

隐式多项式曲线的信息建模研究进展

吴 刚

(南京财经大学电子商务重点实验室 南京 210003)

摘 要 用隐式多项式曲线来描述数据点集合轮廓具有天然的优势,尤其是在数据点集合轮廓的拟合过程中体现得更为明显。概括了基于隐式多项式曲线的信息建模研究现状,侧重于目前国内外各种隐式多项式曲线拟合算法的分析以及优劣比较。以多个图像物体数据点集合轮廓为例,使用各种拟合算法对其进行拟合,并给出了拟合的效果,分析了算法的优劣和改进措施以及以后的研究方向。

关键词 隐式多项式,曲线拟合,曲线,曲面

中图法分类号 TP391.41 **文献标识码** A

On Summarization of Information Modeling Based on Implicit Polynomial Curves

WU Gang

(Key Lab of Electronic Business, Nanjing University of Economic, Nanjing 210003, China)

Abstract It has many advantages for implicit polynomial curves to describe data set boundary, more obviously in fitting data point. This paper surveyed the current studies on information modeling based on implicit polynomial curves, focused on the comparison of the various implicit polynomials curves fitting algorithm, then, taking an example of image objects boundary, analyzed the effect of curves fitting algorithm, advantages and disadvantages of them, method improving and study trends.

Keywords Implicit polynomial, Curve fitting, Curve, Surface

1 引言

图像中物体的有效表达、时间序列数据以及商业数据的处理,包括压缩、相似度计算都需要使用一个具体数学模型表达出来。图像物体边界数据就是一种典型的具有明确含义的数据点集合,对于这类数据,国内外文献提出了许多基于形状的描述方法,如多边形法、傅氏描述子法、累积角法等,其中用二次曲线和超二次曲线拟合物体边界形状进行物体描述已获得广泛应用^[1,2]。近年来,高次隐式多项式曲线用来作为物体的几何模型越来越受到重视^[3-6]。使用高次隐式多项式曲线或者曲面为商业和其它领域的可视化建模还没有广泛的研究。使用隐式多项式曲线描述数据,为业务信息建模具有的优点是其它建模方法无法比拟的,这主要是由于隐式多项式曲线精确的表达能力,描述的参数完全取决于隐式多项式曲线的次数和系数,有明确的解析式,便于操纵和使用,更重要的是它具有天然的数据噪声过滤能力和修补能力。本文概述国内外基于隐式多项式曲线进行信息建模的大多数算法,分析其优缺点,比较其有效性。主要以图像数据为例,进行信息建模分析,并指出其未来研究方向。

隐式多项式曲线是一个平面曲线,在直角坐标系($O-XY$)中,曲线方程可表示为

$$f_n(x, y) = \sum_{i+j \leq n, i, j \geq 0} a_{ij} x^i y^j = a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + a_{20}x^2 +$$

$$a_{11}xy + a_{02}y^2 + \dots + a_{n0}x^n + a_{n-1,1}x^{n-1}y + \dots + a_{0n}y^n = 0 \quad (1)$$

式(1)也可以写成向量的形式,这种写法在以后的曲线拟合中很有用,也就是将系数和变元项写成向量形式。

记 $A^T = (a_{00} \ a_{10} \ \dots \ a_{1n-1} \ a_{0n})$, $X^T = (1 \ x \ \dots \ x^{n-1} \ y \ y^n)$, 那么

$$f_n(x, y) = A^T X \quad (2)$$

隐式多项式曲线和代数曲线一个很大的区别就是隐式多项式曲线的系数是实数域上的,而代数曲线讨论的是复数域上的,同时隐式多项式曲线强调曲线的有界性和封闭性,这是因为一般数据和物体都是封闭有界的,而且封闭有界便于控制和应用,一般的代数曲线由于无界和不封闭而难以应用。

2 隐式多项式曲线的信息建模概述

对数据点进行函数拟合以获得信息模型是许多应用领域的一个核心问题,信息的建模主要是对数据的拟合,一般数据的拟合问题是给定一组 n 个数据点

$$S = \{\bar{x}^i = (x_1^i, \dots, x_d^i) \in R^d \mid i=1, \dots, n\} \quad (3)$$

寻找一个分析曲面,它能紧致地通过数据点集合 S 。相应曲线的一般函数表达就是定义在 R^{d-1} 上的参数曲面或函数 $F: R^d \rightarrow R$ 的零集合,后者就是所有点 $\bar{x}$ 的轨迹,即是 $F(\bar{x})=0$ 。函数 F 可以是径向基函数、超二次函数、薄盘样条函数或隐

