

函数 S-粗集, 函数粗集与信息系统规律拆分-合成

史开泉

(山东大学数学与系统科学学院 济南 250100)

摘 要 给出函数单向 S-粗集(function one direction singular rough sets)、函数单向 S-粗集对偶(dual of function one direction singular rough sets)、函数双向 S-粗集(function two direction singular rough sets)与函数粗集(function rough sets)。它们都是把函数概念引入到 S-粗集中,改进 S-粗集得到的。函数粗集是把函数概念引入到 Z. Pawlak 粗集中,改进 Z. Pawlak 粗集得到的。函数单向 S-粗集、函数单向 S-粗集对偶、函数双向 S-粗集是函数 S-粗集的三类形式。给出函数 S-粗集与 S-粗集的关系;给出函数粗集与 Z. Pawlak 粗集的关系;给出函数 S-粗集与函数粗集的关系。利用这些结果,给出函数的区间离散与有限元素集的生成、函数离散-元素集合生成原理;给出函数 S-粗集生成的信息规律、函数等价类动态特性-属性补充与删除原理;给出数据拆分-合成原理、信息规律动态拆分-合成的属性特征;给出信息规律动态拆分-合成不变性原理;利用这些概念与结果,给出信息规律拆分-合成与信息图像嵌入-分离的应用,给出嵌入信息图像的分离-辨识。函数 S-粗集、函数粗集是粗集理论与应用研究中的一个新的研究方向。

关键词 函数 S-粗集,函数粗集,关系定理,信息规律生成,拆分-合成原理,信息图像嵌入,应用

Function S-Rough Sets, Function Rough Sets and Separation-Composition of Law for Information Systems

SHI Kai-quan

(School of Mathematics and System Sciences, Shandong University, Jinan 250100, China)

Abstract Function one direction singular rough, dual of function one direction singular rough sets and function two direction singular rough sets were given. They are three types of forms about function S-rough sets. They came from improved S-rough sets by introducing function concept to S-rough sets. Function rough sets came from improved Z. Pawlak rough sets by introducing function concept to Z. Pawlak rough sets. This paper gave the relation between function S-rough sets and function S-rough sets, the relation between function S-rough sets and Z. Pawlak rough sets, the relation between function S-rough sets and function rough sets. Using these results, this paper presented the generation of the interval discretization for function and finite element set, the principle of function discretization and element generation, the information law which was generated by function S-rough sets, the principle of the dynamic properties for function equivalence class and supplementary and deletion for properties, the separation-composition principle for data, the attribute characteristics of the dynamic separation-composition for information law, the invariance principle of the dynamic separation-composition for information law and so on. Using these concepts and results, the application of the separation-composition for information law, the application of embedment-separation for information images and the separation-identification of embedded information images were given. In short, function S-rough sets and S-rough sets are a new research direction in rough sets.

Keywords Function S-rough sets, Function rough sets, Relation theorem, Information law generation, Separation-Composition principle, Information image embedment, Application

1 引言

本文是文献[1]讨论的继续,因为在文献[1]的 8 节中,给读者留下了一个伏笔:对 Z. Pawlak 粗集、S-粗集的再扩展。

看三个事实:

事实 I. 投资人把资金投放给集团公司 $D = \{d_1, d_2, \dots, d_n\}$, 投资人希望得到投资回报(1月~12月)值 y_i , 把 y_i 写成数据点的形式是: $(1, y_1), (2, y_2), \dots, (12, y_{12})$ 。这里: $y_i \in \mathbf{R}^+$, $d_i \in D$ 是 D 上的第 i 个子公司, $i = 1, 2, \dots, n$ 。

显然,得到投资回报规律(利润曲线),如图 1 所示。

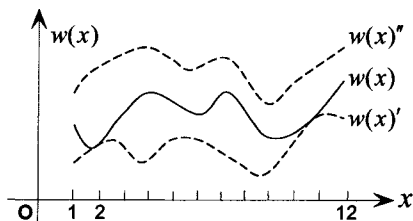


图 1 投资回报(利润)分布规律

图 1 只是投资人的一厢情愿,他希望获得的回报(利润)

本文受山东省自然科学基金项目(Y2007H02)资助。

史开泉 教授,博士生导师,主要研究方向为粗集理论与应用、信息系统与信息识别理论与应用,E-mail: shikq@sdu.edu.cn。

y_i 从 1 月到 12 月越来越大,有这种好事吗? 如果每个投资人都能从投资中获取盈利,那么亏本的生意留给谁? 显然,想这种好事的投资者是幼稚可笑的,是一个非成熟之辈。

一个成熟的投资者要想到这样的问题:1°. 在什么样的条件下,利润规律 $w(x)$ 变成 $w(x)'$, $w(x)' \leq w(x)$? 或者 $w(x) - \nabla w(x) = w(x)'$? 如果出现 $w(x)' \leq w(x)$,如何使得 $\nabla w(x) = 0$, $w(x)' = w(x)$? 2°. 在什么样的条件下,利润规律 $w(x)$ 变成 $w(x)''$, $w(x) \leq w(x)''$? 或者 $w(x) + \Delta w(x) = w(x)''$? 如果出现 $w(x) \leq w(x)''$,如何使得 $\Delta w(x) = 0$, $w(x)'' = w(x)$? 问题 1° 表示“利润低迷”,问题 2° 表示“利润泡沫”。 $w(x)'$, $w(x)''$ 在图 1 中给出表示; $w(x)'$, $w(x)''$ 用虚线表示。这是一个再通俗不过的、能被一般人接受的例子。对于这个事实,我们是否可以用 Z. Pawlak 粗集^[1,2]、S-粗集^[3-11] 给出讨论? 回答是否定的,因为 Z. Pawlak 粗集, S-粗集不具有规律特性。什么是规律? 以系统科学的观点, $[a, b]$ 区间上的函数(连续函数、离散函数)是 $[a, b]$ 区间上的一个规律。

事实 II. 图 2 给出一个二边信息图像 $O(a, w(x)_-, b, w(x)_-)$; 它是一个重要信息图像的子图像; $w(x)_-, w(x)_-$ 是这个子图像的两条曲线边; a 与 b 是 $w(x)_-$ 与 $w(x)_-$ 的两个不同的交点,如图 2 所示。

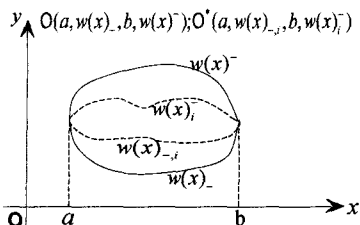


图 2 子图像 $O(a, w(x)_-, b, w(x)_-)$; a, b 是边界曲线 $w(x)_-$ 与 $w(x)_-$ 的交点, $a \neq b$

为了满足应用问题的要求:把子图像 $O(a, w(x)_-, b, w(x)_-)$ 伪装成子图像 $O^*(a, w(x)_-, b, w(x)_-)$, 图 2 中 $O^*(a, w(x)_-, b, w(x)_-)$ 是一个花生形状的子图像, $O^*(a, w(x)_-, b, w(x)_-)$ 用虚线表示。对这个事实,我们是否可以用 Z. Pawlak 粗集^[1,2]、S-粗集^[3-11] 给出讨论? 回答是否定的。把 $O(a, w(x)_-, b, w(x)_-)$ 伪装成 $O^*(a, w(x)_-, b, w(x)_-)$, 使其在信息系统中具有重要的应用空间。

事实 III. 给定区间 $[a, b]$ 上的规律 $w(x)$ ($[a, b]$ 区间上的连续函数 $w(x)$), 如图 3 所示。

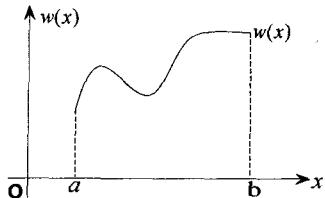


图 3 区间 $[a, b]$ 上连续分布的规律(函数) $w(x)$

人们想知道,规律 $w(x)$ 是由哪些子规律(函数)合成得到的? 反之, $w(x)$ 能够被拆分成几个子规律 $w(x)_i$, $i=1, 2, \dots, n$? 如果用数学的语言表达是:什么样的子函数 $w(x)_i$ 合成之后得到函数 $w(x)$? 反之,函数 $w(x)$ 能够被分离成什么样的子函数 $w(x)_i$? 对这个事实,我们是否可以用 Z. Pawlak 粗集^[1,2]、S-粗集^[3-11] 给出讨论? 回答也是否定的。

