

Vague 集的模糊熵、相似度量和距离测度的关系

王 昌

(西北大学数学与科学史研究中心 西安 710127) (西北大学数学系 西安 710127)

摘 要 Vague 集理论在各个领域中的广泛应用引起越来越多学者的注意,而模糊熵、相似度量和距离测度是其中的 3 个关键技术。目前已提出多种关于 Vague 集的模糊熵、相似度量和距离测度的计算方法,但这些研究都没有讨论这 3 个基本概念之间的联系。基于 Vague 集的模糊熵、相似度量和距离测度的公理化定义,给出了三者之间的相互诱导关系,建立了模糊熵、相似度量和距离测度之间的联系。

关键词 Vague 集,模糊熵,相似度量,距离测度

中图法分类号 O159,TP18 **文献标识码** A

Relations between Fuzzy Entropy, Similarity Measure and Distance Measure of Vague Sets

WANG Chang

(Center for the History of Mathematics and Science, Northwest University, Xi'an 710127, China)

(Department of Mathematics, Northwest University, Xi'an 710127, China)

Abstract Vague sets theory has gained great attention from more and more researchers for its applications in various fields, fuzzy entropy, similarity measure and distance measure are the most important technologies in Vague sets. Nowadays, several formula about fuzzy entropy, similarity measure and distance measure of Vague sets have been proposed, but all of these researches did not discuss the relations between these measures. This paper based on the axiom definitions of fuzzy entropy, similarity measure and distance measure of Vague sets, gave mutual induced relations between these measures. Complete relations between fuzzy entropy, similarity measure and distance measure were established.

Keywords Vague sets, Fuzzy entropy, Similarity measure, Distance measure

1 引言

Cantor 创立的集合论是无法处理具有模糊性的不确定性信息和数据的,于是,Zadeh 在 1965 年提出了 Fuzzy 集理论来处理这类问题^[1]。随后几十年,Fuzzy 集理论不断地发展和完善,并在许多领域里得到了成功应用^[2]。但 Fuzzy 集理论的隶属函数值是一个单一的值,它不能同时表达支持和反对的证据,为此,Gau 和 Buehrer 又于 1993 年提出 Vague 集理论^[3],Vague 集等同于 A tanassov K. 提出的直觉模糊集^[4-6],它是 Zadeh 的 Fuzzy 集理论的一种推广形式^[7]。在一个 Vague 集 V 中,用一个真隶属函数 $t_v(x)$ 和一个假隶属函数 $f_v(x)$ 来描述其隶属度的界,这使得 Vague 集理论在处理不确定性信息时比传统的 Fuzzy 集有更强的表示能力,且更具灵活性。

模糊熵、相似度量和距离测度是 Vague 集理论中 3 个非常基本的概念。而就笔者所知,目前对于这三者的研究主要集中在从不同角度构造符合它们各自公理化定义的各种公式方面^[8-13],以及相似度量和距离测度在模式识别、不确定性推理等领域中的应用方面^[14-17]。可见这些研究都没能将 Vague 集理论中这 3 个基本概念联系起来,鉴于此,本文依据模糊熵、相似度量和距离测度的公理化定义以及以往对它们各自

的研究,给出了三者之间的相互诱导关系,从而建立了模糊熵、相似度量和距离测度之间的和谐联系。

2 预备知识

定义 1^[3] 令 X 是一个点(对象)的空间,其中任意的一个元素用 x 表示, X 上的一个 Vague 集 A 用一个真隶属函数 $t_A(x)$ 和一个假隶属函数 $f_A(x)$ 表示, $t_A(x)$ 是从支持 x 的证据所导出的 x 的隶属度下界, $f_A(x)$ 是从反对 x 的证据所导出的 x 的否定隶属度下界, $t_A(x)$ 和 $f_A(x)$ 将区间 $[0,1]$ 中的一个实数与 X 中的每一个点联系起来,即 $t_A: X \rightarrow [0,1]$; $f_A: X \rightarrow [0,1]$,其中 $t_A(x) + f_A(x) \leq 1$ 。

称 $[t_A(x), 1 - f_A(x)]$ 为 x 在 A 中的 Vague 值,记为 $A(x)$,论域 X 上 Vague 集全体用 $V(X)$ 表示。当 X 离散的时候, $A = \sum_{i=1}^n [t_A(x_i), 1 - f_A(x_i)] / x_i, x_i \in X$; 当 X 连续的时候, $A = \int_X [t_A(x), 1 - f_A(x)] / x, x \in X$ 。

定义 2^[18] 称 $S_A(x) = t_A(x) - f_A(x)$ 为 x 对 Vague 集 A 的核,它的数值表示支持和反对两方面力量的对比程度。

定义 3^[18] 称 $m_A(x) = 1 - t_A(x) - f_A(x)$ 为 x 对 Vague 集 A 的未知度,它的数值表示人们对事物认识的不确定度。

