

一个基于最小割集扩容的网络优化算法^{*})

刘玉华^{1,2} 毛经中³ 肖德宝¹

(华中师范大学计算机科学系 武汉430079)¹ (华中科技大学计算机科学与技术学院 武汉430074)²

(华中师范大学数学系 武汉430079)³

Optimization Algorithm on Network Based on Capacity Expansion of the Mimimum Cutset

LIU Yu-Hua^{1,2} MAO Jing-Zhong³ XIAO De-Bao¹

(Department of Computer Science, Central China Normal University, Wuhan 430079)¹

(College of Computer Science and Technology, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074)²

(Department of Mathematics, Central Normal University, Wuhan 430079)³

Abstract When designing the topology architecture of a large network, or managing and controlling a run network, the bottleneck is always changeable with the increase of the network flow, which must be considered. In this paper, after analyzing the Ford-Fulkerson algorithm, we point out the relationship between the network min-cutset and the network bottleneck, present an optimal capacity expansion algorithm based on min-cutset, and take a network instance to analyze and prove our algorithm in detail. This algorithm can improve the capacity of network effectively and solve the bottleneck problem of the network.

Keywords Maximum flow, Minimum cutset, Capacity expansion network, Optimal algorithm

1. 引言

随着计算机网络业务日益繁忙,通信流量的激增而致使网络发生拥塞出现瓶颈,甚至造成网络停滞或瘫痪,所以对大型网络拓扑结构的优化设计是网络规划的首要任务,通常采用扩充网络最大容量和网络增强性连接来优化网络设计^[1,2]。在利用 Ford-Fulkerson 算法求网络最大流时,得到网络的一个最小割集,最小割集中的弧即为瓶颈。所以解决网络瓶颈问题可以通过寻找网络最小割集解决。但是 Ford-Fulkerson 算法并不能一次搜索出网络中全部最小割集,对于求网络中所有最小割集并扩大其容量问题在理论上少有人探讨,而实际工程中又大量面临这一问题^[3]。

本文提出了一个基于网络流理论中最小割集理论的网络优化扩容算法,该算法试图在保持网络拓扑结构不变的前提下,扩大最小割集中弧的容量来扩大网络通过的最大流量,使其达到指定的值,从而改善网络的通行能力,解决瓶颈问题^[4]。此算法可适用于一切以网络为背景的流量问题,如通信网、资金网、交通网等。

2. 问题描述

本节介绍文章中用到的数学概念及符号^[5],描述求最大流最小割集的 Ford-Fulkerson 算法,并分析此算法在求解网络最小割集中存在的不足之处。

2.1 基本概念

定义1 给定一个有向图 $D=(V,A,C)$, 其中 V 是顶点集, A 是弧集, C 是一个函数: $A \rightarrow R^+$ 。在 V 中指定一点称为发点(记为 V_s), 指定另一点称为收点(记为 V_t), 其余点称为

中间点; 对每条弧 $(V_i, V_j) \in A$, 对应有一个非负值 $C(V_i, V_j) \geq 0$ (记为 C_{ij}), 称为弧的容量, 称网络 $D=(V,A,V_s,V_t,C)$ 为指定了容量的网络, 简称容量网络。

定义2(最大流问题) 在一个带发点和收点的容量网络 $D=(V,A,V_s,V_t,C)$ 中, 求一个流 $f: A \rightarrow R=\{f_{ij}\}$, 其中 $f_{ij}=f(V_i, V_j)$ 表示沿弧 (V_i, V_j) 通过的流, 使其流量 $V(f) = \sum_{(V_i, V_j) \in A} f(V_i, V_j) - \sum_{(V_i, V_j) \in A} f(V_i, V_j)$ 达到最大, 并满足:

$$0 \leq f_{i,j} \leq c_{i,j} \quad (V_i, V_j) \in A \quad (1)$$

$$\sum_j f_{ij} - \sum_j f_{ji} = \begin{cases} V(f) & (i=s) \\ 0 & (i \neq s, t) \\ -V(f) & (i=t) \end{cases} \quad (2)$$

则称 f 为最大流, 流量为 $V(f)$, 称满足条件(1)与(2)的流 $f=\{f_{ij}\}$ 为一个可行流。

定义3 设 f 是容量网络 D 的一个可行流, (V_i, V_j) 为 D 的一条弧, 如 f 在弧 (V_i, V_j) 上的流量 $f_{ij}=0$, 则称 (V_i, V_j) 为 f 零弧, 否则当 $f_{ij}>0$ 时称 (V_i, V_j) 为 f 的正弧, 当 $f_{ij}<0$ 时, 称 (V_j, V_i) 为 f 的负弧; 如果 f 在弧 (V_i, V_j) 上的流量 $f_{ij}=C_{ij}$, 则称 (V_i, V_j) 为 f 饱和弧, 否则称 (V_i, V_j) 为 f 非饱和弧。