式多项式函数。隐式多项式系数的数目,也就是其自由度为

$$m = \frac{1}{2}(k+1)(k+2)$$

式中, k 为隐式多项式的次数。下面如果没有特殊说明都是二维数据点集合, 数据点个数为 n 个, 使用 k 次隐式多项式曲线拟合。

我们在文献[7,8]中讨论了隐式多项式曲线的基本性质和次数确定定理, 为基于隐式多项式曲线的数据建模提供了可靠的理论基础, 主要包括隐式多项式曲线的连通性、有界性以及次数的确定。对于平面数据点集合 S , 寻找隐式多项式曲线 $f(x, y) = 0$, 使它尽可能通过这些数据点的一个简单方法是对下面的目标函数最小化

$$\sum_{(x_i, y_i) \in S} f^2(x_i, y_i) \quad (4)$$

其实质是线性最小二乘曲线拟合。我们知道, 线性最小二乘有很多改进算法, 如加权最小二乘、带有约束条件的最小二乘等等, 但是, 这些最小二乘曲线拟合算法对曲线的拟合效果很差, 原因是 $f^2(x_i, y_i)$ 并不是点 (x_i, y_i) 到曲线 $f(x, y) = 0$ 的距离。

线性最小二乘算法拟合对高次隐式多项式曲线效果特别差, 其数值特别不稳定, 即零点集合的微小改变都会造成拟合获得的隐式多项式曲线方程系数剧烈变化。这显然会在基于这种曲线的相关应用时带来很大困难。鉴于线性最小二乘不稳定的缺点, 文献[9]提出通过对下面公式最小化以获取隐式多项式曲线的方程

$$\sum_{(x_i, y_i) \in S} \frac{f^2(x_i, y_i)}{\|\nabla f(x_i, y_i)\|^2} \quad (5)$$

式中, $\|\nabla f(x_i, y_i)\|^2$ 表示梯度范数的平方。

基于式(5)的拟合方法并不能保证得到的隐式多项式曲线能较为紧致和精确地拟合数据点, 必须寻找约束条件对上式进行最小化, 这种约束最小化方法主要有两类, 一类是基于启发式的最小化, 一类是基于约束多项式子集的最小化。

基于启发式的最小化如文献[10-12]所述, 它们都是强迫拟合的结果, 有某种好的几何特征, 如在平面上有界和绕数据点紧密等。在目标函数的最小化中, 对不满足约束条件的隐式多项式曲线进行惩罚, 以获得理想的隐式多项式曲线。这种算法要经过很多次迭代, 且目标优化函数容易陷入局部极小, 获得的隐式多项式曲线稳定性难以保证。

基于约束多项式子集的最小化如文献[13]所述, 是将搜索限制在给定特征的多项式子集中, 通过参数化这种多项式子集, 使得在这个集合空间中得到的目标优化函数曲线满足给定的要求, 如有界的、紧密的等条件, 这既保证了拟合的精确又避免了使用惩罚函数。但是文献仅讨论了星形物体的约束多项式子集, 这显然是不够的, 因为大多数物体并非是星形的。

以上这些基于非线性目标函数的优化拟合算法都需要迭代求解, 很可能陷入局部最小, 使获得的隐式多项式曲线不能精确地描述数据特征, 更为困难的是这种算法严重依赖初始值的选取, 也就是怎样选取恰当的初始值是一个困难的问题。这种拟合算法与其它通过迭代寻优的算法一样都面临优化速度慢、收敛不确定等问题。

鉴于非线性目标函数优化有十分明显的缺点而且很难克服, 许多学者又转而寻求改进线性最小二乘算法, 以期望快速

获得拟合结果。文献[14-16]提出了 3L 算法, 即通过将数据点看作零集合, 将轮廓点向内和向外分别收缩和扩张, 获得 3 个点集合, 中间点集合是隐式多项式的零点集合, 外部点集合的隐式多项式值为一个正常数, 内部点集合是一个负常数。对它们使用线性最小二乘算法求解系数, 可以发现正常数和负常数选取十分困难, 如果选取得不恰当将使隐式多项式曲线发生严重震荡, 这尤其对高次隐式多项式曲线更是如此。

文献[17,18]提出了针对 3L 算法的改进措施, 其基本思想是根据每一个零点的具体位置, 计算其梯度值, 使隐式多项式曲线的梯度函数在这些零点上等于这些梯度值, 从而获取一组线性方程组, 它们和过零点的线性方程组联合使用线性最小二乘算法求解隐式多项式曲线的系数。很明显, 这种算法需要计算离散点的差分替代偏导数值, 因而特别受零点的影响, 如果噪声很大, 将引起拟合的隐式多项式曲线很不稳定。文献[19]对此又作了进一步的改进, 即对隐式多项式的偏导函数进行规范化, 这种算法由于引入统一的标准化手段, 使得计算的偏导函数值得到均值化处理, 相对而言算法较为稳定。

线性最小二乘类算法和非线性目标函数优化类算法其实质上基于多元函数的极值求解, 也就是将隐式多项式系数看作变量, 构造目标函数, 然后求解极值点, 进而获得变量值。针对数据点集合轮廓的特征, 文献[20]给出了一种直接求解隐式多项式曲线方程的算法, 借助 Fourier 级数展开, 也就是将数据点集合轮廓曲线展开 Fourier 级数, 以轮廓中心点为原点, 采用极坐标表示数据点集合轮廓点, 这种方法只能适用星状数据。对于其他特殊特征的数据点集合, 还有许多具体的拟合算法提出。