定义 4^[18] 一个 Vague 集 A 的补集 A^c 定义为

$$t_{A^c}(x) = f_A(x), 1 - f_{A^c}(x) = 1 - t_A(x)$$

定义 5^[18] 两个 Vague 集 A 和 B , $A \subseteq B$ 定义为对论域 X 上的任意一个元素 x 都有 $t_A(x) \leq t_B(x)$ 且 $f_A(x) \geq f_B(x)$; $A=B$ 定义为对论域 X 上的任意一个元素 x 都有 $t_A(x) = t_B(x)$ 且 $f_A(x) = f_B(x)$ 。

定义 6^[18] 设 X 是一个点(对象)的空间, A 和 B 是论域 X 上的两个 Vague 集, 则 Vague 值 $A(x) = [t_A(x), 1 - f_A(x)]$ 和 $B(x) = [t_B(x), 1 - f_B(x)]$ 的交集“ $\cap$ ”和并集“ $\cup$ ”可分别定义为

$$A(x) \cap B(x) = [t_A(x) \wedge t_B(x), (1 - f_A(x)) \wedge (1 - f_B(x))] = [t_A(x) \wedge t_B(x), 1 - f_A(x) \vee f_B(x)]$$

$$A(x) \cup B(x) = [t_A(x) \vee t_B(x), (1 - f_A(x)) \vee (1 - f_B(x))] = [t_A(x) \vee t_B(x), 1 - f_A(x) \wedge f_B(x)]$$

$\vee$ 表示取上确界, $\wedge$ 表示取下确界。

定理 1^[18] 设 A 和 B 是论域 X 上的两个 Vague 集, 则可以得到关于 Vague 集的如下性质:

- (1) $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$;
- (2) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C, A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$;
- (3) $A \cup A = A, A \cap A = A$;
- (4) $A \cup I = I, A \cap \phi = \phi$, 其中 $I = [1, 1], \phi = [0, 0]$;
- (5) $(A^c)^c = A$ 。

定义 7^[18] 称函数 $E: V(X) \rightarrow [0, 1]$ 为 Vague 集 A 的模糊熵, 如果其满足如下条件:

- (1) $E(A) = 0 \Leftrightarrow \forall x \in X, A = [0, 0]$ 或 $[1, 1]$;
- (2) $E(A) = 1 \Leftrightarrow \forall x \in X, t_A(x) = f_A(x)$;
- (3) $E(A) = E(A^c)$;
- (4) 若对 $\forall x \in X$, 当 $t_B(x) \leq f_B(x)$ 时, 有 $A \subseteq B$, 或当 $t_B(x) \geq f_B(x)$ 时, 有 $A \supseteq B$, 那么有 $E(A) \leq E(B)$ 。

定义 8^[11] 设 X 是点(对象)空间, $A, B \in V(X)$, 对任意 $x, y \in X$, 如果 Vague 值 $A(x)$ 和 $B(y)$ 间的函数 $M(A(x), B(y))$ 满足如下公理:

- (1) $M(A(x), B(y)) \in [0, 1]$;
- (2) $M(A(x), B(y)) = M(B(y), A(x))$;
- (3) $M(A(x), B(y)) = 0 \Leftrightarrow A(x) = [0, 0], B(y) = [1, 1]$ 或 $A(x) = [1, 1], B(y) = [0, 0]$;
- (4) $M(A(x), B(y)) = 1 \Leftrightarrow A(x) = B(y)$;
- (5) 对 $z \in X, C \in V(X)$, 若 $A \subseteq B \subseteq C$, 则: $M(A(x), C(z)) \leq \min\{M(A(x), B(y)), M(B(y), C(z))\}$, 则称函数 $M(A(x), B(y))$ 为 $V(X)$ 上 Vague 值 $A(x)$ 和 $B(y)$ 之间的相似度量。

由定义容易看出, 当 $M(A(x), B(y))$ 越大时, Vague 值 $A(x)$ 和 $B(y)$ 越接近, 特别地, 当 $M(A(x), B(y)) = 0$ 时, $A(x)$ 和 $B(y)$ 最不接近, 当 $M(A(x), B(y)) = 1$ 时, $A(x)$ 和 $B(y)$ 的值最接近。

定义 9^[11] 设 X 是点(对象)空间, $A, B \in V(X)$, 如果 Vague 集 A 和 B 间的函数 $M(A, B) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M(A(x_i), B(x_i))$ 满足如下公理:

- (1) $M(A, B) \in [0, 1]$;
- (2) $M(A, B) = M(B, A)$;

(3) $M(A, B) = 0 \Leftrightarrow A(x_i) = [0, 0], B(x_i) = [1, 1]$ 或 $A(x_i) = [1, 1], B(x_i) = [0, 0]$;

(4) $M(A, B) = 1 \Leftrightarrow A(x_i) = B(x_i)$;

