

多信道图像盲复原算法

肖 宿 韩国强 沃 焱

(华南理工大学计算机科学与工程学院 广州 510006)

摘要 为充分利用观测图像中的信息及信息之间的互补性,提高图像复原的质量,提出了贝叶斯框架下的多信道图像盲复原算法。首先,建立原始图像、点扩散函数和观测图像的先验模型,由先验模型得到原始图像、点扩散函数和观测图像的先验概率;然后用伽马分布描述未知的模型参数;最后基于最大后验概率的推导,利用实证分析法估计原始图像和点扩散函数的最优值。实验结果表明,相比单信道的图像盲复原算法,多信道的图像盲复原算法可以得到更好的复原结果。同时,与某些经典的多信道图像盲复原算法相比,提出的算法在复原效果方面具有一定的优势。

关键词 图像复原,贝叶斯框架,先验模型,调和模型,信道互质

中图法分类号 TP751.1 **文献标识码** A

Multichannel Blind Image Restoration

XIAO Su HAN Guo-qiang WO Yan

(School of Computer Science and Engineering, South China University of Technology, Guangzhou 510006, China)

Abstract In order to well utilize the information in the observed images and the complementarities between the information to improve the results of the image restoration, this paper proposed a blind restoration algorithm for multichannel images. Firstly, the prior models of the original image, point spread functions and the observed images were reconstructed, from which the prior distributions of them were obtained; secondly, the Gamma distribution was used to describe the unknown model parameters; finally, based on the inference of the max posterior probability, the optimal original image and the point spread functions were estimated using the evidence analysis method. Compared with the single channel algorithms, the experiments show that the multichannel blind image restoration can obtain better results. Meanwhile, the proposed algorithm shows competitive performance on restored results compared with some state-of-the-art algorithms.

Keywords Image restoration, Bayesian framework, Prior models, Harmonic model, Channel co-primeness

以信道数量来划分,图像盲复原算法包括单信道算法^[1-5]和多信道算法^[6-10]。多信道是指同一场景的观测图像有多幅,并且它们之间存在着差异,可看作是原始图像受到不同传输信道的退化因素作用生成的。所谓“盲”则指信道的点扩散函数是未知的,在图像复原过程中需要对其进行估计。与多信道图像盲复原算法相比,传统的单信道算法由于需要处理的信息量较少,通常在速度上具有优势。但是,多信道图像盲复原算法可利用更多有用的信息估计原始图像和点扩散函数。因此,多信道图像盲复原算法的结果通常优于单信道图像盲复原算法。

基于以上的讨论,本文提出了一种贝叶斯框架下的多信道图像盲复原算法。引入调和模型及信道互质模型^[6]作为原始图像和点扩散函数的先验模型;并用伽马分布描述模型参数的统计特征;实证分析法(evidence analysis)被用于估计原始图像和点扩散函数。贝叶斯框架的优点是:可提供概率预测,自动引入参数并进行估计,还可估计复原过程中的不确定因素^[11];调和模型和信道互质模型良好的数学及物理特性,有助于提高算法的效率及图像复原的质量;伽马分布的引入则保证了参数的选择是全局最优的。

1 图像及模型参数的先验分布

观测图像是由原始图像退化而成的,通常考虑的退化因素主要有信道畸变和信道噪声,因此标准的退化模型可表示为:

$$y_i = H_i x + n_i \tag{1}$$

对于多信道图像复原,该模型又可表示为:

$$y = Hu + n \tag{2}$$

式中, $y_i, x, n_i \in \mathbb{R}^{N \times 1}$ 分别由观测图像、原始图像和噪声的列向量按顺序堆叠而成; $i = 1, 2, \dots, L, L$ 表示观测图像或信道数量; N 表示图像的像素个数; $y = [y_1^T, \dots, y_L^T]^T, n = [n_1^T, \dots, n_L^T]^T, u = [x^T, \dots, x^T]^T$, 且 $u \in \mathbb{R}^{LN \times 1}$; 线性算子 $H = \text{diag}(H_1, \dots, H_i, \dots, H_L)$ 表示信道畸变; $H_i \in \mathbb{R}^{N \times N}$ 由点扩散函数通过循环平移形成,若信道 i 的点扩散函数是 $h_i = [h_{i,1}, h_{i,2}, \dots, h_{i,r}]^T$, 则 H_i 可表示为:

$$H_i = \begin{bmatrix} h_{i,1} & h_{i,2} & \dots & h_{i,r} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & h_{i,1} & h_{i,2} & \dots & h_{i,r} & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots \\ h_{i,2} & \dots & h_{i,r} & 0 & \dots & 0 & h_{i,1} \end{bmatrix}_{N \times N}$$