3 隐式多项式曲线信息建模算法

拟合问题是基于隐式多项式曲线应用的基础和前提, 对于给定的二维轮廓曲线, 如何确定隐式多项式曲线的系数使之能够精确地描述数据点集合十分关键。本节综述目前提出的各种曲线拟合方法, 并对各种算法进行编程实现和分析比较。由于图像数据最为直观, 因此我们选用几个图形进行实验, 分别是小熊、皮鞋、蝴蝶和汽车, 数据点集合就是这些图形的边界轮廓数据。

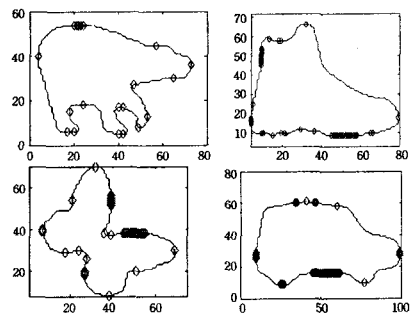


图1 物体边界轮廓图形

我们在文献[8]中提出了隐式多项式曲线次数确定算法, 基于这种算法需要检测数据点轮廓的拐点。图1为各个图形检测的导数值为0的点, 其数目如下: 小熊有17个, 皮鞋有16个, 蝴蝶有14个, 汽车有13个, 以上检测都不够十分精确, 但是足够使用。根据文献[8]的定理2, 汽车和蝴蝶使用4次以上的隐式多项式曲线才能拟合出来, 而小熊、皮鞋需要使

用6次以上隐式多项式曲线才能较好地拟合。下面的实验中,统一选定6次隐式多项式曲线进行数据点拟合。

3.1 一般线性最小二乘拟合算法

对于式(3)的数据点集合,进行数据点集合轮廓拟合,数据点都有两个坐标值,注意式(2)的表示方法,同时此处假设使用 k 次隐式多项式曲线拟合,则将 n 个数据点坐标值代入该式就有

$$f_k(x_i, y_i) = A^T X_i, i=1, 2, \dots, n \quad (6)$$

一般最小线性拟合算法就是使

$$E = \sum_{i=1}^n f_k(x_i, y_i)^2 \quad (7)$$

最小,写成矩阵形式就是

$$E = \sum_{i=1}^n (A^T X_i)(A^T X_i) = \sum_{i=1}^n A^T X_i X_i^T A = A^T \left(\sum_{i=1}^n X_i X_i^T \right) A$$

显然

$$\sum_{i=1}^n X_i X_i^T = \begin{bmatrix} X_1 & X_2 & \dots & X_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1^T \\ X_2^T \\ \vdots \\ X_n^T \end{bmatrix}$$

记 $M = [X_1 \ X_2 \ \dots \ X_n]$,则有

$$E = A^T M M^T A \quad (8)$$

对上式最小化求得 A 即可以获得隐式多项式曲线的系数。显然式(7)可以写成

$$E = \|M^T A\|_2^2 \quad (9)$$

事实上,一般线性最小二乘是最小化 $\sum_{i=1}^n (f_k(x_i, y_i) - \hat{f}_k(x_i, y_i))^2$,可是由于数据点隐式多项式值都是0,因而只需要求 $E = \sum_{i=1}^n f_k(x_i, y_i)^2$ 最小。对于式(9)还要给定约束条件,就是 $h_k(x_i, y_i) > 0, i=1, 2, 3, \dots, n$ 。 $h_k(x_i, y_i)$ 是式(6)的第 k 次齐次项。

下面对图1中的物体使用一般线性最小二乘进行拟合。

图2是使用一般的线性最小二乘拟合的图形,选用的隐式多项式曲线次数是6次。可以发现6次隐式多项式曲线拟合的结果虽然封闭有界,但是有多个互不连通的曲线,这显然不符合要求,因而一般不使用传统的最小二乘法拟合物体。

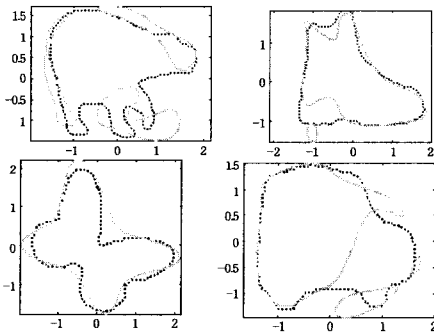


图2 使用6次隐式多项式曲线拟合的物体

3.2 3L 曲线拟合算法

一般最小二乘由于只使用数据点集合信息,而且目标函数不是实际点到隐式多项式曲线的距离,因而造成极不稳定,从而无法应用,对于如何改进一般线性最小二乘算法,许多文献提出了一些约束措施,其中文献[21]提出了一种3L算法。下面介绍这种拟合算法,并给以理论和实例分析。