2.2 问题的提出

Ford-Fulkerson 算法^[6](1957年)应用标号法从带发点 V_s 和收点 V_t 的容量网络 D 中搜索关于任意一个可行流 f_1 的增广链, 并对 f_1 进行调整, 得到流量增大的新流 f_2 , 然后在 D 中搜索关于 f_2 的增广链, 对 f_2 调整..., 直到 D 中不存在关于 f_1 的增广链为止, 最终得到网络的最大流量 $V(f)$ 及相应的流 f 。此时 D 中存在已标号点集 S 与未标号点集 $\bar{S}$ 且满足 $V_s \in S$, $V_t \in \bar{S}$, $S \cup \bar{S} = V$, $S \cap \bar{S} = \emptyset$, 则 $R=(S, \bar{S})$ 是网络 D 中一个最小割集。最小割集中弧的容量之和称为这个割集的容量, 记为

^{*}) 本课题得到湖北省自然科学基金(No. 2001ABB013)、湖北省科技攻关重大项目基金(No. 2001AA105A04)资助。刘玉华 副教授, 博士生, 主要研究方向为计算机网络规划与设计、网络优化算法、网络管理与控制。毛经中 教授, 主要研究领域为图论、运筹学。肖德宝 教授, 从事计算机网络管理与控制领域研究。

$C(S, \bar{S}) = \sum_{(V_i, V_j) \in (S, \bar{S})} C(V_i, V_j)$, 其中求和是对进行 $\forall V_i \in S, V_j \in \bar{S}$ 进行。一个网络的最大流可由此网络最小割集的容量来确定, 这就是最大流-最小割集定理。

定理1 对于任意给定容量网络 $D=(V, A, C)$, 从起点 V_s 到终点 V_t 的最大流的流量必等于分割 V_s 与 V_t 的最小割集 $(S, \bar{S})$ 的容量^[5]。

从以上分析可以看出 Ford-Fulkerson 算法在求网络最大流的同时, 也找到了该网络的一个最小割集, 而最小割集中弧都是饱和弧, 是使流量不再增加的关键所在, 去掉这些瓶颈弧后, 就不存在 V_s 到 V_t 的通路了。于是我们可采用扩充最小割集中饱和弧的容量来改善整个网络流的通行能力^[7,8]。但是 Ford-Fulkerson 算法不能一次求出网络中所有最小割集, 而且原网络中不属于最小割集的 f 饱和弧, 可能出现在容量扩充后的新网络最小割集中, 它又成为新的瓶颈弧。因此, 要使得最大流量增大, 必须在不断更新的网络中寻找新的最小割集并进行扩容调整, 直至最小割集容量达到我们的期望值为止。

3. 网络扩容算法核心思想

综上所述, 增加网络最大流的关键在于破坏最小割集中

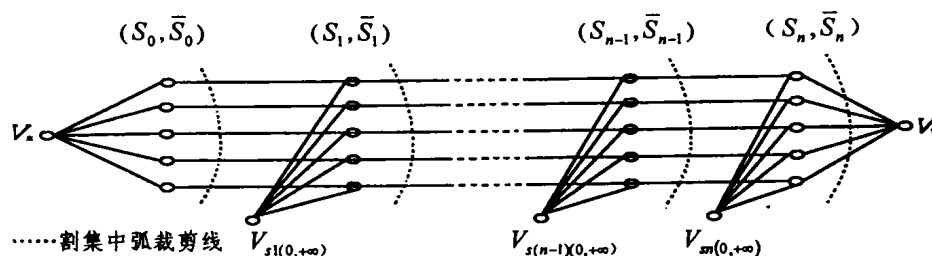


图1 含 n 个最小割集及构造 n 个虚拟发点的扩容网络全局示意图

算法第二部分(算法2)是对算法1中求出的各个最小割集中饱和弧进行容量扩充。其设计思想是从 V_s 至 V_t 方向, 先取最末一个最小割集 R_n , 计算其容量与我们所指定最大流 F 的差值, 然后选择 R_n 中任意一条弧进行扩容, 即增加差额流量, 使得最末一个扩容网络中的流量等于我们所给定的网络最大流量 F 值。进一步采用 Ford-Fulkerson 算法可求出 D_n 扩容网络中各弧的流量分布情况。然后将其代入 D_{n-1} 扩容网络, 对 R_{n-1} 最小割集中每条弧, 计算其调整量并进行逐条弧的扩容。调整量定义如下:

定义4 取割集中一条饱和弧 (V_s, V_i) , 其中 $V_s \in S, V_i \in \bar{S}$, 检查所有与 V_i 关联且不在 $(S, \bar{S})$ 中的弧, 记 $P = \{V_j | V_j \in V, (V_i, V_j) \in A\}$, 即 P 是点 V_i 的出弧终点集; $Q = \{V_j | V_j \in V, (V_j, V_i) \in A\}$, 即 Q 是点 V_i 的入弧起点集; $g = \sum_{V_j \in P} f_{ij} - \sum_{V_j \in Q} f_{ji}$, 即 g 是在扩容网络中点 V_i 所可能通过的出流与入流的差, 亦即点 V_i 要求原网络中要流入 V_i 的流量; $\delta_i = g - C_{si}$, 则 δ_i 为弧 (V_s, V_i) 的容量 C_{si} 所需的调整量。

经过对 R_n 割集中饱和弧逐条扩容后, 由于部分流量改变, 所以在 D_{n-1} 扩容网络中有可能出现新的最小割集, 因此需要用算法1重新反复对 D_{n-1} 扩容网络搜索最小割集, 直至查找出 D_{n-1} 中全部最小割集并扩容完毕。至此再将 D_{n-1} 中流量分布情况代入 D_{n-2} 扩容网络, 再对 R_{n-2} 割集中饱和弧逐条扩容..., 如此反复进行至恢复原网络拓扑 D 为止。此时 D 中弧的容量

弧的饱和性, 也即对其瓶颈弧进行容量扩充。针对 Ford-Fulkerson 算法的不足, 我们设计了一个新型的基于最小割集扩容的优化算法。该算法分为两大部分, 设计为算法1和算法2^[4]。首先算法1是在不断更新的网络中搜索最小割集。此处引入辅助扩容网络概念。其思想是先采用 Ford-Fulkerson 算法, 在 D 中求出一个最大流 f_i 与最小割集 $R_i = (S_i, \bar{S}_i)$, 并保存这些信息。然后构造新网络 $D' = (V', A')$, 其中 $V' = \bar{S}_i \cup \{V_i\}$, 此处 V_i 引入作为新的虚拟发点, $A' = \{(A \setminus [(A \cap E(D[S_i]) \cup (S_i, \bar{S}_i))] \cup \{(V_i, V_s) | \text{对弧 } (V_s, V_s) \in (S_i, \bar{S}_i)\})\}$, 即在 D 中把 $(S_i, \bar{S}_i)$ 中的弧(含发点 V_i)去掉, 在去掉后的连通分支里引入一个新发点 V_i , 将它连到所有 $(S_i, \bar{S}_i)$ 中弧关联的 $\bar{S}$ 中的点, 且认为这些弧的容量为 ∞ 。这个构造方法与收缩 S 中的点为一个点而得到的网络略有不同, 这样得到一个带新发点 V_i 至原收点 V_t 的网络 D' , 我们记 D' 为扩容网络。再利用 Ford-Fulkerson 算法, 在更新的扩容网络 D' 中求新的最大流 f_{i+1} 与最小割集 $R_{i+1} = (S_{i+1}, \bar{S}_{i+1})$, 再如同前面一样构造新扩容网络 D'_{i+1} , ..., 如此循环下去, 直到求出 D 中全部扩容网络最小割集, 或得到最小割集中含有形如 (V_i, V_t) 这样的弧集为止。图1是经过抽象后的 D 中含 n 个最小割集及构造 n 个虚拟发点的扩容网络全局示意图。

已改变为能保证每条弧上流的通行, 且流量达到指定 F 值。在此过程中由于采用后进先出堆栈数据结构, 有效解决了最小割集合、扩容网络集合等的存储问题。

4. 一个实例分析

有一初始网络 $D(0)$ (图2): 弧上数字表示容量, 采用算法1计算过程如下:

1) 在 $D(0)$ 中求出一个最大流 f_0 与最小割集 $(S_0, \bar{S}_0)$, $V(f_0) = 10$, $R(0) = \{(V_s, V_1), (V_s, V_2)\}$, 容量 $C(R(0)) = 10$ 。在 $D(0)$ 中去掉最小割集 $R(0)$ 中弧, 构造虚拟发点 V_{s1} , 组成扩容网络 $D(1)$ 。