图像复原可看作图像退化的逆过程,即由观测图像及图

到稿日期:2010-01-08 返修日期:2010-03-27 本文受国家自然科学基金(60573019),国家支撑计划项目(X2JSB1080010)资助。

肖 宿(1982-),男,博士生,主要研究方向为图像复原等,E-mail:SmartWindows@qq.com;韩国强(1962-),男,博士,教授,博士生导师,主要研究方向为多媒体技术及应用等;沃 焱(1975-),女,博士,副教授,硕士生导师,主要研究方向为多媒体技术及应用等。

像系统的先验知识估计原始图像的过程。在贝叶斯框架下,该过程可表示为:

$$(\hat{x}, \hat{h}, \hat{\theta}) = \underset{x, h, \theta}{\operatorname{argmax}} p(x, h, \theta | y) \quad (3)$$

式中, $h = [h_1^T, \dots, h_i^T, \dots, h_L^T]^T$ 。由条件概率可知:

$$p(x, h, \theta | y) = \frac{p(x, h, \theta, y)}{p(y)} \propto p(x, h, \theta, y)$$

式中的联合概率 $p(x, h, \theta, y)$ 可分解为^[12]:

$$p(x, h, \theta, y) = p(\alpha) p(x | \alpha) p(\beta) p(h | \beta) p(\gamma) p(y | x, h, \gamma) \quad (4)$$

式中, $\theta = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ 且 $p(\theta) = p(\alpha) p(\beta) p(\gamma)$; $p(x | \alpha)$ 和 $p(h | \beta)$ 分别表示原始图像和点扩散函数的先验分布,反映了原始图像和点扩散函数的统计特征; $p(y | x, h, \gamma)$ 表示观测图像的先验分布,反映了观测图像与原始图像之间的关系; $p(\alpha)$, $p(\beta)$ 和 $p(\gamma)$ 分别表示模型参数 α, β 和 γ 的先验分布。

1.1 模型参数的先验分布

贝叶斯框架下,参数的后验分布是推断的基础,后验分布依赖于先验分布的选择。Raiffa 等人提出先验分布应取共轭分布(conjugate distributions)比较合适,即忽略某些常量系数,先验分布与推导出的后验分布属于同一种分布类型^[13]。因此,使用伽马分布作为参数 α, β 和 γ 的先验分布:

$$p(\omega) \propto \omega^{m_\omega - 1} \exp(-n_\omega \omega) \quad (5)$$

式中, $\omega \in \{\alpha, \beta, \gamma\}$ 表示未知参数 α, β, γ ; $m_\omega > 0$, $n_\omega > 0$ 属于常数,分别表示形状超参数(hyperparameter)和尺度超参数。

1.2 原始图像的先验分布

贝叶斯框架下,图像复原问题主要依赖先验模型的选择。Sobolev 函数空间下的调和模型具有良好的数学特性和较强的边缘保持能力^[14],被广泛应用于图像复原问题的求解。基于调和模型,原始图像的先验模型可表示为:

$$Q_1(x) = \|\Delta_h x\|_2^2 + \|\Delta_v x\|_2^2 \quad (6)$$

式中, $\Delta_h, \Delta_v \in \mathbb{R}^{N \times N}$ 分别表示一阶水平和垂直差分算子。若 x 表示原始图像像素的灰度值,则 $\Delta_h x$ 表示 x 减去其左边最邻近像素的灰度值; $\Delta_v x$ 表示 x 减去其上方最邻近像素的灰度值。根据式(6)所示的先验模型,原始图像的先验分布可表示为:

$$p(x | \alpha) \propto \alpha \exp\left[-\frac{\alpha}{2} (\|\Delta_h x\|_2^2 + \|\Delta_v x\|_2^2)\right] \quad (7)$$