3L算法思想并不复杂,就是在数据点集合内部和外部构造两个数据集合点,类似于对原始数据轮廓放大一些,然后再缩小一些,这样和原始数据点集合轮廓构造3个数据点集合,每一个集合称之为Level Set。3L算法就是这样来的。图3中间的轮廓曲线,即C3曲线是原始曲线,C1和C2都是其放大缩小以后获得的数据点集合。显然,拟合曲线C3的隐式多项式曲线 $f(x, y) = 0$,在曲线内部,也就是所有C2上的点满足 $f(x, y) = \epsilon_1 < 0$,在曲线外部,也就是C1上的点满足 $f(x, y) = \epsilon_2 > 0$,那么3个集合点参与线性最小二乘就使得单独使用C2数据点进行线性拟合增加了约束条件。这就是3L的基本思想。

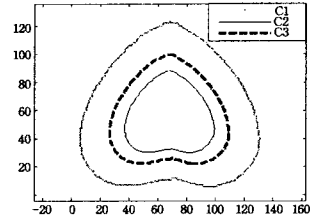


图3 3L算法的数据点集合

上面的 ϵ_1 和 ϵ_2 是常数,其取值选取的标准分别是C1和C2相对于C3轮廓曲线放大和缩小的倍数。结合一般线性最小二乘的算法,应该将式(7)改写为

$$E = \sum_{i=1}^n f_k(x_i, y_i)^2 + \sum_{i=n+1}^{2n} (f_k(x_i, y_i) - \epsilon_1)^2 + \sum_{i=2n+1}^{3n} (f_k(x_i, y_i) + \epsilon_2)^2 \quad (10)$$

显然,3个数据点集合,一共有 $3n$ 个数据点,其残差为3个数据点集合上隐式多项式函数残差的和。式(10)可以写成类似式(9)的形式。

$$E = \|M_0^T A\|_2^2 + \|M_+^T A - \hat{\epsilon}_1\|_2^2 + \|M_-^T A + \hat{\epsilon}_2\|_2^2 \quad (11)$$

式中, $\hat{\epsilon}_1$ 和 $\hat{\epsilon}_2$ 分别是由 ϵ_1 和 ϵ_2 为元素的向量。

可以将上式合并写作

$$E = \|M^T A - b\|_2^2 \quad (12)$$

式中, $M = [M_0 \ M_+ \ M_-]$, $b = [0 \ \hat{\epsilon}_1 \ \hat{\epsilon}_2]$, $M_0 = [X_1 \ X_2 \ \dots \ X_n]$, $M_+ = [X_{n+1} \ X_{n+2} \ \dots \ X_{2n}]$, $M_- = [X_{2n+1} \ X_{2n+2} \ \dots \ X_{3n}]$ 。 X_i 是式(6)中隐式多项式各项在3L数据点的值。

由多元函数求极值的算法可知,对式(12)关于系数 A 求偏导数并令为0,然后解线性方程组就可以求出系数 A 的值。因而有

$$A = (M^T M)^{-1} M b \quad (13)$$

如果 $M^T M$ 的逆不存在或者是奇异矩阵,则可以通过其最小值对应的特征向量或者其它方法求得。

通过以上3L算法的分析,可以观察到其本质是根据3L数据集合点寻找 $z = f(x, y)$ 拟合函数,不难分析,在放大和缩小曲线获得数据时,取其对应的函数值为放大或者缩小的倍数,这种取值方法只能说明 $z = f(x, y)$ 在原始零点集合的各点处,其梯度大小是一样的,这显然是不符合实际的,因而算法有局限性。这就造成了一个明显的事实,就是这种算法缩小了拟合隐式多项式曲线的空间,使本来能够很好拟合零点数据集合的曲线由于梯度在各点不相等而被排除。

图4是使用3L拟合算法获得的6次隐式多项式曲线,所有的曲线拟合都是使用欧氏距离变换获得内外曲线集合,距

离零点集合的欧氏距离都是选取 0.033 这个值,其中点划线是获得的内外曲线,粗实线是拟合获得的隐式多项式曲线。可以发现 3L 曲线拟合算法仍然存在拟合不够稳定的现象,而且欧氏距离取值没有统一的标准,不恰当的取值会使 3L 曲线拟合算法失效。

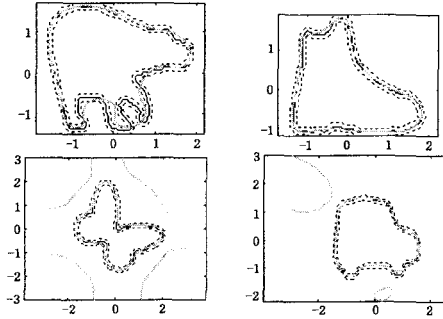


图4 使用6次隐式多项式曲线拟合的物体

3.3 3L 修改算法

3L 算法需要对零点数据集合进行缩小和放大,造成放大和缩小的数据点集合的隐式多项式函数值只能确定为常数,这显然是不合理的。为了改进这种算法,文献[19]提出了一种新的方法,就是不再通过放大和缩小原始数据点集合获得 3L 集合,而是通过原始数据点的梯度方向获得 3L 集合。

