

一种基于自适应阈值的图像去噪新方法^{*}

尚晓清 王军锋 宋国乡

(西安电子科技大学理学院数学系 西安710071)

Adaptive Wavelet Thresholding for Image Denoising

SHANG Xiao-Qing WANG Jun-Feng SONG Guo-Xiang

(School of Science, Xidian University, Xi'an 710071)

Abstract Selecting threshold is the most important in threshold-based nonlinear filtering by wavelet transform. In this paper, a novel adaptive threshold is proposed by minimizing a Bayesian risk (It is adaptive to subband because it depends on data-driven estimates of the parameters). Combining this thresholding method with Wiener filtering can result a new denoising method. Experimental results show that the proposed method indeed remove noise significantly and retaining most image edges. The results compare favorably with the reported results in the recent denoising literature.

Keywords Image processing, Shrinkage denoising, Wavelet transform

1 引言

利用小波去除信号或图像中噪声的方法在过去十年间得到了广泛的关注。大体上可以分为三个阶段:最初是将含噪信号作正交小波变换,然后对其系数取阈值得到去噪后的信号^[1]。第二阶段是采用平移不变的方法^[2],对非采样的小波变换进行阈值处理,从而在视觉效果上可获得较大的改进。近来,通过对小波系数的树结构及在边缘处呈现的所谓“父子”相关性的分析,又提出了一种“基于树”的小波去噪方法^[3]。此外,将小波与隐藏的马尔科夫模型及空间自适应方法^[4]结合起来,或使用其它的基函数,如脊波^[5]或曲波^[6],有助于提高模型的精确性,改善去噪性能。

Wiener 滤波是一种传统的线性去噪方法,在已知期望信号和噪声的统计特性下,Wiener 滤波在 MSE 意义下是最优的估计器。本文将一种自适应阈值的小波去噪方法与 Wiener 滤波结合起来,获得了很好的去噪效果,实验结果也证明了该方法的有效性。

2 基于 Bayesian 估计的自适应阈值

假设 X 服从均值为0、方差为 σ_x^2 的高斯分布,即 $X \sim N(0, \sigma_x^2)$,贝叶斯风险函数如下定义:

$$\gamma(T) = E(\hat{X} - X)^2 = E_X E_{Y|X}(\hat{X} - X)^2 \quad (1)$$

对于给定的参数,我们的目的就是要寻找一个阈值 T ,使 $\gamma(T)$ 达到最小。用 T^* 表示优化的阈值, $T^* = \arg \min_T \gamma(T)$,以下来寻找这个优化值 T^* 。

$$E_X E_{Y|X}(\hat{X} - X)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (\eta_T(y) - x)^2 p(y|x) \cdot p(x) dy dx = \sigma^2 \omega\left(\frac{\sigma_x^2}{\sigma^2}, \frac{T}{\sigma}\right) \quad (2)$$

其中 $\omega(\sigma_x^2, T) = \sigma_x^2 + 2(T^2 + 1 - \sigma_x^2) \bar{\phi}\left(\frac{T}{\sqrt{1 + \sigma_x^2}}\right) - 2T(1 + \sigma_x^2) \phi(T, 1 + \sigma_x^2)$

标准密度函数 $\phi(x, \sigma^2) = (1/\sqrt{2\pi\sigma^2}) \exp(-(x^2/2\sigma^2))$,

$$\bar{\phi}(x) = \int_x^{\infty} \phi(t, 1) dt$$

$$\text{从而得 } T_B(\sigma_x) = \frac{\sigma^2}{\sigma_x} \quad (3)$$

$T_B(\sigma_x)$ 是对 T^* 的一个近似,最大偏差不超过1%。下面来估计(3)式中的参数。

噪声方差 σ^2 可通过对最高频子带(HH₁)采用鲁棒的中值绝对方差来估计^[7],估计值用 $\hat{\sigma}$ 表示:

$$\hat{\sigma} = \text{Median}(|Y_{ij}|)/0.6745 \quad Y_{ij} \in \text{subband HH}_1 \quad (4)$$