1.3 点扩散函数的先验分布

点扩散函数的支撑区域通常是比较平滑的,调和模型同样适用于描述其先验特征。另外,多信道图像复原常遵循信道互质假设,即在不考虑噪声的情况下^[6]:

$$y_s * h_t - y_t * h_s = 0 \quad (8)$$

式中,“*”表示二维卷积; $s, t = 1, \dots, L$; 式(8)可写成矩阵-向量乘积的形式: $Wh = 0$ 。基于信道间的互质假设及调和模型,点扩散函数的先验模型可表示为^[15]:

$$Q_2(h) = \|\Delta_h h\|_2^2 + \|\Delta_v h\|_2^2 + \|Wh\|_2^2 \quad (9)$$

式中, $\Delta_h, \Delta_v \in \mathbb{R}^{LN \times LN}$ 表示一阶水平和垂直差分算子。若 $h \in \mathbb{R}^{LN}$, 则 $\Delta_h h$ 表示 h 减去其左边最邻近位置的点扩散函数值, $\Delta_v h$ 表示 h 减去其上方最邻近位置的点扩散函数值; $i = 1, 2, \dots, L-1, W = [W_1^T, \dots, W_L^T]^T$; W_i 可表示为如下的分块矩阵:

$$W_i = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & Y_{i+1} & -Y_i & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & Y_L & 0 & \dots & -Y_i \end{bmatrix}$$

(i-1列) (L-i+1列)

式中, $Y_i \in \mathbb{R}^{N \times N}$ 由 y_i 通过循环平移形成。根据式(9)所示的先验模型,点扩散函数的先验分布可表示为:

$$p(h | \beta) \propto \beta \exp\left[-\frac{\beta}{2} (\|\Delta_h h\|_2^2 + \|\Delta_v h\|_2^2 + \|Wh\|_2^2)\right] \quad (10)$$

1.4 观测图像的先验分布

观测图像的先验模型可表示为:

$$F(y) = \|y - Hu\|_2^2$$

或者

$$F(y) = \|y - Uh\|_2^2 \quad (11)$$

式中, $U \in \mathbb{R}^{LN \times LN}$ 由 u 通过循环平移形成。根据式(11)所示的先验模型,观测图像的先验分布可表示为:

$$p(y | x, h, \gamma) \propto \gamma \exp\left[-\frac{\gamma}{2} \|y - Hu\|_2^2\right]$$

或者

$$p(y | x, h, \gamma) \propto \gamma \exp\left[-\frac{\gamma}{2} \|y - Uh\|_2^2\right] \quad (12)$$

2 多信道图像盲复原算法的描述

如式(3)所示,实证分析法^[11]是贝叶斯框架下比较常用的图像复原方法,并且由式(3)可得:

$$\hat{\xi} = \underset{\xi}{\operatorname{argmax}} \ln p(x, h, \alpha, \beta, \gamma, y) \quad (13)$$

式中, $\xi \in \{x, h, \alpha, \beta, \gamma\}$ 表示原始图像、点扩散函数或模型参数。

基于式(4)和式(13),多信道图像盲复原算法可描述如下:

给定点扩散函数和模型参数的初始值: $h^{(1)}, \alpha^{(1)}, \beta^{(1)}$ 和 $\gamma^{(1)}$ $k = 1, 2, \dots$, 直到满足迭代停止条件:

步骤 1

$$x^{(k)} = \underset{x}{\operatorname{argmax}} [\ln p(x | \alpha^{(k)}) + \ln p(y | x, h^{(k)}, \gamma^{(k)})]$$

$$\Rightarrow x^{(k)} = [\alpha^{(k)} (\Delta_h^T \Delta_h + \Delta_v^T \Delta_v) + \gamma^{(k)} \sum_{i=1}^L (H_i^{(k)})^T H_i^{(k)}]^{-1} \times \gamma^{(k)} \sum_{i=1}^L (H_i^{(k)})^T y_i \quad (14)$$

步骤 2

$$h^{(k+1)} = \underset{h}{\operatorname{argmax}} [\ln p(h | \beta^{(k)}) + \ln p(y | x^{(k)}, h, \gamma^{(k)})]$$

$$\Rightarrow h^{(k+1)} = [\beta^{(k)} (\Delta_h^T \Delta_h + \Delta_v^T \Delta_v + W^T W) + \gamma^{(k)} (U^{(k)})^T U^{(k)}]^{-1} \times \gamma^{(k)} (U^{(k)})^T y \quad (15)$$