面对应用问题的挑战与发难,需要寻求一个新的粗集结

构,来回应实际问题的挑战。

1982 年, Z. Pawlak 教授提出粗集^[2], 给出粗集的数学结构,这一原创性的工作,填补了经典数学理论中的一块“空白”,给应用数学工作者提供了一个新的数学工具。因为信息系统具有动态特性,利用 Z. Pawlak 粗集研究具有动态特性的信息系统遇到了困难;2002 年,文献[3]把动态特性引入到 Z. Pawlak 粗集中,改进了 Z. Pawlak 粗集,提出 S-粗集(singular rough sets),给出 S-粗集的三类形式:单向 S-粗集、单向 S-粗集对偶与双向 S-粗集, S-粗集扩充了 Z. Pawlak 粗集的应用空间。文献[3-11]给出 S-粗集的诸多特性与应用。利用 S-粗集讨论前面给出的三个事实遇到了困难;因此,必须对 S-粗集进行再改进;这些改进是:把函数的概念引入到 S-粗集中,改进 S-粗集,提出函数 S-粗集^[12],把函数的概念引入到 Z. Pawlak 粗集中,改进 Z. Pawlak 粗集,提出函数粗集^[12];这些工作又扩充了 Z. Pawlak 粗集的应用空间^[12-23]。

下面给出文献[1]的继续讨论。

2 函数单向 S-粗集(function one direction singular rough sets)

约定 在 2-11 节的讨论中, $D(x)$ 是一个有限函数论域, $Q(x) = \{u(x)_1, u(x)_2, \dots, u(x)_m\} \subset D(x)$ 是 $D(x)$ 上有限函数集, $u(x), v(x)$ 是 x 的函数, $[u(x)]$ 是函数等价类, R 是 $D(x)$ 上的等价关系;为了简单, $D(x), Q(x), u(x), v(x)$ $[u(x)]$, 简单记作 $D, Q, u, v[u]$;不引起误解。

给定函数集 $Q = \{u_1, u_2, \dots, u_m\} \subset D$, 称 Q^* 是 Q 的单向 S-函数集(one direction singular function sets), 如果

$$Q^* = Q \cup \{v | v \in D, v \in Q, f(v) = u \in Q\} \quad (1)$$

Q^* 称作 Q 的 f -扩张, 而且

$$Q^* = \{v | v \in D, v \in Q, f(v) = u \in Q\} \quad (2)$$

称 $(R, F)_o(Q^*)$ 是 $Q^* \subset D$ 的下近似, 如果

$$(R, F)_o(Q^*) = \bigcup [u] = \{u | u \in D, [u] \subseteq Q^*\} \quad (3)$$

称 $(R, F)^o(Q^*)$ 是 $Q^* \subset D$ 的上近似, 如果

$$(R, F)^o(Q^*) = \bigcup [u] = \{u | u \in D, [u] \cap Q^* \neq \emptyset\} \quad (4)$$

由 $(R, F)_o(Q^*)$ 与 $(R, F)^o(Q^*)$ 构成的函数集合对, 称作 $Q^* \subset D$ 的函数单向 S-粗集, 如果

$$((R, F)_o(Q^*), (R, F)^o(Q^*)) \quad (5)$$

$\text{BnR}(Q^*)$ 称作 $Q^* \subset D$ 的 R -边界, 如果

$$\text{BnR}(Q^*) = (R, F)^o(Q^*) - (R, F)_o(Q^*) \quad (6)$$

$\text{As}(Q^*)$ 称作函数单向 S-粗集生成的副集合, 如果

$$\text{As}(Q^*) = \{u | v \in D, v \in Q, f(v) = u \in Q\} \quad (7)$$

其中, 1°. 式(1), 式(2), 式(7)中的 $f \in F$ 是函数迁移^[1,3-23], $F = \{f_1, f_2, \dots, f_m\}$ 是函数迁移族^[1,3-23]; $f \in F$ 的特征是: $\exists v \in D, v \in Q, f \in F$ 把 v 变成 $f(v) = u, f(v) = u \in Q$; $f \in F$ 在具体应用问题中, 是一个给定的函数(变换)。

2°. 式(7)中的一个特别记号“ $\in$ ”, 它表示不在 Q 内的函数 v, v 在 $f \in F$ 的作用下, v 变成 $f(v) = u, f(v) = u$ 不被完全迁入到 Q 内; $f(v)$ 与 Q 的关系满足特征函数: $0 < \chi_Q^{(f(v))} < 1$; 式(2)中表示 $f(v) = u$ 被完全迁入到 Q 内, $f(v)$ 与 Q 的关系满足特征函数: $\chi_Q^{(f(v))} = 1$ 。

3°. 式(3), 式(4)中, $[u]$ 是一个函数等价类, 图 4 给出函数等价类 $[u]$ 的直观概念。

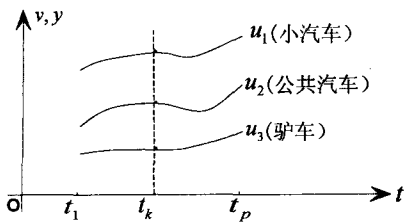


图4 具有共同属性 v (速度 v) 的车辆的车速 u_1, u_2, u_3 ; u_1, u_2, u_3 关于属性 v 构成函数等价类 $[u]_v = \{u_1, u_2, u_3\}$

图4给出马路上行驶的小汽车、公共汽车、驴车;它们分别具有速度曲线 u_1, u_2, u_3 (函数 u_1, u_2, u_3);因为 u_1, u_2, u_3 具有属性“ v =速度”,则 u_1, u_2, u_3 构成函数等价类 $[u]_v = \{u_1, u_2, u_3\}$ 。显然, $u_3 \leq u_2 \leq u_1$, 驴车行驶得最慢;因为若 $t_k \in [t_1, t_p]$, 由图4得到: u_3 在 t_k 的速度值 $u_3^{(t_k)}$, u_2 在 t_k 的速度值 $u_2^{(t_k)}$, u_1 在 t_k 的速度值 $u_1^{(t_k)}$, 满足: $u_3^{(t_k)} \neq u_2^{(t_k)} \neq u_1^{(t_k)}$; 在 t_k (属性)的条件下, 函数等价类 $[u]_v = \{u_1, u_2, u_3\}$ 变成 $[u]_{t_k} = \{u_1\}, [u]_{t_k} = \{u_2\}, [u]_{t_k} = \{u_3\}$; 或者, 在 t_k (属性)条件下, u_1, u_2, u_3 各自成类: $\{u_1\}, \{u_2\}, \{u_3\}$ 。

从式(1), 式(2)容易得到: D 中的元素 $v \in D, v \in Q$, 不断地被 $f \in F$ 迁移到 Q 内, 或 $f(v) = u \in Q$, Q 具有了动态特性, Q 变成 Q^* ; 因此, 式(5)变成一个函数集合对族, 而且

$$\{((R, F)_0(Q^*)_i, (R, F)^0(Q^*)_j) | i \in I, j \in J\} \quad (8)$$

式(8)是函数单向 S -粗集的函数集合对族的表达形式; I, J 是指标集。

式(8)指出: 因为 Q^* 具有单向动态特性, 所以函数单向 S -粗集是一串函数集合对。

3 函数单向 S -粗集对偶(dual of function one direction singular rough sets)

给定函数集 $Q = \{u_1, u_2, \dots, u_m\} \subset D$, 称 Q' 是 Q^* 的单向 S -函数集对偶(dual of one direction singular function sets), 如果

$$Q' = Q - \{u | u \in Q, \bar{f}(u) = v \in Q\} \quad (9)$$

Q' 称作 Q 的 $\bar{f}$ -萎缩, 而且

$$\bar{Q}' = \{u | u \in Q, \bar{f}(u) = v \in Q\} \quad (10)$$

式中, $Q' \neq \emptyset$ 。

称 $(R, \bar{F})_0(Q')$ 是 $Q' \subset D$ 的下近似, 如果

$$(R, \bar{F})_0(Q') = \bigcup [u] = \{u | u \in D, [u] \subseteq Q'\} \quad (11)$$

称 $(R, \bar{F})^0(Q')$ 是 $Q' \subset D$ 的上近似, 如果

$$(R, \bar{F})^0(Q') = \bigcup [u] = \{u | u \in D, [u] \cap Q' \neq \emptyset\} \quad (12)$$