(5) 对 $C \in V(X)$, 若 $A \subseteq B \subseteq C$, 则: $M(A, C) \leq \min\{M(A, B), M(B, C)\}$, 则称函数 $M(A, B)$ 为 $V(X)$ 上 Vague 集 A 和 B 之间的相似度量。

定义 10^[13] 设 X 是点(对象)空间, $A, B \in V(X)$, 对任意 $x, y \in X$, 如果 Vague 值 $A(x)$ 和 $B(y)$ 间的函数 $d(A(x), B(y))$ 满足如下公理:

- (1) $d(A(x), B(y)) \in [0, 1]$;
- (2) $d(A(x), B(y)) = d(B(y), A(x))$;
- (3) $d(A(x), B(y)) = 0 \Leftrightarrow A(x) = B(y)$;
- (4) $d(A(x), B(y)) = 1 \Leftrightarrow A(x) = [0, 0], B(y) = [1, 1]$ 或 $A(x) = [1, 1], B(y) = [0, 0]$;
- (5) 对 $z \in X, C \in V(X)$, 若 $A \subseteq B \subseteq C$, 则: $d(A(x), C(z)) \geq \max\{d(A(x), B(y)), d(B(y), C(z))\}$, 则称函数 $d(A(x), B(y))$ 为 $V(X)$ 上 Vague 值 $A(x)$ 和 $B(y)$ 之间的距离测度。

由定义容易看出, 当 $d(A(x), B(y))$ 越小时, Vague 值 $A(x)$ 和 $B(y)$ 越靠近, 特别地, 当 $d(A(x), B(y)) = 1$ 时, $A(x)$ 和 $B(y)$ 离的最远, 当 $d(A(x), B(y)) = 0$ 时, $A(x)$ 和 $B(y)$ 靠的最近。

定义 11^[13] 设 X 是点(对象)空间, $A, B \in V(X)$, 如果 Vague 集 A 和 B 间的函数 $d(A, B) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n d(A(x_i), B(x_i))$ 满足如下公理:

- (1) $d(A, B) \in [0, 1]$;
- (2) $d(A, B) = d(B, A)$;
- (3) $d(A, B) = 0 \Leftrightarrow A(x_i) = B(x_i)$;
- (4) $d(A, B) = 1 \Leftrightarrow A(x_i) = [0, 0], B(x_i) = [1, 1]$ 或 $A(x_i) = [1, 1], B(x_i) = [0, 0]$;
- (5) 对 $C \in V(X)$, 若 $A \subseteq B \subseteq C$, 则: $d(A, C) \geq \max\{d(A, B), d(B, C)\}$, 则称函数 $d(A, B)$ 为 $V(X)$ 上 Vague 集 A 和 B 之间的距离测度。

3 主要结果

3.1 由 Vague 集的相似度量导出模糊熵公式

定理 2 如果 $M(A, B)$ 是 $V(X)$ 上的相似度量, 定义 $E(A) = M(A \cap A^c, A \cup A^c)$, $\forall A \in V(X)$, 则 E 是 $V(X)$ 上的一个模糊熵。此时称 E 为由 M 诱导的 Vague 集的模糊熵。

证明: (1) $E(A) = 0 \Leftrightarrow M(A \cap A^c, A \cup A^c) = 0 \Leftrightarrow A \cap A^c = [0, 0], A \cup A^c = [1, 1] \Leftrightarrow \forall x \in X, A = [0, 0]$ 或 $A = [1, 1]$ 。

(2) $E(A) = 1 \Leftrightarrow M(A \cap A^c, A \cup A^c) = 1 \Leftrightarrow A \cap A^c = A \cup A^c \Leftrightarrow \forall x \in X, t_A(x) \vee f_A(x) = t_A(x) \wedge f_A(x) \Leftrightarrow \forall x \in X, t_A(x) = f_A(x)$ 。

(3) $E(A^c) = M(A^c \cap (A^c)^c, A^c \cup (A^c)^c) = M(A^c \cap A, A^c \cup A) = M(A \cap A^c, A \cup A^c) = E(A)$ 。

(4) 由 $A \subseteq B$, 可知有 $\forall x \in X, t_A(x) \leq t_B(x), 1 - f_A(x) \leq 1 - f_B(x)$, 又由于 $t_B(x) \leq f_B(x)$, 故有 $t_A(x) \leq t_B(x) \leq f_B(x) \leq f_A(x)$, 从而

$$\begin{aligned} A(x) \cap A^c(x) &= [t_A(x) \wedge f_A(x), 1 - f_A(x) \vee t_A(x)] \\ &= [t_A(x), 1 - f_A(x)] \\ A(x) \cup A^c(x) &= [t_A(x) \vee f_A(x), 1 - f_A(x) \wedge t_A(x)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= [f_A(x), 1-t_A(x)] \\
B(x) \cap B^c(x) &= [t_B(x) \wedge f_B(x), 1-f_B(x) \vee t_B(x)] \\
&= [t_B(x), 1-f_B(x)] \\
B(x) \cup B^c(x) &= [t_B(x) \vee f_B(x), 1-f_B(x) \wedge t_B(x)] \\
&= [f_B(x), 1-t_B(x)]
\end{aligned}$$