步骤 3

$$\alpha^{(k+1)} = \underset{\alpha}{\operatorname{argmax}} [\ln p(\alpha) + \ln p(x^{(k)} | \alpha)]$$

$$\Rightarrow \alpha^{(k+1)} = \frac{2m_\alpha}{\|\Delta_h x^{(k)}\|_2^2 + \|\Delta_v x^{(k)}\|_2^2 + 2n_\alpha} \quad (16)$$

$$\beta^{(k+1)} = \underset{\beta}{\operatorname{argmax}} [\ln p(\beta) + \ln p(h^{(k+1)} | \beta)]$$

$$\Rightarrow \beta^{(k+1)} =$$

$$\frac{2m_\beta}{\|\Delta_h h^{(k+1)}\|_2^2 + \|\Delta_v h^{(k+1)}\|_2^2 + \|Wh^{(k+1)}\|_2^2 + 2n_\beta} \quad (17)$$

$$\gamma^{(k+1)} = \underset{\gamma}{\operatorname{argmax}} [\ln p(\gamma) + \ln p(y | x^{(k)}, h^{(k+1)}, \gamma)]$$

$$\Rightarrow \gamma^{(k+1)} = \frac{2m_\gamma}{\|y - H^{(k+1)} u^{(k)}\|_2^2 + 2n_\gamma} \quad (18)$$

步骤 4 判断是否满足迭代停止条件

$$\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|_2^2 / \|x^{(k-1)}\|_2^2 \leq 10^{-4}$$

若满足,停止迭代,输出 $x^{(k)}$; 否则 $k = k + 1$, 返回步骤 1 继续迭代。

3 实验及分析

实验环境为:操作系统 Window XP SP2、仿真软件 Matlab R2009b、CPU T2450 Duo、内存 2GB DDR2。实验以图 1(a)所示的 Barbara 和 Lena 为原始图像,将图 1(b)所示的不同类型的点扩散函数作用于原始图像,并加入零均值的高斯噪声,得到的观测图像如图 2 所示。其中,模糊图像信噪比 BSNR(Blurred-image Signal to Noise Ratio)可由式(19)计算。



(a)原始图像 Barbara 和 Lena,分辨率 256×256



(b)实际的点扩散函数,从左至右分别是:5×5的均值滤波器、运动模糊算子(长度为5,角度为10)、半径为2的圆形均值滤波器

图1 原始图像及点扩散函数



(a) Barbara,BSNR 均为 40dB



(b) Lena,BSNR 均为 40dB

图2 观测图像

$$BSNR = 10 \log_{10} \left(\frac{\|x - \text{mean}(x)\|_2^2}{N\sigma^2} \right) \quad (19)$$

式中, $\text{mean}(x)$ 表示原始图像的像素灰度均值; σ^2 表示噪声方差。

参与实验的算法包括本文提出的算法(Proposed)、Sroubek等人提出的算法^[8]和 Molina等人提出的算法^[12]。3种算法对图2所示的观测图像的复原结果如表1和表2所列,信噪比改进 ISNR(Improvement on SNR)可由式(20)计算。本文提出的算法对点扩散函数的估计结果如图3所示。

$$ISNR_{SC} = 10 \log_{10} \left(\frac{\|x - \hat{y}_i\|_2^2}{\|x - \hat{x}\|_2^2} \right) \quad (20)$$

$$ISNR_{MC} = 10 \log_{10} \left(\frac{\|x - \bar{y}_i\|_2^2}{\|x - \hat{x}\|_2^2} \right)$$

式中, $ISNR_{SC}$ 和 $ISNR_{MC}$ 分别用于计算单信道算法和多信道算法的复原结果; \hat{x} 表示复原值; \bar{y}_i 表示各信道观测图像均值。

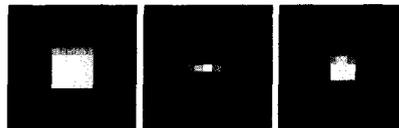
表1 观测图像 Barbara 的复原结果

算法	迭代次数	时间/s	复原结果(ISNR)
Proposed	20	85.12	6.65 dB
Sroubek	20	58.35	5.89 dB

	50	2.08	3.31 dB
Molina	50	2.21	3.15 dB
	50	1.83	3.87 dB

表2 观测图像 Lena 的复原结果

算法	迭代次数	时间/s	复原结果(ISNR)
Proposed	20	88.10	6.09 dB
Sroubek	20	54.16	5.25 dB
	50	3.37	3.17 dB
Molina	50	3.20	3.59 dB
	50	3.29	2.35 dB