令 $z = f_k(x, y)$ 在零点数据点 (x_i, y_i) 的梯度方向和坐标轴 x 的夹角为 α_i , 则有下式成立

$$v = \frac{\partial f_k(x_i, y_i)}{\partial x} = \cos(\alpha_i),$$

$$w = \frac{\partial f_k(x_i, y_i)}{\partial y} = \sin(\alpha_i),$$

$$i = 1, 2, \dots, n \quad (14)$$

这样和式(6)一起构造了 $3n$ 个线性方程组,可以对这个线性方程组使用最小二乘求解出隐式多项式曲线的系数向量。因而可以根据这 $3n$ 个线性方程组写成式(12)残差的形式。其中,

$$b = [0 \quad v \quad w], M_0 = [X_1 \quad X_2 \cdots X_n],$$

$$M_X = \left[\frac{\partial X_1}{\partial x} \quad \frac{\partial X_2}{\partial x} \cdots \frac{\partial X_n}{\partial x} \right], M_Y = \left[\frac{\partial X_1}{\partial y} \quad \frac{\partial X_2}{\partial y} \cdots \frac{\partial X_n}{\partial y} \right],$$

$$M = [M_0 \quad M_X \quad M_Y] \quad (15)$$

$X_i, i = 1, 2, \dots, n$ 和式(6)含义一样指的是隐式多项式各项在 (x_i, y_i) 的值,而 $\frac{\partial X_i}{\partial x}, \frac{\partial X_i}{\partial y}$ 分别表示向量 X_i 关于 x 和 y 的偏导数在 (x_i, y_i) 的值。于是使用最小二乘法计算出来的隐式多项式系数向量为 $A = (M^T M)^{-1} M b$ 。

下面对图1的物体使用 3L 修改算法进行拟合,选用 6 次隐式多项式曲线,在拟合研究中发现需要对式(15)中的 M_X 和 M_Y 进行缩放,也就是对于这两类数据加权,以平衡和 M_0 之间的差异。原因是 M_0 对应的常数项是 0。

获取数据点集合轮廓上点的法线方向,考虑到数据点集合轮廓没有经过平滑处理,因而需要取多个点的法线方向平均值作为待求点的法线,图5中,“*”表示原始数据点集合轮廓点,“.”表示法线方向上的点,具体是通过曲线轮廓上的点加上 5 倍的法线方向获得。这些图形的法线方向是通过 3 个点的平均法线方向获取的。

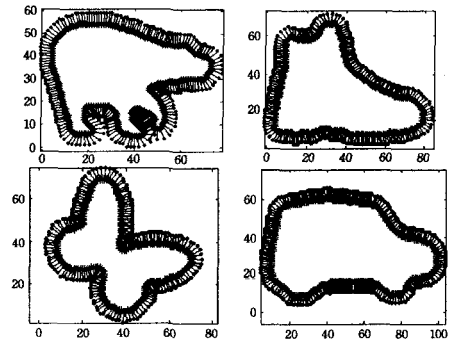


图5 数据点集合轮廓及其法线图

图6是使用 3L 修改算法获得的曲线拟合,可以发现拟合效果比 3L 算法要好,在拟合过程中,选取的权值一般是 0.03 至 0.1 之间,也就是对法线涉及的两组线性方程组同时缩小 0.03 至 0.1 倍。应该看到这种权值的选取还是需要根据拟合效果进行比较调整,因而限制了方法的自动进行,自适应性差,另外拟合结果仍然不够稳定。

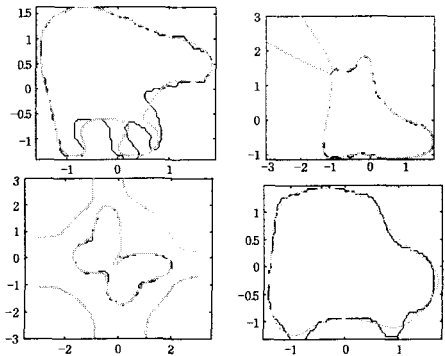


图6 使用6次隐式多项式曲线的数据点集合轮廓拟合

3.4 Min-Max 和 Min-Var 算法

文献[19]提出了 Min-Max 算法和 Min-Var 算法。Min-Max 算法主要是考虑对式(15)进行修改,修改后的 M_X' 和 M_Y' 分别是

$$M_X' = \left[\frac{\partial X_1}{\partial x} / \|X_1\|_1 \quad \frac{\partial X_2}{\partial x} / \|X_2\|_1 \quad \cdots \quad \frac{\partial X_n}{\partial x} / \|X_n\|_1 \right] \quad (16)$$

$$M_Y' = \left[\frac{\partial X_1}{\partial y} / \|X_1\|_1 \quad \frac{\partial X_2}{\partial y} / \|X_2\|_1 \quad \cdots \quad \frac{\partial X_n}{\partial y} / \|X_n\|_1 \right] \quad (17)$$

由此得到 $M = [M_0 \quad M_X' \quad M_Y']$, b 和式(15)中的 b 一样,这样就得到隐式多项式系数向量 $A = (M^T M)^{-1} M b$ 。