又 $|t_A(x) - f_A(x)| \geq |t_B(x) - f_B(x)|$ 。

上式表示 $A \cap A^c$ 和 $A \cup A^c$ 的相似程度不大于 $B \cap B^c$ 和 $B \cup B^c$ 的相似程度。即有 $M(A \cap A^c, A \cup A^c) \leq M(B \cap B^c, B \cup B^c)$ ，故 $E(A) \leq E(B)$ 。

同理可证当 $t_B(x) \geq f_B(x)$ ， $A \supseteq B$ 时的情况。

因此 E 是 $V(X)$ 上的一个模糊熵。

例 1 我们取文献[10]中的相似度量公式

$$M(A, B) = 1 - \frac{1}{4n} \sum_{i=1}^n \{|S_A(x_i) - S_B(x_i)| + |t_A(x_i) - t_B(x_i)| + |f_A(x_i) - f_B(x_i)|\}$$

于是得到的模糊熵公式为

$$\begin{aligned}
E(A) &= M(A \cap A^c, A \cup A^c) \\
&= 1 - \frac{1}{4n} \sum_{i=1}^n \{|S_A(x_i) - S_{A^c}(x_i)| + |t_A(x_i) - t_{A^c}(x_i)| + |f_A(x_i) - f_{A^c}(x_i)|\} \\
&= 1 - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |t_A(x_i) - f_A(x_i)|
\end{aligned}$$

同样地，我们可以得到以下几个定理：

定理 3 如果 M 是 $V(X)$ 上的相似度量，定义 $E(A) = M(A, A^c)$ ， $\forall A \in V(X)$ ，则 E 是 $V(X)$ 上的一个模糊熵。

定理 4 如果 M 是 $V(X)$ 上的相似度量，定义 $E(A) = \frac{2d(A \cap A^c, A \cup A^c)}{1+d(A \cap A^c, A \cup A^c)}$ ， $\forall A \in V(X)$ ，则 E 是 $V(X)$ 上的一个模糊熵。

定理 3 和定理 4 的证明与定理 2 类似，这里不再详述。

3.2 由 Vague 集的模糊熵导出相似度量公式

定理 5 如果 E 是 $V(X)$ 上的模糊熵， $\forall A, B \in V(X)$ ，定义 $M(A, B) = 1 - E(\frac{A \cup B}{2}) + E(\frac{A \cap B}{2})$ ，则 $M(A, B)$ 是 $V(X)$ 上的一个相似度量。此时称 M 为由 E 诱导的 Vague 集的相似度量。

证明：(1) 由于 $E(\frac{A \cup B}{2}), E(\frac{A \cap B}{2}) \in [0, 1]$ ，故有 $E(\frac{A \cup B}{2}) - E(\frac{A \cap B}{2}) \in [-1, 1]$ 。

$$\begin{aligned}
&\text{又 } E(\frac{A \cup B}{2}) - E(\frac{A \cap B}{2}) \\
&= E([\frac{t_A \vee t_B}{2}, \frac{(1-f_A) \vee (1-f_B)}{2}]) - E([\frac{t_A \wedge t_B}{2}, \frac{(1-f_A) \wedge (1-f_B)}{2}]) \\
&= E([\frac{t_A \vee t_B}{2}, 1 - (\frac{1}{2} + \frac{f_A \wedge f_B}{2})]) - E([\frac{t_A \wedge t_B}{2}, 1 - (\frac{1}{2} + \frac{f_A \vee f_B}{2})])
\end{aligned}$$

由于 $\forall x \in X$ ，有 $\frac{t_A(x) \wedge t_B(x)}{2} \leq \frac{t_A(x) \vee t_B(x)}{2} \leq \frac{1}{2} + \frac{f_A(x) \wedge f_B(x)}{2} \leq \frac{1}{2} + \frac{f_A(x) \vee f_B(x)}{2}$ ， $E([\frac{t_A \vee t_B}{2}, 1 - (\frac{1}{2} + \frac{f_A \wedge f_B}{2})]) \geq E([\frac{t_A \wedge t_B}{2}, 1 - (\frac{1}{2} + \frac{f_A \vee f_B}{2})])$ ，因此 $E(\frac{A \cup B}{2}) - E(\frac{A \cap B}{2}) \in [0, 1]$ ，从而 $M(A, B) = 1 - E(\frac{A \cup B}{2}) +$

$$E(\frac{A \cap B}{2}) \in [0, 1]。$$

(2) 显然成立。

$$(3) M(A, B) = 0 \Leftrightarrow E(\frac{A \cup B}{2}) - E(\frac{A \cap B}{2}) = 1$$