由 $(R, \bar{F})_0(Q')$ 与 $(R, \bar{F})^0(Q')$ 构成的函数集合对, 称作 $Q' \subset D$ 的函数单向 S -粗集对偶, 如果

$$((R, \bar{F})_0(Q'), (R, \bar{F})^0(Q')) \quad (13)$$

$BnR(Q')$ 称作 $Q' \subset D$ 的 R -边界, 如果

$$BnR(Q') = (R, \bar{F})^0(Q') - (R, \bar{F})_0(Q') \quad (14)$$

$As(Q')$ 称作函数单向 S -粗集对偶生成的副集合, 如果

$$As(Q') = \{u | u \in Q, \bar{f}(u) = v \in Q\} \quad (15)$$

其中, 1°. 式(9), 式(10), 式(15)中的 $\bar{f} \in \bar{F}$ 是函数迁移^[1, 3-23], $\bar{F} = \{\bar{f}_1, \bar{f}_2, \dots, \bar{f}_m\}$ 是函数迁移族^[1, 3-23]; $\bar{f} \in \bar{F}$ 的特征是: $\exists u \in Q, \bar{f} \in \bar{F}$ 把 u 变成 $\bar{f}(u) = v \in Q$; $\bar{f} \in \bar{F}$ 在具体应用问题中, 是一个给定的函数(变换)。

2°. 式(15)中有一个特别记号“ $\in$ ”, 它表示在 Q 内的函数

u, u 在 $\bar{f} \in \bar{F}$ 的作用下, u 变成 $\bar{f}(u) = v, \bar{f}(u) = v$ 不被完全迁出到 Q 外; $\bar{f}(u)$ 与 Q 的关系满足特征函数: $-1 < \chi_Q^{\bar{f}(u)} < 0$; 式(10)中表示, $\bar{f}(u) = v$ 被完全迁出到 Q 外, $\bar{f}(u)$ 与 Q 的关系满足特征函数: $\chi_Q^{\bar{f}(u)} = -1$ 。

从式(9), 式(10)容易得到: Q 中的元素 $u \in Q$, 不断地被 $\bar{f} \in \bar{F}$ 迁移到 Q 外, 或 $\bar{f}(u) = v \in Q$, Q 具有了动态特性, Q 变成 Q' ; 因此, 式(13)变成一个函数集合对族, 而且

$$\{((R, \bar{F})_0(Q')_i, (R, \bar{F})^0(Q')_j) | i \in I, j \in J\} \quad (16)$$

式(16)是函数单向 S -粗集对偶的函数集合对族的表达形式; I, J 是指标集。

式(16)指出: 因为 Q' 具有单向动态特性, 所以函数单向 S -粗集对偶是一串函数集合对。

在2节中, Q^* 是函数集 Q 中被不断补充元素(函数 u)得到的; 或者, Q^* 具有向外扩张的特性(单向动态性); 在3节中, Q' 是函数集 Q 中被不断删除元素(函数 u)得到的, $Q' \neq \emptyset$; 或者, Q' 具有向内收缩的特性(单向动态性)。若 Q 中不断补充元素, 同时 Q 中不断删除元素, Q 具有双向动态性, 则函数单向 S -粗集, 函数单向 S -粗集对偶变成函数双向 S -粗集, 4节中给出函数双向 S -粗集。

4 函数双向 S -粗集(function two direction singular rough sets)

给定函数集 $Q = \{u_1, u_2, \dots, u_m\} \subset D$, 称 Q^* 是 Q 的双向 S -函数集(two direction singular function sets), 如果

$$Q^* = Q' \cup \{v | v \in D, v \in Q, f(v) = u \in Q\} \quad (17)$$

$$Q' = Q - \{u | u \in Q, \bar{f}(u) = v \in Q\} \quad (18)$$

式中, $Q' \neq \emptyset$; $Q' = \{v | v \in D, v \in Q, f(v) = u \in Q\}$, $\bar{Q}' = \{u | u \in Q, \bar{f}(u) = v \in Q\}$ 。

称 $(R, F)_0(Q^*)$ 是 $Q^* \subset D$ 的下近似, 如果

$$(R, F)_0(Q^*) = \bigcup [u] = \{u | u \in D, [u] \subseteq Q^*\} \quad (19)$$

称 $(R, F)^0(Q^*)$ 是 $Q^* \subset D$ 的上近似, 如果

$$(R, F)^0(Q^*) = \bigcup [u] = \{u | u \in D, [u] \cap Q^* \neq \emptyset\} \quad (20)$$

由 $(R, F)_0(Q^*)$ 与 $(R, F)^0(Q^*)$ 构成的函数集合对, 称作 $Q^* \subset D$ 的函数双向 S -粗集, 如果

$$((R, F)_0(Q^*), (R, F)^0(Q^*)) \quad (21)$$

$BnR(Q^*)$ 称作 $Q^* \subset D$ 的 R -边界, 如果

$$BnR(Q^*) = (R, F)^0(Q^*) - (R, F)_0(Q^*) \quad (22)$$

$As(Q^*)$ 称作函数双向 S -粗集生成的副集合, 如果

$$As(Q^*) = \{u | v \in D, v \in Q, f(v) = u \in Q \text{ and } u \in Q, \bar{f}(u) = v \in Q\} \quad (23)$$

在式(19)–式(22)中, $F = F \cup \bar{F}$; $F = \{f_1, f_2, \dots, f_m\}$ 是函数迁移族^[3-23]; $\bar{F} = \{\bar{f}_1, \bar{f}_2, \dots, \bar{f}_m\}$ 是函数迁移族^[3-23]。

由式(17), 式(18)容易得到: Q 之外的函数 u 不断地被补充到 Q 内, Q 内的另一些函数 u 不断地从 Q 内被删除, Q 变成 Q^* ; Q^* 具有双向动态特性, 因此, 式(21)变成一个函数集合对族, 而且

$$\{((R, F)_0(Q^*)_i, (R, F)^0(Q^*)_j) | i \in I, j \in J\} \quad (24)$$

式(24)是函数双向 S -粗集的函数集合对族的表达形式; I, J 是指标集。

式(24)指出: 因为 Q^* 具有双向动态特性, 所以函数双向 S -粗集是一串函数集合对。

利用2节中的式(1)–式(5), 式(9)–式(13)与3节中

的式(17)一式(21)容易得到:

定理 1(函数单向 S-粗集与函数双向 S-粗集第一关系定理) 若 $F=F \cup \bar{F}=F$, 则函数双向 S-粗集退化成函数单向函数 S-粗集, 或者

$$((R, F)_o(Q^*), (R, F)^o(Q^*))_{F=F} = ((R, F)_o(Q^*), (R, F)^o(Q^*)) \quad (25)$$

证明:事实上, $F=F \cup \bar{F}=F$, 则 $\bar{F}=\phi$, 式(18): $Q^*=Q, \{u|u \in Q, \bar{f}(u)=v \in Q\}=\phi$; 式(17): $Q^*=Q' \cup \{v|v \in D, v \in Q, f(v)=u \in Q\}=Q \cup \{v|v \in D, v \in Q, f(v)=u \in Q\}=Q^*$; 或者式(17)变成式(1): $Q^*=Q^*$. 因此, 式(19): $(R, F)_o(Q^*)=\bigcup [u]=\{u|u \in D, [u] \subseteq Q^*\}=\{u|u \in D, [u] \subseteq Q^*\}=\bigcup [u]=(R, F)_o(Q^*)$; 式(20): $(R, F)^o(Q^*)=\bigcup [u]=\{u|u \in D, [u] \cap Q^* \neq \phi\}=\{u|u \in D, [u] \cap Q \neq \phi\} \cup [u]=(R, F)^o(Q^*)$, 得到式(25)。

推论 1 若 $F=F \cup \bar{F}=F$, 则

$$(R, F)_o(Q^*)=(R, F)_o(Q^*) \quad (26)$$

推论 2 若 $F=F \cup \bar{F}=F$, 则

$$(R, F)^o(Q^*)=(R, F)^o(Q^*) \quad (27)$$

定理 2(函数单向 S-粗集与函数双向 S-粗集第二关系定理) 若 $F=F \cup \bar{F}=F$, 则

$$\{((R, F)_o(Q^*)_i, (R, F)^o(Q^*)_j) | i \in I, j \in J\}_{F=F} = \{((R, F)_o(Q^*)_i, (R, F)^o(Q^*)_j) | i \in I, j \in J\} \quad (28)$$

由定理 1, 2, 推论 1, 2 得到:

命题 1 函数双向 S-粗集是函数单向 S-粗集的一般形式, 函数单向 S-粗集是函数双向 S-粗集的特例。

定理 3(函数单向 S-粗集对偶与函数双向 S-粗集第一关系定理) 若 $F=F \cup \bar{F}=F$, 则函数双向 S-粗集退化成函数单向 S-粗集对偶, 或者

$$((R, F)_o(Q^*), (R, F)^o(Q^*))_{F=F} = ((R, \bar{F})_o(Q'), (R, \bar{F})^o(Q')) \quad (29)$$