Min-Var 算法是将 M_X' 和 M_Y' 中的 X_i 的 1 范数改为 2 范数,即有

$$M_X'' = \left[\frac{\partial X_1}{\partial x} / \|X_1\|_2 \quad \frac{\partial X_2}{\partial x} / \|X_2\|_2 \quad \cdots \quad \frac{\partial X_n}{\partial x} / \|X_n\|_2 \right] \quad (18)$$

$$M_Y'' = \left[\frac{\partial X_1}{\partial y} / \|X_1\|_2 \quad \frac{\partial X_2}{\partial y} / \|X_2\|_2 \quad \cdots \quad \frac{\partial X_n}{\partial y} / \|X_n\|_2 \right] \quad (19)$$

由此得到 $M = [M_0 \quad M_X'' \quad M_Y'']$, 于是有 $A = (M^T M)^{-1} M b$, 从而计算出拟合的隐式多项式曲线方程系数。和 3L 修改算法一样也需要对 M_X'' 和 M_Y'' 以及对应的式(14)常数项作加权处理,可以对每一项分别加权,也可以同时对所有项使用同一个权值加权处理,但是权值的选取需要仔细研究,图7是使用 Min-Max 算法对 4 个物体拟合的曲线。

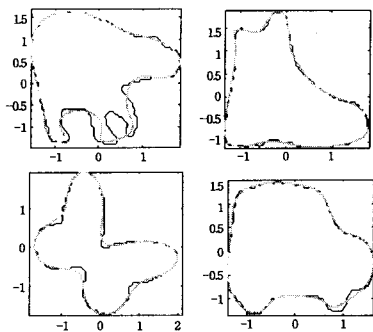


图7 Min-Max算法拟合的曲线

图8是使用Min-Max算法在权的取值从1到8的变化,显然在权值为5时拟合效果最好,而对于Min-Var算法,要达到同样的效果,只要权值取2就可以了。从图8可以观察到权值取得越小越不稳定,权值取得越大,则曲线描述能力下降。权值取得小,例如权值为1时,最小二乘更多地实现了零点数据的线性方程组,也就是 $M_0 X=0$,因而也就牺牲了梯度所形成的线性方程组,也就是使 $M_X' X=v, M_Y' X=w$ 满意程度降低。同样,权值取得过大,使得后者线性方程组得到较好的满足,而前者表示零集合的线性方程组不能够得到很好的满足。例如权值取100时,显然对于零点上的每一个梯度得到了很好的满足,但是拟合的曲线不能很好地描述零集合。为了实现系统自适应选取权值,还需要深入研究Min-Max算法中 M_0, M_X' 和 M_Y' 3个线性方程组的关系,在零集合以及梯度满足度之间寻找最佳权值点。这应该研究线性最小二乘,使得这两种线性方程组的残差对总线性方程组残差的贡献接近。另外,研究隐式多项式曲线连通性,以确定拟合的隐式多项式曲线是否有效和最优也十分关键。

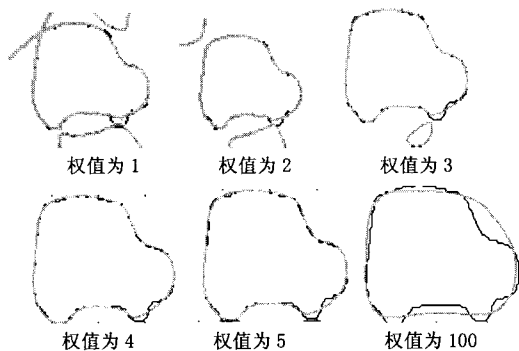


图8 Min-Max算法梯度权值的影响

3.5 Fourier级数隐式化算法

文献[22]提出了一种隐式多项式曲线的拟合算法,这种算法不需要做最优化处理,它的基本思想就是首先根据数据点集合轮廓写出其Fourier参数形式,也就是将 x 和 y 写成弧长的函数形式,然后再进行傅里叶级数展开。最后将这两个参数函数作隐式化处理,变换成隐式多项式的形式。文献[22]指出Sylvester矩阵含有符号运算,提出一种更容易实现的隐式算法,称之为Matrix Annihilation算法,该算法没有符号运算,因而运算速度较快。

由于Fourier描述没有考虑仿射不变性,因此文献[23]采用了一种仿射不变的Fourier描述方法,进行重新隐式化,这种考虑只是使得获得的隐式多项式曲线方程便于基于仿射不变量的识别。文献[24]提出另一种基于Fourier描述的隐式