$$\Leftrightarrow E(\frac{A \cup B}{2}) = 1, E(\frac{A \cap B}{2}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{t_A(x_i) \vee t_B(x_i)}{2} = \frac{1}{2} + \frac{f_A(x_i) \wedge f_B(x_i)}{2}, [\frac{t_A(x_i) \wedge t_B(x_i)}{2}, \frac{1}{2} - \frac{f_A(x_i) \vee f_B(x_i)}{2}] = [0, 0]$$

$$\Leftrightarrow t_A(x_i) \vee t_B(x_i) = 1 + f_A(x_i) \wedge f_B(x_i), t_A(x_i) \wedge t_B(x_i) = 0, f_A(x_i) \vee f_B(x_i) = 1$$

$$\Leftrightarrow t_A(x_i) \vee t_B(x_i) = 1, f_A(x_i) \wedge f_B(x_i) = 0, t_A(x_i) \wedge t_B(x_i) = 0, f_A(x_i) \vee f_B(x_i) = 1$$

$$\Leftrightarrow A(x_i) = [0, 0], B(x_i) = [1, 1] \text{ 或 } A(x_i) = [1, 1], B(x_i) = [0, 0]$$

$$(4) M(A, B) = 1 \Leftrightarrow E(\frac{A \cup B}{2}) = E(\frac{A \cap B}{2})$$

$$\Leftrightarrow E([\frac{t_A \vee t_B}{2}, \frac{(1-f_A) \vee (1-f_B)}{2}])$$

$$= E([\frac{t_A \wedge t_B}{2}, \frac{(1-f_A) \wedge (1-f_B)}{2}])$$

$$\Leftrightarrow E([\frac{t_A \vee t_B}{2}, \frac{1}{2} - \frac{f_A \wedge f_B}{2}]) = E([\frac{t_A \wedge t_B}{2}, \frac{1}{2} - \frac{f_A \vee f_B}{2}])$$

$$\Leftrightarrow t_A(x_i) \vee t_B(x_i) = t_A(x_i) \wedge t_B(x_i), f_A(x_i) \wedge f_B(x_i) = f_A(x_i) \vee f_B(x_i)$$

$$\Leftrightarrow t_A(x_i) = t_B(x_i), f_A(x_i) = f_B(x_i)$$

$$\Leftrightarrow A(x_i) = B(x_i)$$

(5) 对 $C \in V(X)$ ，若 $A \subseteq B \subseteq C$ ，则： $\forall x \in X, t_A(x) \leq t_B(x) \leq t_C(x), f_A(x) \geq f_B(x) \geq f_C(x)$ ，

$$\begin{aligned}
M(A, C) &= 1 - E(\frac{A \cup C}{2}) + E(\frac{A \cap C}{2}) = 1 - E([\frac{t_A \vee t_C}{2}, 1 - (\frac{1}{2} + \frac{f_A \wedge f_C}{2})]) + E([\frac{t_A \wedge t_C}{2}, 1 - (\frac{1}{2} + \frac{f_A \vee f_C}{2})]) \\
&= 1 - E(\frac{A \cup B}{2}) + E(\frac{A \cap B}{2}) = 1 - E([\frac{t_A \vee t_B}{2}, 1 - (\frac{1}{2} + \frac{f_A \wedge f_B}{2})]) + E([\frac{t_A \wedge t_B}{2}, 1 - (\frac{1}{2} + \frac{f_A \vee f_B}{2})]) \\
&= 1 - E(\frac{B \cup C}{2}) + E(\frac{B \cap C}{2}) = 1 - E([\frac{t_B \vee t_C}{2}, 1 - (\frac{1}{2} + \frac{f_B \wedge f_C}{2})]) + E([\frac{t_B \wedge t_C}{2}, 1 - (\frac{1}{2} + \frac{f_B \vee f_C}{2})])
\end{aligned}$$

所以有

$$\begin{aligned}
M(A, C) - M(A, B) &= -E([\frac{t_A \vee t_C}{2}, 1 - (\frac{1}{2} + \frac{f_A \wedge f_C}{2})]) + E([\frac{t_A \vee t_B}{2}, 1 - (\frac{1}{2} + \frac{f_A \wedge f_B}{2})]) - E([\frac{t_A \wedge t_B}{2}, 1 - (\frac{1}{2} + \frac{f_A \vee f_B}{2})]) + E([\frac{t_A \wedge t_C}{2}, 1 - (\frac{1}{2} + \frac{f_A \vee f_C}{2})])
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\text{由于 } \frac{t_A(x) \vee t_B(x)}{2} \leq \frac{t_A(x) \vee t_C(x)}{2} \leq \frac{1}{2} + \frac{f_A(x) \wedge f_C(x)}{2} \leq \frac{1}{2} + \frac{f_A(x) \wedge f_B(x)}{2}, \frac{t_A(x) \wedge t_C(x)}{2} \leq \frac{t_A(x) \wedge t_B(x)}{2} \leq \frac{1}{2} + \frac{f_A(x) \vee f_B(x)}{2} \leq \frac{1}{2} + \frac{f_A(x) \vee f_C(x)}{2}
\end{aligned}$$