证明:事实上, $F=F \cup \bar{F}=\bar{F}$, 则 $F=\phi$, 式(17): $Q^*=Q' \cup \{v|v \in D, v \in Q, f(v)=u \in Q\}=Q'; \{v|v \in D, v \in Q, f(v)=u \in Q\}=\phi$; 或者 Q^* 变成式(18): $Q^*=Q-\{u|u \in Q, \bar{f}(u)=v \in Q\}$. 因此, 式(19): $(R, F)_o(Q^*)=\bigcup [u]=\{u|u \in D, [u] \subseteq Q^*\}=\{u|u \in D, [u] \subseteq Q'\}=\bigcup [u]=(R, \bar{F})_o(Q')$; 式(20): $(R, F)^o(Q^*)=\bigcup [u]=\{u|u \in D, [u] \cap Q^* \neq \phi\}=\{u|u \in D, [u] \cap Q' \neq \phi\}=\bigcup [u]=(R, \bar{F})^o(Q')$, 得到式(29)。

推论 4 若 $F=F \cup \bar{F}=\bar{F}$, 则

$$(R, F)_o(Q^*)=(R, \bar{F})_o(Q') \quad (30)$$

推论 5 若 $F=F \cup \bar{F}=\bar{F}$, 则

$$(R, F)^o(Q^*)=(R, \bar{F})^o(Q') \quad (31)$$

定理 4(函数单向 S-粗集对偶与函数双向 S-粗集第二关系定理) 若 $F=F \cup \bar{F}=\bar{F}$, 则

$$\{((R, F)_o(Q^*)_i, (R, F)^o(Q^*)_j) | i \in I, j \in J\}_{F=F} = \{((R, \bar{F})_o(Q')_i, (R, \bar{F})^o(Q')_j) | i \in I, j \in J\} \quad (32)$$

由定理 3, 4, 推论 3, 4 得到:

命题 2 函数双向 S-粗集是函数单向 S-粗集对偶的一般形式, 函数单向 S-粗集对偶是函数双向 S-粗集的特例。

从 2-4 节的讨论中得到: 函数单向 S-粗集、函数单向 S-粗集对偶具有动态特性(单向动态特性), 函数双向 S-粗集具有动态特性(双向动态特性), 如果把动态特性从函数单向 S-粗集、函数单向 S-粗集对偶、函数双向 S-粗集中抽掉, 则有 5

节中的讨论。

5 函数粗集(function rough sets)

给定函数集 $Q=\{u_1, u_2, \dots, u_m\} \subset D$, 称 $R_-(Q)$ 是 $Q \subset D$ 的下近似, 如果

$$R_-(Q)=\bigcup [u]=\{u|u \in D, [u] \subseteq Q\} \quad (33)$$

称 $R^-(Q)$ 是 $Q \subset D$ 的上近似, 如果

$$R^-(Q)=\bigcup [u]=\{u|u \in D, [u] \cap Q \neq \phi\} \quad (34)$$

由 $R_-(Q)$ 与 $R^-(Q)$ 构成的函数集合对, 称作 $Q \subset D$ 的函数粗集, 如果

$$(R_-(Q), R^-(Q)) \quad (35)$$

$BnR(Q)$ 称作 $Q \subset D$ 的 R-边界, 如果

$$BnR(Q)=R^-(Q)-R_-(Q) \quad (36)$$

应当指出:

1°. 从式(33)一式(36)容易看到: 函数粗集 $(R_-(Q), R^-(Q))$ 的本质是: 用函数等价类 $[u]$ 代替 Z. Pawlak 粗集 $(R_-(X), R^-(X))$ 中的元素等价类 $[x]$, 改进 Z. Pawlak 粗集, 得到的一个数学结构; 函数粗集与 Z. Pawlak 粗集具有一个共同特性: 静态性。函数粗集具有规律(函数)特性, Z. Pawlak 粗集不具有规律(函数)特征; 显然, 函数粗集比 Z. Pawlak 粗集具有更大的应用空间。

2°. 因为函数粗集具有静态特性, 函数粗集的结构只是一个函数集合对: $(R_-(Q), R^-(Q))$; 函数粗集不具有函数集合对族的形式。

6 函数 S-粗集与函数粗集关系定理

定理 5(函数单向 S-粗集与函数粗集第一关系定理) 若 $F=\phi$, 则函数单向 S-粗集退化成函数粗集, 或者

$$((R, F)_o(Q^*), (R, F)^o(Q^*))_{F=\phi} = (R_-(Q), R^-(Q)) \quad (37)$$

证明:事实上, 若 $F=\phi$, 则式(1): $Q^*=Q \cup \{v|v \in D, v \in Q, f(v)=u \in Q\}=Q, \{v|v \in D, v \in Q, f(v)=u \in Q\}=\phi$, 得到式(37)。

定理 6(函数单向 S-粗集对偶与函数粗集第一关系定理) 若 $\bar{F}=\phi$, 则函数单向 S-粗集对偶退化成函数粗集, 或者

$$((R, \bar{F})_o(Q'), (R, \bar{F})^o(Q'))_{\bar{F}=\phi} = (R_-(Q), R^-(Q)) \quad (38)$$

证明:事实上, 若 $\bar{F}=\phi$, 则式(9): $Q^*=Q-\{u|u \in Q, \bar{f}(u)=v \in Q\}=Q, \{v|v \in D, v \in Q, \bar{f}(u)=v \in Q\}=\phi$, 得到式(38)。

定理 7(函数双向 S-粗集与函数粗集第一关系定理) 若 $F=F \cup \bar{F}=\phi$, 则函数双向 S-粗集退化成函数粗集, 或者

$$((R, F)_o(Q^*), (R, F)^o(Q^*))_{F=\phi} = (R_-(Q), R^-(Q)) \quad (39)$$

证明:事实上, $F=\phi$, 或者 $F=F \cup \bar{F}=\phi$, 或者 $F=\phi, \bar{F}=\phi$; 式(17), 式(18): $Q^*=Q' \cup \{v|v \in D, v \in Q, f(v)=u \in Q\}=Q-\{u|u \in Q, \bar{f}(u)=v \in Q\} \cup \{v|v \in D, v \in Q, f(v)=u \in Q\}=Q$, 其中, $\{u|u \in Q, \bar{f}(u)=v \in Q\}=\phi, \{v|v \in D, v \in Q, u \in Q\}=\phi$, 得到式(39)。

定理 8(函数单向 S-粗集与函数粗集第二关系定理) 若 $F=F \cup \bar{F}=\phi$, 则

$$\{((R, F)_o(Q^*)_i, (R, F)^o(Q^*)_j) | i \in I, j \in J\}_{F=\phi} = (R_-(Q), R^-(Q)) \quad (40)$$

定理 9(函数单向 S-粗集对偶与函数粗集第二关系定理)
若 $F = F \cup \bar{F} = \phi$, 则

$$\{((R, \bar{F})_o(Q')_i, (R, \bar{F})^o(Q')_j) \mid i \in I, j \in J\}_{F=\phi} = (R_-(Q), R^-(Q)) \quad (41)$$

定理 10(函数双向 S-粗集与函数粗集第二关系定理)
若 $F = F \cup \bar{F} = \phi$, 则

$$\{((R, F)_o(Q^*)_i, (R, F)^o(Q^*)_j) \mid i \in I, j \in J\}_{F=\phi} = (R_-(Q), R^-(Q)) \quad (42)$$

式中, $F = F \cup \bar{F} = \phi$.