(a)复原 Barbara 图像时,点扩散函数的估计结果



(b)复原 Lena 图像时,点扩散函数的估计结果

图3 点扩散函数的估计结果

对于图像盲复原算法,点扩散函数的估计将直接影响图像复原的效果,尤其是点扩散函数支撑域大小的估计最为重要。由点扩散函数的估计结果及其与实际值的比较可看出,本文提出的算法实现了对点扩散函数的准确估计。若以 $\|h - \hat{h}\|_2 / \|h\|_2$ 计算点扩散函数的估计误差,其结果为 6.0×10^{-2} 。

Molina等人提出的是单信道图像盲复原算法,因此表1和表2给出了该算法对单幅观测图像复原的结果。因为单信道图像复原算法处理的信息量相对较少,而且 Molina算法整个计算过程在 Fourier 域中进行^[12],所以该算法的时间性能相对较好。但是,本文提出的算法和 Sroubek算法的复原结果明显优于 Molina算法。这表明相比单信道图像复原算法,多信道图像复原算法通常更具优势。与 Sroubek算法相比,本算法的优势在于复原效果,但在速度方面处于一定的劣势。总体上,本文提出的算法获得了比较理想的复原结果。

结束语 多信道图像盲复原算法虽然可以融合更多的图像信息,提高点扩散函数估计的准确度,改善图像复原的质量,但是,图像信息的有效挖掘、利用和融合以及加快图像复原的速度,仍是目前多信道图像盲复原算法需重点考虑的问题。本文提出的算法,通过贝叶斯框架和相关先验知识及模型的引入,一定程度上提高了图像盲复原算法的效率。从实验对比也可看出,该算法在复原结果上要优于某些经典的算法。当然,本算法仍有进一步改进和完善的空间,未来研究的重点将是观测图像之间存在相对位移情况下的图像盲复原问题。

参考文献

- [1] Shan Q, Jia J Y, Agarwala A. High-quality motion deblurring from a single image [J]. ACM Transactions on Graphics, 2008, 27(3), 73:1-10
- [2] Money J H, Kang S H. Total variation minimizing blind deconvolution with shock filter reference [J]. Image and Vision Computing, 2008, 26(2):302-314
- [3] Chantas G, Galatsanos N, Likas A, et al. Variational Bayesian image restoration based on a product of t-distributions image prior [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2008, 17(10):1795-1805

[4] Kayabol K, Kuruoglu E E, Sankur B. Bayesian separation of images modeled with MRFs using MCMC [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2009, 18(5): 982-994

[5] Babacan S D, Molina R, Katsaggelos A K. Variational Bayesian blind deconvolution using a total variation prior [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2009, 18(1): 12-26

[6] Giannakis G, Heath R. Blind identification of multichannel FIR blurs and perfect image restoration [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2000, 9(11): 1877-1896

[7] Sroubek F, Flusser J. Multichannel blind iterative image restoration [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2003, 12(9): 1094-1106

[8] Sroubek F, Flusser J. Multichannel blind deconvolution of spatially misaligned images [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2005, 14(7): 874-883

[9] Yuan L, Sun J, Quan L, et al. Image deblurring with blurred/ noisy image pairs [J]. ACM Transactions on Graphics, 2007, 26(3): 1-10

[10] Kopriva I. Approach to blind image deconvolution by multiscale

subband decomposition and independent component analysis [J]. Journal of the Optical Society of America A, 2007, 24(4): 973-983

[11] Babacan D, Molina R, Katsaggelos A. Bayesian compressive sensing using Laplace priors [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2010, 19(1): 53-63

[12] Molina R, Mateos J, Katsaggelos A K. Blind deconvolution using a variational approach to parameter, image, and blur estimation [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2006, 15(12): 3715-3727

[13] Raiffa H, Schlaifer R. Applied Statistical Decision Theory [M]. Boston, MA: MIT Press, 1961

[14] Chan T F, Shen J H. Image Processing and Analysis: Variational, PDE, Wavelet, and Stochastic Methods [M]. Philadelphia, PA: SIAM, 2005

[15] Sroubek F, Cristobal G, Flusser J. A unified approach to super-resolution and multichannel blind deconvolution [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2007, 16(9): 2322-2332

(上接第 202 页)