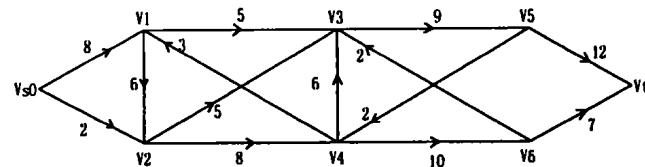


图2 原始网络 $D(0)$

2) 扩容网络 $D(1)$ (见图3): 最小割集 $R(1) = \{(V_3, V_5), (V_2, V_4)\}$, 容量为 $C(R(1)) = 17$, 最大流 f_1 值 $V(f_1) = 17$ 。在 $D(1)$ 中去掉最小割集 $R(1)$ 中弧, 构造虚拟发点 V_{s2} , 组成扩容网络 $D(2)$ 。

3) 扩容网络 $D(2)$ (见图4): 最小割集 $R(2) = \{(V_5, t), (V_6, t)\}$, 容量为 $c(R(2)) = 19$, 最大流 f_2 的值是 $V(f_2) = 19$ 。

最小割集 $R(2)$ 中已含有 (V_6, t) 这样到达收点的弧, 算法1终止。

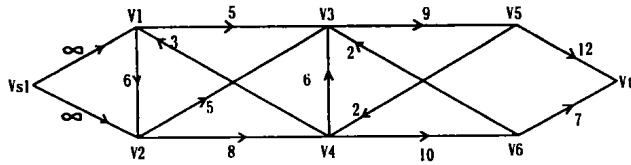


图3 扩容网络 D(1)

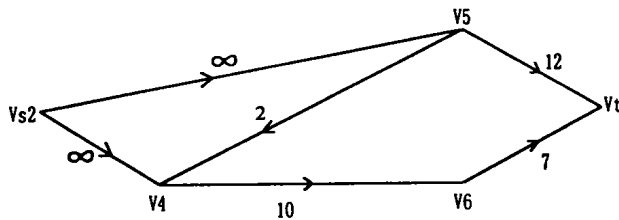


图4 扩容网络 D(2)

以下用算法2进行回带调整并扩容, 设我们希望扩大后的流量 $F=20$, 采用算法2的计算过程如下:

4) 首先选择在最末割集 $R(2)$ 中的弧 (V_6, t) 上扩容(任选弧), 则取 $\delta = F - C(R(2)) = F - 19 = 20 - 19 = 1$, 修改, 令 $C(V_6, t) = C(V_6, t) + \delta = 7 + \delta = 8$ 后, 采用 Ford-Fulkerson 算法求出 $D(2)$ 中流量分布如图5(括号内数字表示流量):

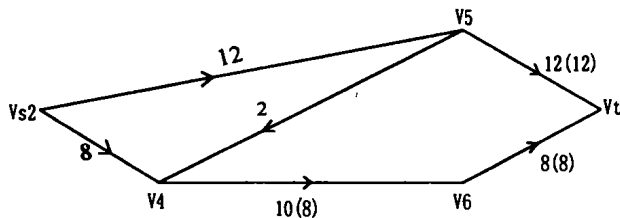


图5 扩容网络 D(2)

5) 将扩容网络 $D(2)$ 的流量分布代入扩容网络 $D(1)$, 调整 $R(1)$ 割集中饱和弧的容量。点 $V_3: g=12, \delta = g - c(V_3, V_5) = 12 - 9 = 3$, 修改 (V_3, V_5) 的容量为 $C'(V_3, V_5) = 12$, 点 $V_4: g=8, \delta = g - C(V_2, V_4) = 8 - 8 = 0$, 得如下流量分布(见图6)。由于在 $D(2)$ 网络中, 各弧容量 δ 值已经改变, 有可能产生新的容量小于给定值的最小割集, 所以须再调用算法1, 又求出 $D(2)$ 网络最小割集 $(s, \bar{s}) = \{(V_1, V_3), (V_2, V_3), (V_2, V_4)\}$, $C(s, \bar{s}) = 18 < F$ 。

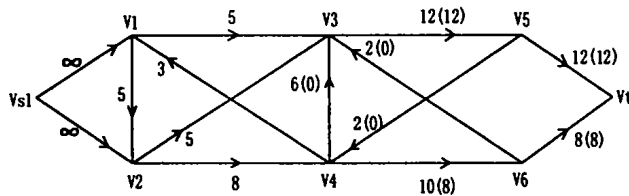


图6 扩容网络 D(1)