化方法,但是这种方法只能适用于星状数据点集合轮廓曲线的隐式多项式曲线拟合。具体方法有兴趣的读者可以参考该文献。

4 隐式多项式曲线信息建模的研究方向

(1)隐式多项式曲线的稳定性问题

使用隐式多项式曲线对各种数据点进行建模时,需要保证拟合的曲线紧密地通过这些数据点,没有多余的曲线,这包括两个方面,一个是不能无界,一个是不能出现不连通区域。文献[25-28]等提出了隐式多项式曲线拟合数据点是否精确的标准,其主要思想就是计算数据集合点到拟合获得的隐式多项式曲线的距离,这种判断标准对于连通的没有多余曲线曲面部分的隐式多项式曲线,其效果较为有效,但是如果出现多余的曲线则失去作用,如图8权值为3的图形所示,尽管汽车轮廓的数据点几乎都在拟合的隐式多项式曲线上,但是由于下面出现了多余曲线,拟合获得的隐式多项式曲线没有很好地描述该物体,因此隐式多项式曲线的连通性研究十分重要。对于目前各种隐式多项式曲线拟合算法中,曲线的连通性检测是建立有效数据模型的关键,因为这直接关系到隐式多项式曲线拟合的稳定性。另外,寻找一次性对数据点集合轮廓精确稳定的拟合算法,不需要对拟合的隐式多项式曲线进行稳定性、精确性以及连通性检验仍然是研究的热点问题。

(2)隐式多项式曲线和曲面次数确定问题

对于使用隐式多项式曲线或者曲面对数据点集合进行建模,遇到的第一个问题就是隐式多项式次数的确定,需要从理论上给出选用次数的依据。文献[15,18,20]等提出的拟合算法都是先用低次隐式多项式曲线或者曲面拟合试探,如果效果不好再逐步提高,这显然是不科学的,而且效率也十分低下。文献[23]等也指出这个问题的重要性,因为它直接关系到傅里叶级数项数目的选取问题。文献[29]提出的自适应次数确定方法实质是从低次到高次进行隐式多项式曲线迭代求解,将数据点拟合方程进行QR分解,后一步使用前一步的运算结果,虽然计算量得到降低,但仍然是一种试探性的经验方法,严重依赖于终止条件,而提出的终止条件由于实际的误差和连通性等原因常常使迭代非正常终止。文献[23]等提出了参数曲线的隐式化次数确定算法,但是该算法无法直接应用于隐式多项式曲线次数的确定。文献[9]明确指出了隐式多项式曲线或者曲面次数选取的下界,也就是对于数据点轮廓的驻点数目有 k 个,用来描述该数据边界所选用的隐式多项式曲线的次数不能低于 $(1+\sqrt{1+4k})/2$,并给出了严格的数学证明和实例验证,但是,这只是为隐式多项式曲线次数选取提供了指导,如何确定最优次数仍然没有解决。

(3)保持不变量的隐式多项式曲线建模

在隐式多项式曲线建模中,如果数据点集合发生了欧氏、仿射或者射影变换,如何保持数据点集合轮廓在变换前后,拟合获得的隐式多项式曲线也有这种变换关系十分重要,因为只有保持这种变换关系,才能基于变换前后的隐式多项式曲线不变量进行目标物体的识别,寻找这种保持各种变换不变量的隐式多项式曲线建模是隐式多项式曲线有效应用的关键。

结束语 本文探讨了基于隐式多项式曲线的信息建模和应用研究的现状,主要从数学原理和拟合算法的优劣等角度

(下转第47页)

- [J]. Ad hoc Networks, 2005, 1(3): 69-89
- [2] Cevics S, et al. On communication security in wireless Ad hoc sensor network[A]//Eleventh IEEE International Workshops on Enabling Technologies: infrastructure for collaborative enterprises(WETICE'02) [C]. Pittsburgh, Pennsylvania, 2002; 10-12
- [3] Ren xiuli. Security methods for wireless sensor networks [A]//Proceedings of the 2006 IEEE International Conference on Mechatronics and Automation[C]. 2006; 1925-1930
- [4] Ganesan P, et al. Analyzing and modeling encryption overhead for sensor network nodes [A]//Proceedings of the 2nd ACM

- International Conference on Wireless Sensor Networks and Applications [C]. San Diego, 2003; 151-159
- [5] <http://www-igm.univ-mlv.fr/~lecroq/string/node12.html>
- [6] Liu R T, Huang N F, Chen C H, et al. A Fast String-Matching Algorithm for Network Processor-based Intrusion Detection System[J]. ACM Transactions on Embedded Computing System, 2004, 3(3): 614-633
- [7] Roesch M. Snort-lightweight Intrusion Detection for Networks [A]//Proceeding of the 13th System Administration Conference [C]. USENIX, 1999; 4-5

(上接第 37 页)

对隐式多项式曲线进行分析, 基本概况了目前所有的拟合算法, 可以看出, Min-Max 算法很精确地拟合了数据点形状, 而且非常稳定, 只是需要进一步研究 3L 集合的权值参数调整问题, Min-Max 等隐式多项式曲线拟合算法抛弃了需要迭代的优化算法, 仅仅求解一个线性方程组就可以确定隐式多项式曲线方程系数, 应该说已经趋于成熟。可以预见, 将这种建模思想应用到各种数据点集合中必将带来很大的发展空间。