由定理 5—定理 10, 得到:

命题 3 在静态-动态条件下, 函数单向 S-粗集是函数粗集的一般形式; 函数粗集是函数单向 S-粗集的特例。

命题 4 在静态-动态条件下, 函数单向 S-粗集对偶是函数粗集的一般形式; 函数粗集是函数单向 S-粗集对偶的特例。

命题 5 在静态-动态条件下, 函数双向 S-粗集是函数粗集的一般形式; 函数粗集是函数双向 S-粗集对偶的特例。

把文献[1,2]中的 Z. Pawlak 粗集引入到 7 节中得到函数粗集与 Z. Pawlak 粗集的关系。

7 函数粗集与 Z. Pawlak 粗集的关系

为了讨论的方便, 先给出一个概念。

函数的区间离散与有限元素集生成

给定函数等价类 $[u]$:

$$[u] = \{u_1, u_2, \dots, u_m\} \quad (43)$$

在不引起误解的情况下, 把 $[u]$ 写成一个有限函数集 u , 而且

$$[u] = \{u_1, u_2, \dots, u_m\} \quad (44)$$

$\forall u_i \in [u]$ 是 $[a, b]$ 区间上的连续(离散)函数; 在 $[a, b]$ 上取点 $k \in [a, b]$, 则得到 $u_1, u_2, \dots, u_m$ 在点 k 的函数值

$$y_{1,k}, y_{2,k}, \dots, y_{m,k} \quad (45)$$

$\forall y_{i,k} \in \mathbf{R}$, $\mathbf{R}$ 是实数集; $i = 1, 2, \dots, m; k \in [a, b]$ 。若用元素 $x_{1,k}, x_{1,k}, x_{2,k}, \dots, x_{m,k}$ 代替 $y_{1,k}, y_{2,k}, \dots, y_{m,k}$, 不计 $y_{i,k}$ 之值, 则有有限元素集 X , 而且

$$X = \{x_{1,k}, x_{2,k}, \dots, x_{m,k}\} = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}_{k \in [a,b]} \quad (46)$$

由式(43)—式(46)得到:

函数离散-元素集合生成原理

有限函数集 $u = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ 在给定 $k \in [a, b]$ 的条件下, 唯一对应一个有限元素集 $X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}_{k \in [a,b]}$, X 是 u 的生成; 有限元素集 $X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ 在所有 $k_i \in [a, b]$ 的条件下, 唯一对应一个有限函数集 $u = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$, u 是 X 的反生成, $i = 1, 2, \dots, m$ 。

由 5 节中的函数粗集与文献[1,2]中的 Z. Pawlak 粗集得到:

定理 11(函数粗集与 Z. Pawlak 粗集关系定理) 函数粗集与 Z. Pawlak 粗集满足

$$(R_-(Q), R^-(Q))_{k \in [a,b]} = (R_-(X), R^-(X)) \quad (47)$$

的充分必要条件是: 有限元素集 $X \subset U$ 是有限函数集 $Q \subset D$ 的生成。

证明: 由式(43)—式(46)直接得到, 证明留给读者。

命题 6 给定 $k \in [a, b]$, 函数粗集退化成 Z. Pawlak 粗集。

命题 7 Z. Pawlak 粗集是函数粗集的离散形式。

把文献[1,3-11]中的 S-粗集引入到 8 节中, 得到函数 S-粗集与 S-粗集的关系。

8 函数 S-粗集与 S-粗集的关系

定理 12(函数单向 S-粗集与单向 S-粗集第一关系定理)
函数单向 S-粗集与单向 S-粗集满足

$$((R, F)_o(Q^*), (R, F)^o(Q^*))_{k \in [a,b]} = ((R, F)_o(X^*), (R, F)^o(X^*)) \quad (48)$$

的充分必要条件是: 有限元素集 $X^* \subset U$ 是有限函数集 $Q^* \subset D$ 的单向动态生成。

定理 13(函数单向 S-粗集对偶与单向 S-粗集对偶第一关系定理) 函数单向 S-粗集对偶与单向 S-粗集对偶满足

$$((R, \bar{F})_o(Q'), (R, \bar{F})^o(Q'))_{k \in [a,b]} = ((R, \bar{F})_o(X'), (R, \bar{F})^o(X')) \quad (49)$$

的充分必要条件是: 有限元素集 $X' \subset U$ 是有限函数集 $Q' \subset D$ 的单向动态生成。

定理 14(函数双向 S-粗集与双向 S-粗集第一关系定理)
函数双向 S-粗集与双向 S-粗集满足

$$((R, F)_o(Q^*), (R, F)^o(Q^*))_{k \in [a,b]} = ((R, F)_o(X^*), (R, F)^o(X^*)) \quad (50)$$

的充分必要条件是: 有限元素集 $X^* \subset U$ 是有限函数集 $Q^* \subset D$ 的双向动态生成。

定理 15(函数单向 S-粗集与单向 S-粗集第二关系定理)
若 $k \in [a, b]$, 则

$$\{((R, F)_o(Q^*)_i, (R, F)^o(Q^*)_j) \mid i \in I, j \in J\}_{k \in [a,b]} = ((R, F)_o(X^*), (R, F)^o(X^*)) \quad (51)$$

定理 16(函数单向 S-粗集对偶与单向 S-粗集对偶第二关系定理) 若 $k \in [a, b]$, 则

$$\{((R, \bar{F})_o(Q')_i, (R, \bar{F})^o(Q')_j) \mid i \in I, j \in J\}_{k \in [a,b]} = ((R, \bar{F})_o(X'), (R, \bar{F})^o(X')) \quad (52)$$

定理 17(函数双向 S-粗集与双向 S-粗集第二关系定理)
若 $k \in [a, b]$, 则

$$\{((R, F)_o(Q^*)_i, (R, F)^o(Q^*)_j) \mid i \in I, j \in J\}_{k \in [a,b]} = ((R, F)_o(X^*), (R, F)^o(X^*)) \quad (53)$$

定理 12—定理 17 的证明留给对此感兴趣的读者, 这些证明是简单而且直接的。

命题 8 给定 $k \in [a, b]$, 函数单向 S-粗集退化成单向 S-粗集。

命题 9 单向 S-粗集是函数单向 S-粗集的离散形式。

命题 10 给定 $k \in [a, b]$, 函数单向 S-粗集对偶退化成单向 S-粗集对偶。

命题 11 单向 S-粗集对偶是函数单向 S-粗集对偶的离散形式。

命题 12 给定 $k \in [a, b]$, 函数双向 S-粗集对偶退化成双向 S-粗集。

命题 13 双向 S-粗集是函数双向 S-粗集的离散形式。

应当给出一些说明:

1°. 本文在引言中给出的三个事实引出一个共同的话题: 用一个什么样的新数学工具(数学模型), 去寻找信息系统中的信息规律, 这个规律是人们事先不知道的。例如, $w(x)$ 是一个利润分布规律, 当金融危机袭来时, $w(x)$ 将变成什么? 在金融危机袭来之前, $w(x)$ 将变成什么, 人们并不知道。显

然,要用一个具有规律特征的新数学工具(数学模型)来讨论这个话题。是否可以用 Z. Pawlak 粗集、S-粗集来讨论这个话题?显然不行,因为 Z. Pawlak 粗集、S-粗集不具有规律特征。或者一些读者对此提出:概率论、随机过程、微分方程可以用来讨论这个话题,这个想法是正确的。我们应当看到:这三个工具(数学模型)都是陈旧的,是路人皆知的方法;用这三个工具讨论这个话题,给出的研究结果随时都可以找到。

2°. 若使用新工具:粗集模型讨论这个话题,必须对 Z. Pawlak 粗集、S-粗集给予改进,使 Z. Pawlak 粗集、S-粗集具有规律特征。在这样的框架下,把函数(规律)概念引入,交叉到 Z. Pawlak 粗集、S-粗集中,改进 Z. Pawlak 粗集、S-粗集,提出具有规律特征的粗集:函数 S-粗集^[12]、函数粗集^[12];本文 2—5 节的讨论给出了这个学术思想。函数 S-粗集(函数单向 S-粗集、函数双向 S-粗集对偶、函数双向 S-粗集),具有动态特性、规律特性;函数粗集具有静态特性、规律特性;年轻的学子们,或许从 1°与 2°或文献[12-23]中悟出的更多;或许能够看到一个新的思想方法的重要性。

利用 2—8 节的讨论,从 9 节开始逐步进入函数 S-粗集、函数粗集的一些应用,这些应用具有原则性、启发性;从应用中,再认识函数 S-粗集、函数粗集;在这个往返过程中,或许读者比作者得到的更多。

9 函数 S-粗集生成的信息规律

为了讨论的方便,容易接受本节给出的结果,在本节讨论之前,先给出两个概念。

函数等价类动态特性-属性补充与删除原理

给定函数等价类 $[u] = \{u_1, u_2, \dots, u_q\}$, $\alpha = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k\}$ 是 $[u]$ 的属性集,若对 α 给予属性补充,或者

$$\alpha^F = \alpha \cup \{\alpha' \mid \beta \in V, \beta \in \alpha, f(\beta) = \alpha' \in \alpha\} \quad (54)$$

则具有属性集 α^F 的函数等价类是

$$[u]^F = \{u_1, u_2, \dots, u_p\} \quad (55)$$

式中, $p \leq q$, $[u]^F \neq \emptyset$ 。

显然,函数等价类 $[u]$, $[u]^F$ 满足 $[u]^F \subseteq [u]$; 因为 $[u]$ 的属性集 α 内被补充部分属性,使得 $[u]$ 内的某些元素(函数)被删除, $[u]$ 变成 $[u]^F$ 。