故有

$$E([\frac{t_A \vee t_C}{2}, 1 - (\frac{1}{2} + \frac{f_A \wedge f_C}{2})]) - E([\frac{t_A \vee t_B}{2}, 1 - (\frac{1}{2} + \frac{f_A \wedge f_B}{2})])$$

$$\frac{f_A \wedge f_B}{2} \geq 0$$

$$E\left(\left[\frac{t_A \wedge t_B}{2}, 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{f_A \vee f_B}{2}\right)\right]\right) - E\left(\left[\frac{t_A \wedge t_C}{2}, 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{f_A \vee f_C}{2}\right)\right]\right) \geq 0$$

即 $M(A, C) - M(A, B) \leq 0$

同理可证 $M(A, C) - M(B, C) \leq 0$

$$M(A, B) = 1 - E\left(\frac{A \cup B}{2}\right) + E\left(\frac{A \cap B}{2}\right)$$

$$= 1 - \frac{\sum_{i=1}^n \frac{1 - t_A(x_i) \vee t_B(x_i) - f_A(x_i) \wedge f_B(x_i)}{2} + n - \sum_{i=1}^n \left| \frac{(t_A(x_i) \vee t_B(x_i))^2 - (f_A(x_i) \wedge f_B(x_i))^2}{2} \right|}{\sum_{i=1}^n \frac{1 - t_A(x_i) \vee t_B(x_i) - f_A(x_i) \wedge f_B(x_i)}{2} + n + \sum_{i=1}^n \left| \frac{(t_A(x_i) \vee t_B(x_i))^2 - (f_A(x_i) \wedge f_B(x_i))^2}{2} \right|} +$$

$$\frac{\sum_{i=1}^n \frac{1 - t_A(x_i) \wedge t_B(x_i) - f_A(x_i) \vee f_B(x_i)}{2} + n - \sum_{i=1}^n \left| \frac{(t_A(x_i) \wedge t_B(x_i))^2 - (f_A(x_i) \vee f_B(x_i))^2}{2} \right|}{\sum_{i=1}^n \frac{1 - t_A(x_i) \wedge t_B(x_i) - f_A(x_i) \vee f_B(x_i)}{2} + n + \sum_{i=1}^n \left| \frac{(t_A(x_i) \wedge t_B(x_i))^2 - (f_A(x_i) \vee f_B(x_i))^2}{2} \right|}$$

定理 6 如果 E 是 $V(X)$ 上的模糊熵, $\forall A, B \in V(X)$, 定

义 $M(A, B) = \frac{E(\frac{A \cap B}{2})}{E(\frac{A \cup B}{2})}$, 并规定: 当 $E(\frac{A \cap B}{2}) = 0$ 时, E

$(\frac{A \cup B}{2}) = 1$. 则 $M(A, B)$ 是 $V(X)$ 上的一个相似度量。

此定理的证明与定理 5 类似, 这里不再详述。

3.3 Vague 集的相似度量与距离测度之间的关系

由 Vague(值)集间的距离测度和相似度量的定义, 我们很容易看出, 它们都是度量 Vague(值)集间相似(靠近)程度的一种测度。只不过对相似度量来说, 相似度量的数值越大, 则两个 Vague(值)集越相似, 而对于距离测度而言, 情况则恰恰相反, 即距离测度的数值越小, 所度量的两个 Vague(值)集才越相似。因而, 容易得到 Vague 集的相似度量与距离测度之间的相互诱导关系, 可叙述为下面的定理。

定理 7 对 $\forall A, B \in V(X)$, 用 $M(A, B)$ 表示 $V(X)$ 上 A 和 B 的一个相似度量, $d(A, B)$ 表示 $V(X)$ 上 A 和 B 的一个距离测度, 此时 $M(A, B)$ 和 $d(A, B)$ 的相互诱导关系可由下式给出: $M(A, B) + d(A, B) = 1$ 。

此定理的证明可由 Vague 集间的距离测度和相似度量的定义直接得到, 这里不再详述。

3.4 Vague 集的模糊熵与距离测度之间的相互诱导

我们已经给出了模糊熵和相似度量、相似度量和距离测度之间的相互诱导关系, 因而很容易得到下面的一些定理:

定理 8 如果 d 是 $V(X)$ 上的距离测度, 定义 $E(A) = 1 - d(A, A^c)$, $\forall A \in V(X)$, 则 E 是 $V(X)$ 上的一个模糊熵。此时称 E 为由 d 诱导的 Vague 集的模糊熵。