参 考 文 献

- [1] Bajcsy R, Solina F. Three dimensional object representations revisited[C]//Proc. Inter. Conf. Computer Vision, London, 1987; 231-240
- [2] Khotanad A, Hong Y H. Rotation and Scale Invariant Features for Texture Classification[C]//Proc. of Robotics and Automation, Santa Barbara, USA, 1987; 16-17
- [3] Unel M, Wolovich W A. On the construction of complete sets of geometric invariants for algebraic curves[J]. Advances in applied mathematics, 2000, 24: 65-87
- [4] Lei Z. Implicit polynomial shape modeling and recognition, and application to image and video database[D]. Brown University, 1997
- [5] Khan N. Silhouette-Based 2D-3D Pose Estimation using implicit algebraic surfaces[D]. Saarbrücken; Saarland University, 2007
- [6] Lebmeir P, Richter-Gebert J. Rotations translations and symmetry detection for complexified curves[J]. Computer Aided Geometric Design, 2008, 25: 707-719
- [7] 吴刚, 李道伦. 基于隐含多项式曲线仿射不变量的目标识别[J]. 电子学报, 2004, 32(12): 1987-1991
- [8] 吴刚. 隐含多项式曲线曲面拟合次数的确定研究[J]. 计算机研究与发展, 2007, 44(1): 148-153
- [9] Sampson P D. Fitting conic section to very scattered data; an interactive improvement of the book stein algorithm[J]. Computer Vision, Graphics, and Image Processing, 1982, 18(1): 97-108
- [10] Keren D, Cooper D. Describing complicated objects by implicit polynomial[J]. IEEE Trans. On PAMI, 1994, 16(1): 38-53
- [11] Taubin G, Cukirman F, Sullivan S, et al. Parameterized families of polynomials for bounded algebraic curve and surface fitting [J]. IEEE Transactions on pattern analysis and machine intelligence, 1994, 16(3): 286-303
- [12] Sullivan S, Sandford L, Ponce J. Using geometric distance fits for 3D object modeling and recognition[J]. IEEE Trans. PAMI, 1994, 16(12): 1183-1196
- [13] Keren D, Gotsman C. Fitting curves and surfaces with constrained implicit polynomials[J]. IEEE Trans. PAMI, 1999, 21(1): 31-41
- [14] Blane M M, Lei Z. The 3L algorithm for fitting implicit polyno-

- mial curves and surfaces to data[J]. IEEE Trans. PAMI, 2000, 22(3): 298-313
- [15] Hezler A, Barzohar M, Malah D. Robust fitting of implicit polynomials with quantized coefficients[C]//Proceedings of the international conference on Pattern Recognition, 2000, 3: 290-293
- [16] Sahin T, Unel M. Globally stabilized 3L curve fitting. Image Analysis and Recognition[M]. Heidelberg: Springer Berlin, 2007; 289-300
- [17] Tasdizen T, Tarel J-P. Improving the stability of algebraic curves for application[J]. IEEE Trans. image processing, 2000, 9(3): 405-416
- [18] Zhu Chun-gang, Wang Ren-hong. Least Squares Fitting of Piecewise Algebraic Curves[J]. Mathematical Problems in Engineering, 2007, 10: 11
- [19] Heizer A, Barzohar M, malah D. Stable fitting of 2D Curves and 3D surfaces by implicit polynomials[J]. IEEE Trans. PAMI, 2004, 26(10): 1283-1294
- [20] Unsalan C. A new robust and fast implicit polynomial fitting technique[C]//Proceedings of MVIIP 1999, 1999, 9: 15-20
- [21] Blane M M, Lei Z. The 3L algorithm for fitting implicit polynomial curves and surfaces to data[J]. IEEE Trans. PAMI, 2000, 22(3): 298-313
- [22] Yalcin H, Unel M, Wolovich W. Implicization of parametric curves by matrix annihilation[J]. International Journal of Computer Vision, 2003, 54: 105-115
- [23] Sener S, Unel M. Affine invariant fitting of algebraic curves using Fourier descriptors[J]. Pattern Analysis Application, 2005, 8: 72-83
- [24] Unsalan C. A new robust and fast implicit polynomial fitting technique[C]//Proceedings of MVIIP 1999, 1999, 9: 15-20
- [25] Guennebaud, Gael, Gross, et al. Algebraic point set surfaces[J]. ACM Transactions on Graphics, 2007, 26(3): 231-239
- [26] Redding N J. Implicit polynomials, orthogonal distance regression, and the closest point on a curve[J]. IEEE Trans. PAMI, 2000, 22(2): 191-199
- [27] Coutinho D F, de Souza C E, Trofino A. Regional stability analysis of implicit polynomial systems[C]//Proceedings of the 45th IEEE Conference on Decision & Control. San Diego, 2006; 13-15
- [28] Zheng B, Takamatsu J, Ikeuchi K. Adaptively determining degrees of implicit polynomial curves and surfaces[C]//ACCV (2). 2007; 189-300
- [29] Diaz P, Sonia. Partial degree formulae for rational algebraic surfaces[C]//Proceedings of the 2005 International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation, 2005; 301-308
- [30] Sahin T, Unel M. Stable Algebraic Surfaces for 3D Object Representation[J]. Journal Math Imaging Vision, 2008, 32: 127-137