若对 α 给予属性删除,或者

$$\alpha^F = \alpha - \{\beta_i \mid \alpha_i \in \alpha, f(\alpha_i) = \beta_i \in \alpha\} \quad (56)$$

则具有属性集 α^F 的函数等价类是

$$[u]^F = \{u_1, u_2, \dots, u_r\} \quad (57)$$

式中, $q \leq r$, $\alpha^F \neq \emptyset$ 。

显然,函数等价类 $[u]$, $[u]^F$ 满足 $[u] \subseteq [u]^F$; 因为 $[u]$ 的属性集 α 内被删除部分属性,使得 $[u]$ 内被补充某些元素(函数), $[u]$ 变成 $[u]^F$ 。

数据拆分-合成原理

给定有限数据集 y

$$y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\} \quad (58)$$

存在有限个子数据集 y_i , $i=1, 2, \dots, m$; 而且

$$y_i = \{y_{i,1}, y_{i,2}, \dots, y_{i,n}\} \quad (59)$$

y_i 是 y 的一个拆分; y 与 y_i 满足

$$y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\} = \left\{ \sum_{i=1}^m y_{i,1}, \sum_{i=1}^m y_{i,2}, \dots, \sum_{i=1}^m y_{i,n} \right\} \quad (60)$$

式(59)中的 y_i 是式(58)中的一个拆分; 式(60)中的 $\left\{ \sum_{i=1}^m y_{i,1}, \right.$

$\sum_{i=1}^m y_{i,2}, \dots, \sum_{i=1}^m y_{i,n}$ 是式(58) y 的一个合成。

式中, $y_k, y_{i,k} \in \mathbf{R}$, $\mathbf{R}$ 是实数集, $k=1, 2, \dots, n$; $i=1, 2, \dots, m$ 。

$\alpha^F = \alpha \cup \{\alpha' \mid \beta \in V, \beta \in \alpha, f(\beta) = \alpha' \in \alpha\}$ 的意义

式(54): $\alpha^F = \alpha \cup \{\alpha' \mid \beta \in V, \beta \in \alpha, f(\beta) = \alpha' \in \alpha\}$ 具有动态特性: 取 $\beta_1 \in V, \beta_1 \in \alpha, f \in F$ 把 β_1 变成 $f(\beta_1) = \alpha'_1 \in \alpha$, 则有 $\alpha^F = \alpha \cup \{\alpha'_1 \mid \beta_1 \in V, \beta_1 \in \alpha, f(\beta_1) = \alpha'_1 \in \alpha\} = \alpha \cup \{\alpha'_1\} = \{\alpha, \alpha'_1\}$; 令式(54)中的 $\alpha = \alpha^F$, 取 $\beta_2, \beta_3 \in V, \beta_2, \beta_3 \in \alpha, f \in F$ 把 β_2, β_3 变成 $f(\beta_2) = \alpha'_2 \in \alpha, f(\beta_3) = \alpha'_3 \in \alpha$, 则有 $\alpha^F = \alpha \cup \{\alpha' \mid \beta \in V, \beta \in \alpha, f(\beta) = \alpha' \in \alpha\} = \alpha^F \cup \{\alpha' \mid \beta \in V, \beta \in \alpha, f(\beta) = \alpha' \in \alpha\} = \{\alpha, \alpha'_1\} \cup \{\alpha'_2, \alpha'_3\} = \{\alpha, \alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3\}$; 如此等等。显然, $\alpha \subseteq \alpha^F \subseteq \alpha^F$ 。因为 $\alpha \subseteq \alpha^F \subseteq \alpha^F$, 具有属性集 $\alpha, \alpha^F, \alpha^F$ 的函数等价类 $[u]$, $[u]^F, [u]^F$ 具有了动态特性, 而且 $[u]^F \subseteq [u]^F \subseteq [u]$, 动态特性潜藏在式(55)中。2 节中的式(1), 3 节中的式(9)都具有与此相似的动态特性; 文献[1]中的式(1), 式(11)也具有与此相似的动态特性。

事实上, 式(54)给出:

$$\alpha \subseteq \alpha^F \subseteq \alpha^F \subseteq \dots \subseteq \alpha_n^F$$

则有 $[u]^F_n \subseteq [u]^F_{n-1} \subseteq \dots \subseteq [u]^F_1 \subseteq [u]$

或者, $\text{card}([u]^F_n) \leq \text{card}([u]^F_{n-1}) \leq \dots \leq \text{card}([u]^F_1) \leq \text{card}([u])$ 任取 $k-1, k$, 则有

$$[u]^F_{k-1} = \{u_1, u_2, \dots, u_p\} \subseteq \{u_1, u_2, \dots, u_q\} = [u]^F_k$$

或者 $\text{card}([u]^F_{k-1}) \leq \text{card}([u]^F_k)$; 显然, 因为 $\alpha^F_{k-1} \subseteq \alpha^F_k$, 使得 $[u]^F_k$ 中丢失元素(函数) $u_{p+1}, u_{p+2}, \dots, u_q$, 从 $[u]^F_k$ 中得到 $[u]^F_{k-1}$ 。换句话说, $[u]^F_{k-1}$ 是从 $[u]^F_k$ 拆分中得到的。从数值上看: $y_r = \{y_{r,1}, y_{r,2}, \dots, y_{r,n}\}$ 是 $u_r \in [u]^F_{k-1}$ 的离散数据, $[u]^F_{k-1}$ 的离散数据是

$$y_{k-1} = \{y_{k-1,1}, y_{k-1,2}, \dots, y_{k-1,n}\} = \left(\sum_{i=1}^k y_{k-1,1,i}, \sum_{i=1}^k y_{k-1,2,i}, \dots, \sum_{i=1}^k y_{k-1,n,i} \right)$$

类似得到 $[u]^F_k$ 的离散数据

$$y_k = \{y_{k,1}, y_{k,2}, \dots, y_{k,n}\} = \left(\sum_{i=1}^k y_{k,1,i}, \sum_{i=1}^k y_{k,2,i}, \dots, \sum_{i=1}^k y_{k,n,i} \right)$$

则 y_{k-1} 是从 y_k 拆分中得到的, 或者从式(58), 式(59)得到。

式(54)一式(60)在 10 节, 11 节的讨论中被使用; 利用式(54)一式(60)中的概念, 给出:

函数单向 S-粗集与信息规律生成

约定 把 2 节中的式(5)引入到本节中, 令 $[u]_- = \bigcup [u]_- = (R, F) \circ (Q^+)$, $[u]^- = \bigcup [u]^- = (R, F) \circ (Q^-)$; $[u]_- \subseteq [u]^-$; 或者 $\text{card}([u]_-) \leq \text{card}([u]^-)$; $\text{card} = \text{cardinal number}$ 。

给定 $[u]_-$, $[u]^-$, 而且

$$[u]_- = \{u_1, u_2, \dots, u_p\} \quad (61)$$

$$[u]^- = \{u_1, u_2, \dots, u_q\} \quad (62)$$

式中, $p \leq q$; $p, q \in \mathbf{N}^+$ 。 $u_k \in [u]_-$, u_k 具有数据集 $y_k, k=1, 2, \dots, p$, 而且

$$y_k = \{y_{k,1}, y_{k,2}, \dots, y_{k,n}\} \quad (63)$$

由式(58)一式(60)得到 $[u]_-$ 的数据集 y_- , 而且

$$y_- = \{y_1, y_2, \dots, y_n\} \quad (64)$$

由式(64)得到数据点: $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$, 利用式(65)得到 $[u]_-$ 生成的规律(函数) $w(x)_-$, 而且

$$w(x)_- = \sum_{j=1}^n y_j \prod_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n \frac{x - x_i}{x_j - x_i} = a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a. \quad (65)$$

由式(58)一式(60)得到 $[u]^-$ 的数据集 y^- ,而且

$$y^- = \{y_1, y_2, \dots, y_n\} \quad (66)$$

由式(66)得到数据点: $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$,利用式(65)得到 $[u]^-$ 生成的规律(函数) $w(x)^-$,而且

$$w(x)^- = b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \dots + b_1x + b_0 \quad (67)$$

取区间 $[a, b]$; $w(x)^-$ 被定义在 $[a, b]$ 上;则 $(w(x)^-)$, $w(x)^-$ 是函数单向 S-粗集生成的信息规律; $w(x)^-$ 称作下规律; $w(x)^-$ 称作上规律; $w(x)^- \leq w(x)^-$ 。

其中, $y_i \in y^-$, $y_j \in y^-$ 满足 $y_i = \sum_{k=1}^p y_{k,i} \leq \sum_{k=1}^p y_{k,j} = y_j$; $i, j=1, 2, \dots, n$; $p \leq q$ 。