定理 9 如果 d 是 $V(X)$ 上的距离测度, 定义 $E(A) = 1 - d(A \cap A^c, A \cup A^c)$, $\forall A \in V(X)$, 则 E 是 $V(X)$ 上的一个模糊熵。

定理 10 如果 d 是 $V(X)$ 上的距离测度, 定义 $E(A) = \frac{1 - d(A, A^c)}{1 + d(A, A^c)}$, $\forall A \in V(X)$, 则 E 是 $V(X)$ 上的一个模糊熵。

定理 11 如果 d 是 $V(X)$ 上的距离测度, 定义 $E(A) = \frac{1 - d(A \cap A^c, A \cup A^c)}{1 + d(A \cap A^c, A \cup A^c)}$, $\forall A \in V(X)$ 。则 E 是 $V(X)$ 上的一个模糊熵。

故有 $M(A, C) \leq \min\{M(A, B), M(B, C)\}$

因此 M 是 $V(X)$ 上的一个相似度量。

例 2 我们引用文献[9]中的模糊熵公式, 即记

$$E(A) = \frac{\sum_{i=1}^n m_A(x_i) + n - \sum_{i=1}^n |(t_A(x_i))^2 - (f_A(x_i))^2|}{\sum_{i=1}^n m_A(x_i) + n + \sum_{i=1}^n |(t_A(x_i))^2 - (f_A(x_i))^2|}$$

由此得到相似度量公式为:

以上 4 个定理的证明与定理 2 类似, 这里不再详述。上面给出的是由距离测度诱导得到模糊熵的公式, 下面给出两个由模糊熵诱导得到距离测度的公式, 这两个定理的证明过程与定理 5 类似, 这里不再详述。

定理 12 如果 E 是 $V(X)$ 上的模糊熵, $\forall A, B \in V(X)$, 定义 $d(A, B) = E(\frac{A \cup B}{2}) - E(\frac{A \cap B}{2})$, 则 $d(A, B)$ 是 $V(X)$ 上的一个距离测度。此时称 d 为由 E 诱导的 Vague 集的距离测度。

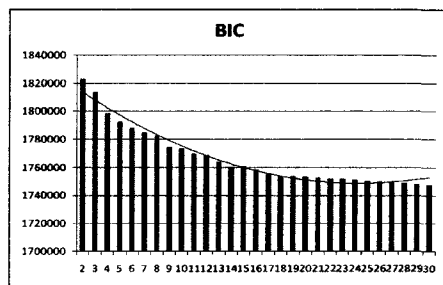
定理 13 如果 E 是 $V(X)$ 上的模糊熵, $\forall A, B \in V(X)$, 定义 $d(A, B) = 1 - \frac{E(\frac{A \cap B}{2})}{E(\frac{A \cup B}{2})}$, 并规定: 当 $E(\frac{A \cap B}{2}) = 0$ 时, $E(\frac{A \cup B}{2}) = 1$ 。则 $d(A, B)$ 是 $V(X)$ 上的一个距离测度。

结束语 本文通过 Vague 集理论中的一些定义和性质, 对 Vague 集的模糊熵、相似度量和距离测度之间的关系进行了研究, 给出了三者之间的几个相互诱导公式, 从而说明了 Vague 集的模糊熵、相似度量和距离测度之间和谐的相互关系。这些研究对于讨论 Vague 集间各种度量方法以及 Vague 集理论的应用具有重要的意义。

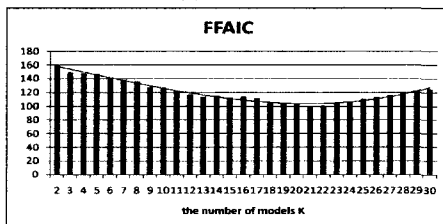
参考文献

- [1] Zadeh L A. Fuzzy sets[J]. Information and control, 1965, 8(3): 338-353
- [2] 梁保松, 曹殿立. 模糊数学及其应用[M]. 北京: 科学技术出版社, 2007: 65-177
- [3] Gau W L, Buehrer D J. Vague sets [J]. IEEE Transactions on System, Man and Cybernetics, 1993, 23(2): 610-614
- [4] Szmidt E, Kacprzyk J. Distances between intuitionistic fuzz sets [J]. Fuzzy sets and Systems, 2002, 114(3): 505-518
- [5] Deschrijver G, Kerre E E. On the composition of intuitionistic fuzzy relations [J]. Fuzzy sets and Systems, 2003, 136(3): 333-361
- [6] Szmidt E, Kacprzyk J. Entropy for intuitionistic fuzzy sets [J]. Fuzzy sets and Systems, 2001, 118(3): 467-477
- [7] Deschrijver G, Kerre E E. On the relationship between some extensions of fuzzy set theory [J]. Fuzzy sets and Systems, 2003, 133(2): 227-235

(下转第 274 页)