$$\hat{\sigma}_Y^2 = \frac{1}{n^2} \sum_{i,j=1}^n Y_{ij}^2 \quad n \times n \text{ 为考虑的子带大小} \quad (5)$$

$$\hat{\sigma}_x = \sqrt{\max(\hat{\sigma}_Y^2 - \hat{\sigma}^2, 0)} \quad (6)$$

故得到数据驱动的、基于子带的自适应阈值:

$$\hat{T}_B(\hat{\sigma}_x) = \frac{\hat{\sigma}^2}{\hat{\sigma}_x} \quad (7)$$

这里得到的阈值公式(7)在 MSE 意义上是近优的,其去噪效果与 SURE 阈值法相当,但计算量要比 SURE 阈值法小得多。

3 Wiener 滤波

假设一信号被均值为0、方差为 σ^2 的高斯白噪声污染,即 $Y = X + \sigma Z$,维纳滤波就是下面的线性过程:

$$\hat{Y} = \sum_m \frac{\beta_m}{\beta_m^2 + \sigma^2} \langle Y, g_m \rangle g_m \quad (8)$$

其中 β_m 和 g_m 分别为 X 的协方差矩阵的特征值和特征向量。若 X 是高斯分布,则 $\hat{Y}$ 是对 X 在均方意义下最佳的估计。维纳滤波需估计信号的协方差矩阵(K-L 变换),当局部方差大时,滤波器的平滑效果较小。它可以更好地保留图像的边缘和高频细节信息。

4 本文去噪方法

假设观测到的噪声图像为

^{*} 陕西省自然科学基金(2000SL02)资助项目。尚晓清 讲师,博士生,主要研究方向为小波理论及其在图像处理中的应用。王军锋 副教授,宋国乡 教授,博导。

$$g_{ij} = f_{ij} + e_{ij} \quad i, j = 1, \dots, N \quad (9)$$

其中 e_{ij} 为独立同分布的高斯白噪声 $N(0, \sigma^2)$, 降噪的目的就是根据 $\{g_{ij}\}$ 得到 $\{f_{ij}\}$ 的估计值 $\{\hat{f}_{ij}\}$, 使这两者的均方误差 (MSE) 最小。

$$MSE(\hat{f}) = \frac{1}{N^2} \sum_{i,j=1}^N (\hat{f}_{ij} - f_{ij})^2 \quad (10)$$

由小波变换的特性知, 高斯噪声经过正交小波变换仍然是高斯分布的, 而信号的能量只分布在一小部分系数上。因而对小波分解后的各层细节系数采用阈值处理, 可保留大部分信号系数, 去除大部分噪声。此方法可用以下三个主要步骤来描述:

(1) 应用小波变换 W 计算小波系数矩阵 w :

$$w = Wg = Wf + We \quad (11)$$

(2) 对 w 中的细节系数进行阈值处理以获得小波系数 X 的估计 $\hat{w}$:

$$w \rightarrow \hat{w} \quad (12)$$

(3) 对阈值处理后的系数进行逆变换即可得到降噪的估计值:

$$\hat{f} = W^{-1}\hat{w} \quad (13)$$

其中最关键的是第二步的阈值处理, 常用的阈值方法有两种: 硬阈值和软阈值, 数学表达式分别为:

$$\delta_1^H(w) = wI_{(|w|>\lambda)} \quad (14)$$

$$\delta_1^S(w) = \text{sgn}(w) (|w| - \lambda) I_{(|w|>\lambda)} \quad (15)$$

由于软阈值具有连续性, 并且在 Besov 空间中很大程度可达到近优的效果, 实际应用中其视觉效果也优于硬阈值方法, 故选用式 (15) 所表达的软阈值方法。

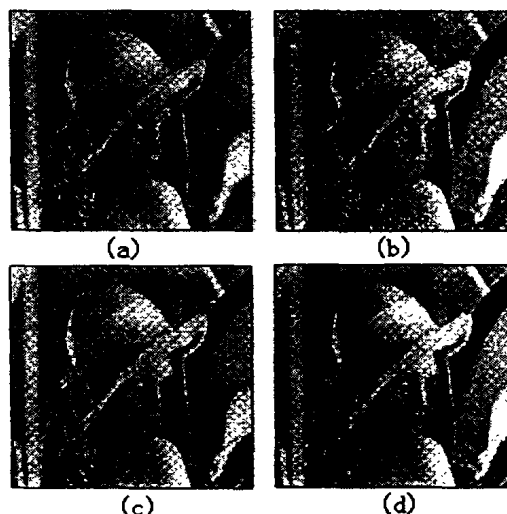
本文提出的阈值去噪算法的基本思想是首先对含噪图像作正交小波变换, 然后将变换后的高频小波系数采用 (7) 式分别对每一尺度作软阈值处理, 用处理后的小波系数进行重构, 得到经过 Bayesian 方法去噪的图像, 进一步对重构的图像进行 Wiener 滤波, 得到最终滤波图像。

5 实验结果

实验采用的是各种不同的 (512×512) 标准灰度图像, 对其施加不同强度的白噪声 $\sigma = 10, 20, 30$, 先对图像用基于自适应的阈值方法做去噪处理, 再对其恢复图像做 Wiener 滤波 (实验时采用的是 MATLAB 工具箱中的自适应滤波器 wiener2)。去噪效果用均方误差 (MSE) 及信噪比 (SNR) 来衡量。表 1 中列出了几种方法对 Lena 图像在不同噪声水平下的去噪效果, 可以看出, 本文方法具有比其它几种方法更高的信噪比。图 1(a)~(d) 是几种方法对 Lena 图像在 $\sigma = 20$ 时的去噪效果比较, 直观上也可以看出本文方法的视觉效果更好。

表 1 几种方法的去噪结果 (Lena)

	$\sigma = 10$		$\sigma = 20$		$\sigma = 30$	
	MSE	SNR	MSE	SNR	MSE	SNR
噪声图像	99.78	13.62	400.13	7.73	896.35	4.05
通用阈值降噪	76.45	14.76	123.54	12.68	156.90	11.64
Sureshrink 降噪	30.26	18.79	63.95	15.58	94.13	13.99
TAWS 降噪	29.73	18.93	62.85	15.86	94.58	13.87
本文方法	26.28	19.26	55.61	16.37	81.74	14.27



(a) 原始图像 (b) 含噪声图像 ($\sigma = 20$)
(c) SureShrink 方法 (d) Bayesian+Wiener 方法
SNR = 15.58 SNR = 16.37
图 1 几种方法去噪结果的比较

结束语 图像的小波系数可总结为一般高斯分布, 本文通过最小化一个 Bayesian 风险函数, 用其得到的一种自适应阈值结合 Wiener 滤波, 获得了很好的去噪效果, 实验结果证明了该方法效果优于单纯的小波阈值去噪方法, 也优于文 [3] 中的“基于树”的去噪方法。这说明在实际应用中, 将不同去噪方法结合起来可能会取得更好的效果。由于小波理论还在不断的发展当中, 如脊波和曲波, 新的更有效的去噪方法有待进一步研究。

参考文献

- Donoho D L. Denoising by soft-thresholding. IEEE Trans. Inform. Theory, 1995, 5(41): 613~627
- Coifman R, Donoho D. Translation-invariant denoising. Wavelets and Statistics. Lecture Notes in statistics, Springer, 1995
- Walker J S, Chen Ying Jui. Image denoising using tree-based wavelet subband correlation and shrinkage. Opt. Eng., 2000, 11: 2900~2908
- Crouse M S, Nowak R D, Baraniuk R G. Wavelet-based signal processing using hidden Markov models. IEEE Trans. Signal Processing, 1998, 46(4): 886~902
- Do M N, Vetterli M. Orthonormal finite ridgelet transform for image compression. In: Proc. IEEE Int. Conf. Image Processing (ICIP), Sept. 2000
- Starck J L, Candès E J, Donoho D L. The curvelet transform for image denoising. IEEE Trans. Image Processing, 2002, 6: 670~684
- Chang S G, Bin Yu, Vetterli M. Adaptive wavelet thresholding for image denoising and compression. IEEE Trans. Image Processing, 2000, 9: 1532~1546