函数单向 S-粗集对偶、函数双向 S-粗集生成的信息规律与式(61)一式(67)给出的讨论类似,这些讨论略。

10 信息规律动态拆分-合成的属性特征

约定 在本节中,取函数单向 S-粗集进行讨论;函数单向 S-粗集对偶、函数双向 S-粗集生成的信息规律动态拆分-合成的属性特征讨论,略。

令 $[u]_- = \bigcup [u] = (R, F) \circ (Q^p)$, $[u]^- = \bigcup [u] = (R, F) \circ (Q^p)$; $[u]_- \subseteq [u]^-$; α_- , α^- 分别是 $[u]_-$, $[u]^-$ 的属性集,这些记号在 10 节, 11 节中被使用。

给定 $[u]_- = \{u_1, u_2, \dots, u_p\}$, y_k 是 $u_k \in [u]_-$ 的离散数据集,而且

$$y_k = \{y_{k,1}, y_{k,2}, \dots, y_{k,n}\} \quad (68)$$

$k=1, 2, \dots, p$; 由式(58)一式(60)得到 $[u]_-$ 的离散数据集 y^- ,而且

$$y^- = \{y_1, y_2, \dots, y_n\} = \{\sum_{i=1}^p y_{i,1}, \sum_{i=1}^p y_{i,2}, \dots, \sum_{i=1}^p y_{i,n}\} \quad (69)$$

由 9 节中的数据拆分-合成原理, y_k 是 y^- 的拆分, y^- 是 y_k 的合成;由式(65)得到 $[u]_-$ 生成的信息规律 $w(x)^-$,而且

$$w(x)^- = a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \dots + a_1x + a_0 \quad (70)$$

式中, $w(x)^-$ 是定义在 $[a, b]$ 上的信息规律。

给定 $[u]^- = \{u_1, u_2, \dots, u_q\}$, y_r 是 $u_r \in [u]^-$ 的离散数据集,而且

$$y_r = \{y_{r,1}, y_{r,2}, \dots, y_{r,n}\} \quad (71)$$

式中, $r=1, 2, \dots, q$; 由式(58)一式(60)得到 $[u]^-$ 的离散数据集 y^- ,而且

$$y^- = \{y_1, y_2, \dots, y_n\} = \{\sum_{j=1}^q y_{j,1}, \sum_{j=1}^q y_{j,2}, \dots, \sum_{j=1}^q y_{j,n}\} \quad (72)$$

由 9 节中的数据拆分-合成原理, y_r 是 y^- 的拆分, y^- 是 y_r 的合成;由式(65)得到 $[u]^-$ 生成的信息规律 $w(x)^-$,而且

$$w(x)^- = b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \dots + b_1x + b_0 \quad (73)$$

式中, $w(x)^-$ 是定义在 $[a, b]$ 上的信息规律。由 $w(x)^-$ 与 $w(x)^-$ 构成的规律对(函数对),称作函数单向 S-粗集生成的信息规律,而且

$$(w(x)^-, w(x)^-) \quad (74)$$

显然, $w(x)^-$ 具有属性集 α_- , $w(x)^-$ 具有属性集 α^- , 而且 $\alpha^- \subseteq \alpha_-$ 。

式(74)中, $w(x)^-$, $w(x)^-$ 满足 $w(x)^- \leq w(x)^-$; 式(74)的直观表示见第 1 节中的图 2, $w(x)^-$, $w(x)^-$ 用实线表示。

若 $[u]_- = [u]^-$, 则式(70), 式(73)式变成:

$$w(x)^- = a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \dots + a_1x + a_0 = b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \dots + b_1x + b_0 = w(x)^-$$

或者

$$w(x)^- = w(x)^- \quad (75)$$

式(75)的直观表示见第 1 节中的图 3; 图 3 表示, $w(x)^-$ 与 $w(x)^-$ 重合成 $w(x)$ 。

显然, 式(75)中, $w(x)^- = w(x)^-$, $w(x)^-$ 与 $w(x)^-$ 具有相同的属性集, $\alpha_- = \alpha^-$ 。

定理 18(信息规律第一动态拆分的属性特征定理) 信息规律 $w(x)^-$ 被拆分成信息规律 $w(x)^-,_F$, 而且

$$w(x)^-,_F - w(x)^- \leq 0 \quad (76)$$

的充分必要条件是: $w(x)^-$ 的属性集 α_- 与 $w(x)^-,_F$ 的属性集 $\alpha^-,_F$ 满足

$$\alpha^-,_F - \alpha_- = \nabla \alpha \quad (77)$$

式中, $\nabla \alpha \neq \phi$ 。

证明: 因为 $w(x)^-,_F$, $w(x)^-$ 分别是 $[u]^-$, $[u]^-$ 生成的规律(函数), $[u]^- \subseteq [u]^-$; α_- , $\alpha^-,_F$ 分别是 $[u]^-$, $[u]^-$ 的属性集。1°. 若 $w(x)^-,_F - w(x)^- \leq 0$; 或者, $w(x)^-,_F \leq w(x)^-$, 则有 $\text{card}([u]^-) \leq \text{card}([u]^-)$; $[u]^-$ 的属性集 $\alpha^-,_F$ 与 $[u]^-$ 的属性集 α_- 满足 $\alpha_- \subseteq \alpha^-,_F$; 显然存在属性差集 $\nabla \alpha$ 满足 $\alpha^-,_F - \alpha_- = \nabla \alpha$, 而且 $\nabla \alpha \neq \phi$ 。2°. 若 $\nabla \alpha$ 是 $\alpha^-,_F$ 与 α_- 的属性差集, 而且 $\alpha^-,_F - \alpha_- = \nabla \alpha$, $\nabla \alpha \neq \phi$, 或者 $\alpha_- \subseteq \alpha^-,_F$; 具有 α_- 的 $[u]^-$ 与具有 $\alpha^-,_F$ 的 $[u]^-$ 满足 $[u]^- \subseteq [u]^-$, 或者 $\text{card}([u]^-) \leq \text{card}([u]^-)$ 。由 9 节中的式(61)一式(65), $[u]^-$ 生成的 $w(x)^-,_F$ 与 $[u]^-$ 生成的 $w(x)^-$ 满足: $w(x)^-,_F \leq w(x)^-$, 或者 $w(x)^-,_F - w(x)^- \leq 0$ 。

定理 19(信息规律第二动态拆分的属性特征定理) 信息规律 $w(x)^-$ 被拆分成信息规律 $w(x)^-,_F$, 而且

$$w(x)^-,_F - w(x)^- \geq 0 \quad (78)$$

的充分必要条件是: $w(x)^-$ 的属性集 α^- 与 $w(x)^-,_F$ 的属性集 $\alpha^-,_F$ 满足

$$\alpha^- - \alpha^-,_F = \Delta \alpha \quad (79)$$

式中, $\Delta \alpha \neq \phi$ 。

证明与定理 18 类似。

定理 20(信息规律第一动态合成的属性特征定理) 信息规律 $w(x)^-,_F$ 被合成为信息规律 $w(x)^-$, 而且

$$w(x)^-,_F - w(x)^- = 0 \quad (80)$$

的充分必要条件是: $w(x)^-,_F$ 的属性集 $\alpha^-,_F$ 与 $w(x)^-$ 的属性集 α^- 满足

$$(\alpha^-,_F - \nabla \alpha) - \alpha^- = \phi \quad (81)$$

式中, $\nabla \alpha \neq \phi$ 。

证明: 设 $w(x)^-,_F$ 是 $[u]^-$ 生成的规律(函数), $w(x)^-$ 是 $[u]^-$ 生成的规律(函数), $[u]^- \subseteq [u]^-$; $\alpha^-,_F$ 是 $w(x)^-,_F$ 的属性集, α^- 是 $w(x)^-$ 的属性集。1°. 若 $w(x)^-,_F - w(x)^- = 0$, 或者 $w(x)^-,_F = w(x)^-$, 则有 $[u]^- = [u]^-$ 。因为 $[u]^- \subseteq [u]^-$, 则 $[u]^-$ 的属性集 $\alpha^-,_F$ 与 $[u]^-$ 的属性集 α^- 满足 $\alpha^- \subseteq \alpha^-,_F$, 则存在属性差集 $\nabla \alpha$, 使得 $\alpha^-,_F - \nabla \alpha = \alpha^-$; 或者 $(\alpha^-,_F - \nabla \alpha) - \alpha^- = \phi$ 。2°. 因为 $[u]^-$ 的属性集 $\alpha^-,_F$ 与 $[u]^-$ 的属性集 α^- 满足 $\alpha^- \subseteq \alpha^-,_F$, 显然存在 $\nabla \alpha$, 从 $\alpha^-,_F$ 删去 $\nabla \alpha$, 使得 $\alpha^-,_F - \nabla \alpha = \alpha^-$, 或者 $(\alpha^-,_F - \nabla \alpha) - \alpha^- = \phi$, 则 $[u]^- = [u]^-$, $[u]^-$ 生成的 $w(x)^-,_F$ 与 $[u]^-$ 生成的 $w(x)^-$ 满足 $w(x)^-,_F - w(x)^- = 0$, $w(x)^-,_F$ 被合成为 $w(x)^-$ 。

