\overline{R}(\overline{R}X_\lambda \cup Y_\lambda) = \overline{R}X_\lambda \cup \overline{R}Y_\lambda$ 及 $\overline{R}(\overline{R}X_\lambda \cap Y_\lambda) = \overline{R}X_\lambda \cap \overline{R}Y_\lambda$, 这正是普通粗糙集所具有的性质。

设 (U, R) 是近似空间, 等价关系 R 所确定的商空间为 U/R , 在商空间的每个等价类中取一个元素, 称为该类的代表元, 所有这样的代表元构成一个集合, 记为 I , 我们来给出与 I 有关的一些性质。

^{*}教育部科学技术重点项目资助, 刘贵龙 教授, 博士, 研究方向为代数学, 计算机应用。

命题4 设 (U, R) 是近似空间, I 的意义如上, $X, Y \in F(U)$, 则

$$(1) \overline{R}(\overline{R}X \cap I) = \overline{R}X;$$

$$(2) \underline{R}((\overline{R}X \cup \overline{R}Y) \cap I) \subseteq \underline{R}X \cup \underline{R}Y.$$

证明: 由及命题1, 2, 我们仅需证明对 U 的普通子集 X 命题成立即可, 显然, $x \in \overline{R}(\overline{R}X \cap I) \Leftrightarrow [x] \cap \overline{R}X \cap I \neq \emptyset \Leftrightarrow [x] \cap \overline{R}X \neq \emptyset \Leftrightarrow [x] \subseteq \overline{R}X \Leftrightarrow x \in \overline{R}X$, 即(1)式成立, 又 $x \in \underline{R}((\overline{R}X \cup \overline{R}Y) \cap I) \Rightarrow [x] \subseteq (\overline{R}X \cup \overline{R}Y) \cap I \Rightarrow |[x]| = 1$ 及 $x \in X \cup Y$ 于是 $x \in \underline{R}X \cup \underline{R}Y$, 这里 $|[x]|$ 表示集合 $[x]$ 的基数, (2)得证。

3 粗糙模糊集的格论性质

有了前两小节的准备, 我们可以给出本文的主要结论。

设 U 是全集, R 是 U 上的等价关系, 粗相等关系是 $F(U)$ 的等价关系, 确定了 $F(U)$ 的分类, 其类构成的商集为 $F(U)/\approx$, 为了研究方便, 我们把商集 $F(U)/\approx$ 的元素 $[X]$ ($X \in F(U)$, 且 $\overline{R}X = X_2, \underline{R}X = X_1$) 写成模糊集对 $\langle X_1, X_2 \rangle$ 的形式, 即我们有:

$$\langle X_1, X_2 \rangle = \{X | X \subseteq F(U), \underline{R}X = X_1, \overline{R}X = X_2\}$$

由于对等价类 $[X]$ 的运算较为繁琐, 我们转而考虑模糊集对 $\langle X_1, X_2 \rangle$ 的运算(事实上, 这两种运算本质上是等价的), 为此定义:

$$\langle X_1, X_2 \rangle \wedge \langle Y_1, Y_2 \rangle = \langle X_1 \cap Y_1, X_2 \cap Y_2 \rangle; \quad (1)$$

$$\langle X_1, X_2 \rangle \vee \langle Y_1, Y_2 \rangle = \langle X_1 \cup Y_1, X_2 \cup Y_2 \rangle; \quad (2)$$

$$\sim \langle X_1, X_2 \rangle = \langle \sim X_2, \sim X_1 \rangle \quad (3)$$

我们证明按照上述定义 $F(U)/\approx$ 构成一个有界分配格:

设 $X \in \langle X_1, X_2 \rangle, Y \in \langle Y_1, Y_2 \rangle$ 我们通过证明 $\langle X_1 \cap Y_1, X_2 \cap Y_2 \rangle \neq \emptyset, \langle X_1 \cup Y_1, X_2 \cup Y_2 \rangle \neq \emptyset$ 及 $\langle \sim X_2, \sim X_1 \rangle \neq \emptyset$, 来给出我们的结论, 事实上, 我们有

定理1 设 U 是全集, R 是 U 上的等价关系, $\langle X_1, X_2 \rangle$ 的意义如上, $X \in \langle X_1, X_2 \rangle, Y \in \langle Y_1, Y_2 \rangle$, 则

$$(1) \underline{R}X \cup \underline{R}Y \cup ((\overline{R}X \cup \overline{R}Y) \cap I) \in \langle X_1 \cup Y_1, X_2 \cup Y_2 \rangle;$$

$$(2) \underline{R}X \cap \underline{R}Y \cup (\overline{R}X \cap \overline{R}Y \cap I) \in \langle X_1 \cap Y_1, X_2 \cap Y_2 \rangle;$$