(c) BIC准则



(d) FFAIC准则

图4 图3的不同模型选择准则及其趋势图

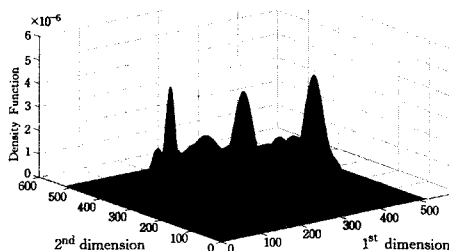


图5 图3的高斯混合密度函数(K=21)

结束语 本文提出了一种基于特征函数的医学图像高斯混合模型选择准则,克服了目前广泛采用的基于似然函数的高斯混合模型选择存在的过拟合问题。基于特征函数混合模型选择准则将会对统计学、机器学习和模式识别等领域有着一定的理论和应用价值。我们下一步工作将研究基于该准则的医学图像高斯混合模型聚类 and 分割等方面的应用。

参考文献

- [1] McLachlan G, Peel D. Finite Mixture Models. Wiley series in probability and statistics[M]. New Yourk: Wiley, 2000
- [2] Yang X Y, Shankar M K. Image Segmentation Using Finite

Mixtures and Spatial Information[J]. Image and Vision Computing, 2004(22): 735-745

- [3] Alata O, Quintard L. Is there a best color space for color image characterization or representation based on Multivariate Gaussian Mixture Model? [J]. Computer Vision and Image Understanding, 2009, 113: 867-877
- [4] Hayit G, Adi T P. Medical Image Categorization and Retrieval for PACS Using the GMM-KL Framework[J]. IEEE Transactions on Information Technology in BioMedicine, 2007, 11(2): 190-202
- [5] Dempster A P, Laird N M, Rubin D B. Maximum-likelihood from incomplete data via the EM algorithm[J]. Journal of the Royal Statistical Society, SERIES B, 1977, 39(1): 1-38
- [6] Kivinen J, Manfred K W. Additive versus exponentiated gradient updates for linear prediction[J]. Information and Computation, 1997, 132(1): 1-64
- [7] Durio A, Isaia E D. A quick procedure for model selection in the case of mixture of normal densities[J]. Computational Statistics & Data Analysis, 2007, 51: 5635-5643
- [8] Miloslavsky M, Van Der Laan J M. Fitting of mixtures with unspecified number of components using cross validation distance estimate[J]. Computational Statistics & Data Analysis, 2003, 41: 413-428
- [9] Wang H X, Luo B, Zhang Q B. Estimation for the number of components in a mixture model using stepwise split-and-merge EM algorithm[J]. Pattern Recognition Letters, 2004, 25: 1799-1809
- [10] Schwarz G. Estimating the Dimension of a Model[J]. Annual Statistics, 1978(6): 461-464
- [11] Hansen M H, Yu B. Model selection and the principle of minimum description length [J]. Journal of the American Statistical Association, 2001, 96: 746-774
- [12] Paalanen P, Kamarainen J K, Ilonen J. Feature representation and discrimination based on Gaussian mixture model probability densities—Practices and algorithms [J]. Pattern Recognition, 2006, 39: 1346-1358
- [13] Bozdogan H. Mixture-Model Cluster Analysis Using Model Selection Criteria and a New Information Measure of Complexity [M]. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1994

(上接第 224 页)

- [8] Hung W L. A note on entropy of intuitionsic fuzzy sets[J]. International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge Based Systems, 2003, 11(33): 627-633
- [9] 范平, 梁家荣, 李天志. Vague 集的新模糊熵[J]. 计算机工程与应用, 2007, 43(13): 179-181
- [10] 李凡, 徐章艳. Vague 集之间的相似度量[J]. 软件学报, 2001, 12(6): 922-927
- [11] 闫德勤. Vague 集的相似度量[J]. 计算机科学, 2006, 33(5): 195-196
- [12] 石玉强, 王鸿绪. 一种基于 Vague 集间距离的双向近似推理方法[J]. 小型微型计算机系统, 2007, 28(4): 661-665
- [13] Wang W Q, Xin X L. Distance measure between intuitionsic

fuzzy sets[J]. Pattern Recognition Letters, 2005, 26(13): 2063-2069

- [14] Li D F, Cheng C T. New similarity measures of intuitionsic fuzzy sets and application to pattern recognition[J]. Pattern Recognition Letters, 2002, 23(1): 221-225
- [15] 黄国顺, 刘云生. Vague 集相似度量及其在模式识别中的应用[J]. 复旦学报, 2004, 43(5): 869-873
- [16] 符海东, 卢正鼎. 基于 Vague 集距离的多评价指标模糊决策方法[J]. 华中科技大学学报, 2003, 31(8): 77-79
- [17] 要瑞璞, 沈惠璋. 基于 Vague 集投影及距离的模糊多指标决策[J]. 数学的实践与认识, 2009, 39(2): 19-22
- [18] 李凡, 徐章艳, 饶勇. Vague 集[J]. 计算机科学, 2000, 27(9): 12-14