6) 此时做算法1的步骤, 去掉瓶颈弧构造扩容网络如下(见图7), 调用 Ford-Fulkerson 算法求出最大流 f , 得出流 f 在各弧上的分布, 如图7的括号内所标示。由于本网络中再无其它最小割集, 因此可进行计算调整量和扩容工作。

计算: 点 $V_3: g=12$, 因而 $\delta = g - c(V_1, V_3) - c(V_2, V_3) = 2$, 点 $V_4: g=8$, 因而 $g - c(V_2, V_4) = \delta = 8 - 8 = 0$, 故修改图6中

各弧容量(其中修改了 $c(v_1, v_3)$)成为图8所示。

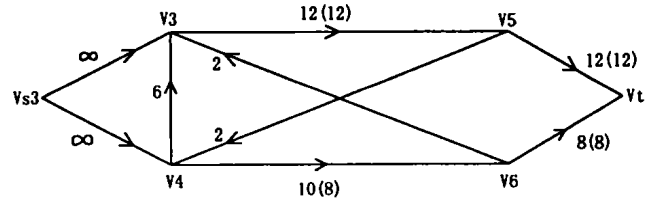


图7 扩容网络 D(2)

7) 求出其上最大流(括号内表示)。计算点

$$V_1: g = 7; \delta = g - C(S_1, V_1) = 7 - 8(g - C)(S, V_1))$$

$$= -1 < 0;$$

$$V_2: g = 13; \delta = g - C(S_1, V_2) = 13 - 2 = 11$$

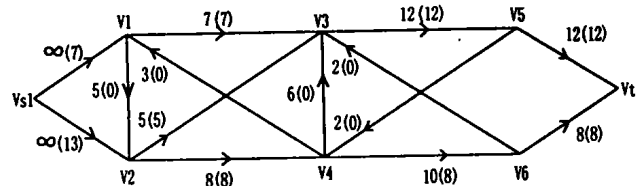


图8 扩容网络 D(1)

8) 修改初始网络如图9所示: 括号内表示一个最大流, 流量 $= 20$, 星号表示该弧容量是修改过的新容量:

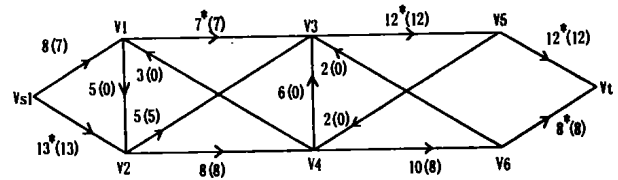


图9 改变流量后的原网络 D(0)

结论 经过分析, 本文提出的基于最小割集扩容算法的复杂性至多是 $O(m^3n)$ 阶的^[4,9]。算法从理论上有效地解决了网络瓶颈问题, 它对规划设计一个大型网络或管理控制一个已运行网络、平衡流量等技术均有重要实际意义。进一步还须研究: 当各条弧的扩容费用不一致时, 如何扩容、如何使需要扩容的弧数或扩容费用达到最小可能值等课题。

参考文献

- 1 Ahuja R K, Magnanti T L, Orlin J B. Network Flows: Theory, Algorithms and Applications. Englewood Cliffs, N J: Prentice-Hall, 1993
- 2 Balakrishnam V K. Network Optimization. London: Chapman & Hall, 1995
- 3 刘舒燕. 一种改进的求网络最小截集的算法. 武汉理工大学学报, 2001, 25(2): 121~123
- 4 刘玉华, 余胜生, 毛经中, 许凯华. 网络最优化中的一个扩容算法. 科学通报, 2002, 47(24): 1858~1860
- 5 谢政, 李建平. 网络算法与复杂性理论. 长沙: 国防科技大学出版社, 1995
- 6 Ford L R, Fulkerson D R. Maximum flow through a network. Canadian Journal of Math, 1956, 8(5): 399~404
- 7 Cheriyan J, Hagerup T. A Randomized Maximum-Flow Algorithm. SIAM Journal on Computing, 1995, 24: 203~226
- 8 Goldberg A V, Rao S. Flows in Undirected Unit Capacity Networks. SIAM Journal on Discrete Mathematics, 1999, 12: 1~5
- 9 张宪超, 陈国良. 小容量网络上的最大流算法. 计算机研究与发展, 2001, 38(2): 194~198