加速度传感器, 测量振动的加速度值; 在试验台上安装一位移传感器, 测量振动的位移。将位移传感器测量的动位移和加速度频域-时域混合积分法计算的动位移进行对比。

3.1 误差评价指标

为了评估结果波形的差异, 引入平均峰值误差、平均最大相对误差及平方和误差指标。

平均峰值误差是积分位移时程 $y(t)$ 的正、负峰值分别相对于实测位移时程 $s(t)$ 正、负峰值的误差的平均值。

$$E_{rp} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{|\max[y(t)] - \max[s(t)]|}{\max[s(t)]} + \frac{|\min[y(t)] - \min[s(t)]|}{\min[s(t)]} \right\} \quad (13)$$

平均最大相对误差是相对误差时程 $[y(t) - s(t)]$ 的正、负峰值分别相对于 $s(t)$ 正、负峰值的误差的平均值。

$$E_{rn} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{|\max[y(t) - s(t)]|}{\max[s(t)]} + \frac{|\min[y(t) - s(t)]|}{\min[s(t)]} \right\} \quad (14)$$

对比评价两个波形, 不仅应注意其各自峰值的差别, 而且应考察其总体效应, 即波形代表的能量差别。可引入平方和误差来描述积分与实测动位移的能量误差^[3]。

$$E_{rsq} = \frac{\sum_{i=1}^N [y(i)]^2 - \sum_{i=1}^N [s(i)]^2}{\sum_{i=1}^N [s(i)]^2} \quad (15)$$

式中, $y(i), s(i)$ 为 $y(t), s(t)$ 时程的位移采样值, N 为采样点数。

3.2 实测数据计算结果对比

试验中实际测量的加速度信号见图 1, 通过加速度频域-时域混合积分法计算的动位移和位移传感器测量的动位移的结果见图 2。

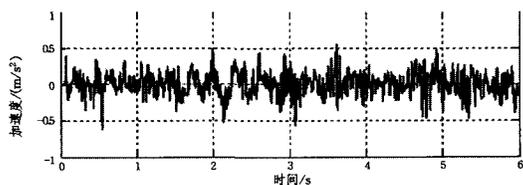


图 1 实测加速度信号

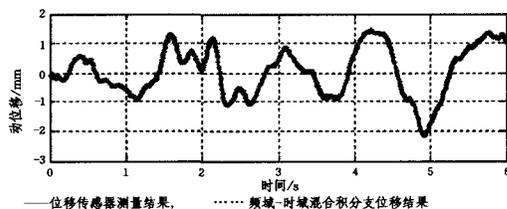


图 2 混合积分结果与位移传感器结果对比

通过提出的指标对加速度频域-时域混合积分法计算动位移的误差进行了评价, 具体结果见表 1。

表 1 加速度频域-时域混合积分的位移误差

误差名称	平均峰值误差	平均最大相对误差	平方和误差
数值(%)	3.52	1.15	2.54

从结果可以看出, 加速度频域-时域混合积分法计算动位移有很高的精度, 完全可以满足实际工程的需要。

结束语 通过对加速度信号两次积分误差的研究, 提出了通过加速度信号精确计算动位移的频域-时域混合积分法, 得到了如下结论:

(1) 时域积分法的误差主要来源于直流干扰产生的累积误差。

(2) 频域积分法的误差主要取决于低频截止频率, 具有低频截止频率敏感性。

(3) 时域-频域混合积分法克服了单独两次时域积分和两次频域积分的弊端。试验结果表明, 频域-时域混合积分法是一种有效的由加速度信号精确测量动位移的方法。

参考文献

[1] 王济, 胡晓. MA TLAB 在振动信号处理中的应用[M]. 北京: 中国水利水电出版社, 知识产权出版社, 2006: 104-107

[2] 余萍, 胡孝平. MA TLAB 在振动台试验数据处理中的应用[J]. 水利与建筑工程学报, 2008, 6(1): 121-122

[3] 蒋良淮, 姚令佩, 吴伟. 边坡振动台模型试验动位移的加速度时程积分探讨[J]. 防灾减灾工程学报技术, 2009(3)

[4] 李强, 王太勇, 胥永刚. 基于频域积分的振动参量转换修正算法[J]. 组合机床与自动化加工技术, 2005(9): 60-61, 65

[5] 李乃成, 邓建中. 数值计算方法[M]. 西安: 西安交通大学出版社, 2002