$$(3) \sim X \in \langle \sim X_2, \sim X_1 \rangle.$$

证明: (1)由命题3, 4及上下近似的性质

$$\begin{aligned} \underline{R}(\underline{R}X \cup \underline{R}Y \cup ((\overline{R}X \cup \overline{R}Y) \cap I)) &= \underline{R}X \cup \underline{R}Y \cup \underline{R}((\overline{R}X \cup \overline{R}Y) \cap I) \\ &= \underline{R}X \cup \underline{R}Y \cap \underline{R}((\overline{R}X \cap I \cup \overline{R}Y \cap I)) = \underline{R}X \cup \underline{R}Y \cup \underline{R}X \cup \underline{R}Y = \underline{R}X \cup \underline{R}Y = X_2 \cup Y_2; \end{aligned}$$

$$\text{又 } \underline{R}(\underline{R}X \cup \underline{R}Y \cup ((\overline{R}X \cup \overline{R}Y) \cap I)) = \underline{R}X \cup \underline{R}Y \cup \underline{R}((\overline{R}X \cup$$

$$\overline{R}Y) \cap I) = \underline{R}X \cup \underline{R}Y = X_1 \cup Y_1, \text{ 即(1)成立;}$$

$$\begin{aligned} (2) \underline{R}(\underline{R}X \cap \underline{R}Y \cup (\overline{R}X \cap \overline{R}Y \cap I)) &= \underline{R}(X \cap Y) \cup \underline{R}(\overline{R}X \cap \overline{R}Y \cap I) \\ &= (\underline{R}X \cap \underline{R}Y) \cup (\overline{R}X \cap \overline{R}Y) = \underline{R}X \cap \overline{R}Y = X_2 \cap Y_2; \text{ 且 } \underline{R} \\ (\underline{R}X \cap \underline{R}Y \cup (\overline{R}X \cap \overline{R}Y \cap I)) &= (\underline{R}X \cap \underline{R}Y) \cup \underline{R}(\overline{R}X \cap \overline{R}Y \cap I) \\ &= (\underline{R}X \cap \underline{R}Y) = X_1 \cap Y_1, \text{ 即(2)成立;} \end{aligned}$$

我们只要注意到上下近似是一对粗算子即得(3)。

由定理1, 上面给出的定义(1)、(2)及(3)有意义, 容易验证 $\wedge, \vee$ 满足交换律, 结合律和吸收律, 即有

定理2 设 U, R 的意义如上, 则 $\langle F(U)/\approx, \wedge, \vee, \sim \rangle$ 构成一个有界分配格。

证明: $\langle F(U)/\approx, \wedge, \vee, \sim \rangle$ 构成一个格是显然的, 容易看出分配律成立, 因此是分配格, $\langle \emptyset, \emptyset \rangle$ 是最小元, $\langle U, U \rangle$ 是最大元, 故 $\langle F(U)/\approx, \wedge, \vee, \sim \rangle$ 是一个有界分配格。

以上我们是通过代数的方法给出 $\langle F(U)/\approx, \wedge, \vee, \sim \rangle$ 的格结构, 实际上, 也十分容易地给出它的偏序结构, 即:

$$\langle X_1, X_2 \rangle \subseteq \langle Y_1, Y_2 \rangle \Leftrightarrow X_1 \subseteq Y_1 \text{ 及 } X_2 \subseteq Y_2$$

类似于普通的包含关系。

结束语 我们已经证明 $\langle F(U)/\approx, \wedge, \vee, \sim \rangle$ 构成了一个分配格, 而 $P(U)/\approx$ 也是一个分配格, 那么这两个格的关系如何? 从两个格的定义容易看出, 它们的运算规律完全一样, 且 $P(U)/\approx$ 是 $F(U)/\approx$ 的一个子集, 因此 $P(U)/\approx$ 是 $F(U)/\approx$ 的一个子格。由于 $P(U)$ 是 $F(U)$ 的真子集, 我们的讨论确实推广了经典粗糙集的有关格论性质。

参考文献

- 1 Banerjee M, Pal S K. Roughness of a fuzzy set. Information Sciences, 1996, 93: 235~246
- 2 刘贵龙. 模糊近似空间上的粗糙模糊集及其粗糙度. 计算机科学, 2002, 29(9. 专刊): 144~146
- 3 Lin T Y, Liu Q. Rough approximate operators, axiomatic rough set theory. In: Ziarko W P, ed. Rough sets, Fuzzy sets and Knowledge Discovery, London, Springer-Verlag, 1994. 256~260
- 4 Yao Y Y, Wong S K M, Lin T Y. A review of rough set models, Rough set and data mining, Analysis for imprecise data. T. Y. Lin, N. Cercone, eds, Kluwer Academic Publishers, Boston, 1997. 47~75
- 5 张文修, 等. 粗糙集理论与方法. 科学出版社, 2001
- 6 李洪兴, 汪培庄. 模糊数学. 国防工业出版社, 1994