定理 21(信息规律第二动态合成的属性特征定理) 信

息规律 $w(x)_{F,i}$ 被合成为信息规律 $w(x)^-$ ，而且

$$w(x)_{F,i} - w(x)^- = 0 \quad (82)$$

的充分必要条件是： $w(x)_{F,i}$ 的属性集 $\alpha_{F,i}$ 与 $w(x)^-$ 的属性集 α^- 满足

$$(\alpha_{F,i} \cup \nabla \alpha_j) - \alpha^- = \phi \quad (83)$$

式中， $\Delta \alpha_j \neq \phi$ 。

证明与定理 20 类似。

由定理 18—定理 21 直接得到：

信息规律动态拆分-合成不变性原理

被补充到 α^- 内的属性集 $\nabla \alpha_{-F,i}$ 对于 α^- 与从 α^- 内被删除的属性集 $\Delta \alpha_{F,i}$ 对于 α^- 都是冗余的，信息规律 $(w(x)_{-F,i}, w(x)_{F,i})$ 与信息规律 $(w(x)^-, w(x)^-)$ 满足

$$(w(x)_{-F,i}, w(x)_{F,i}) = (w(x)^-, w(x)^-) \quad (84)$$

式中， $w(x)_{-F,i} = w(x)^-$ ， $w(x)_{F,i} = w(x)^-$ ； α_{-} 是 $w(x)^-$ 的属性集， α^- 是 $w(x)^-$ 的属性集。

式(84)给出信息系统规律的一个重要应用特性：信息规律的刚性(rigidity)，“刚性”是物理学中的一个概念。换句话说，若系统受到参数攻击(或属性值攻击)，系统的规律保持不变。若 $O^*(a, w(x)_{-F,i}, b, w(x)_{F,i})$ 是由 $w(x)_{-F,i}, w(x)_{F,i}$ 构成的某个真实信息图像的伪装，因为 $O^*(a, w(x)_{-F,i}, b, w(x)_{F,i})$ 的“刚性特征”，利用参数攻击的方式，企图把 $O^*(a, w(x)_{-F,i}, b, w(x)_{F,i})$ 复原成某个真实的信息图像是困难的。

利用 2—8 节中的概念，9—10 节的结果，11 节中给出信息规律拆分-合成的应用；这里给出的应用，仅是函数 S 粗集与函数粗集诸多重要应用之一。

11 信息规律拆分-合成与信息图像嵌入-分离

约定 为了讨论的简单，又能使读者容易接受，理解例子中的学术思想与研究方法，在本节的讨论中，仅取函数单向 S 粗集作本文中采用的数学工具。本节中用到的概念，已分布在 2—9 节中，方便查找。

11.1 四边信息图像与它的内-外嵌入

给定数值 $x_1 = a, x_2 = b$ ，信息规律(函数) $w(x)^-, w(x)^+$ ； $w(x)^- \leq w(x)^+$ ；由 $a, b, w(x)^-, w(x)^+$ 构成的封闭图形，称作一个四边信息图像，简称信息图像，记作 $w(a, w(x)^-, b, w(x)^+)$ ，如图 5 所示。

其中， $w(x)^-$ 是 $y^- = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ 利用式(65)生成的规律(函数)， y^- 是 $[u]^- = \{u_1, u_2, \dots, u_p\}$ 的数据集， $[u]^- = (R, F)_o(Q)^o$ ； $w(x)^+$ 是 $y^+ = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ 利用式(65)生成的规律(函数)， y^+ 是 $[u]^+ = \{u_1, u_2, \dots, u_q\}$ 的数据集， $p \leq q$ ； $p, q \in \mathbb{N}^+$ 。 $w(x)_{-F,i}$ 是 $y_{-F,i} = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ 利用式(65)生成的规律(函数)， $y_{-F,i}$ 是 $[u]_{-F,i} = \{u_1, u_2, \dots, u_k\}$ 的数据集， $[u]_{-F,i} = (R, F)_o(Q)^o_{F,i}$ ； $[u]_{-F,i} \subseteq [u]^-$ ； $w(x)_{F,i}$ 是 $y_{F,i} = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ 利用式(65)生成的规律(函数)， $y_{F,i}$ 是 $[u]_{F,i} = \{u_1, u_2, \dots, u_r\}$ 的数据集， $[u]_{F,i} = (R, F)_o(Q)^o_{F,i}$ ； $[u]_{F,i} \subseteq [u]^+$ 。显然， $\forall y_k \in y_{-F,i} \leq y_k \in y^-$ ； $\forall y_t \in y^+ \leq y_t \in y_{F,i}$ ； $k, t \in (1, 2, \dots, n)$ 。

给定 $[a, b]$ 上的 $w(x)^-, w(x)^+$ ； $w(x)_{-F,i}, w(x)_{F,i}$ ；若

$$w(x)_{-F,i} \leq w(x)^- \quad (85)$$

$$w(x)^- \leq w(x)_{F,i}$$

称 $w(a, w(x)^-, b, w(x)^+)$ 是 $w^*(a, w(x)_{-F,i}, b, w(x)_{F,i})$ 的一个内-嵌入信息图像(见图 5)；称 $w^*(a, w(x)_{-F,i}, b, w(x)_{F,i})$ 是 $w(a, w(x)^-, b, w(x)^+)$ 的一个外-嵌入信息图像

(见图 5)。

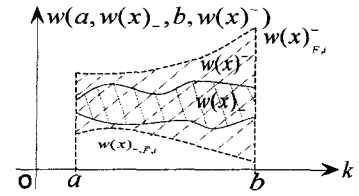


图 5 四边信息图像 $w(a, w(x)^-, b, w(x)^+)$ ； $w^*(a, w(x)_{-F,i}, b, w(x)_{F,i})$ 是 $w(a, w(x)^-, b, w(x)^+)$ 的生成； $w(a, w(x)^-, b, w(x)^+)$ 被嵌入在 $w^*(a, w(x)_{-F,i}, b, w(x)_{F,i})$ 内； $w(a, w(x)^-, b, w(x)^+)$ 用实线表示； $w^*(a, w(x)_{-F,i}, b, w(x)_{F,i})$ 用虚线表示。

这里指出：1° 内嵌入是一个相对的概念；图 5 中， $w(a, w(x)^-, b, w(x)^+)$ 被内嵌入(内套入)在 $w^*(a, w(x)_{-F,i}, b, w(x)_{F,i})$ 内，若把 $w(a, w(x)^-, b, w(x)^+)$ 定义成一个真实信息图像， $w^*(a, w(x)_{-F,i}, b, w(x)_{F,i})$ 定义成一个假信息图像，则真信息图像 $w(a, w(x)^-, b, w(x)^+)$ 被潜藏(嵌入)在假信息图像 $w^*(a, w(x)_{-F,i}, b, w(x)_{F,i})$ 内。

2° 从 2 节中的式(8)中得到：函数单向 S 粗集是一个函数集合对族；换句话说：若 $w(a, w(x)^-, b, w(x)^+)$ 是 $[u]^- = (R, F)_o(Q)^o$ 生成的信息图像；则 $w(a, w(x)^-, b, w(x)^+)$ 的外面具有若干多个 $w^p(a, w(x)_{-F,k}, b, w(x)_{F,k})$ ， $k = 1, 2, \dots, \lambda$ ；它们当中的每一个都是 $w(a, w(x)^-, b, w(x)^+)$ 的外-嵌入信息图像。

3° 如果把 $w^p(a, w(x)_{-F,k}, b, w(x)_{F,k})$ 中的某一个 $w^p(a, w(x)_{-F,\eta}, b, w(x)_{F,\eta})$ 定义成一个真信息图像， $\eta \in (1, 2, \dots, \lambda)$ ；则 $w^p(a, w(x)_{-F,\eta}, b, w(x)_{F,\eta})$ 被内-嵌入在 $w^p(a, w(x)_{-F,p}, b, w(x)_{F,p})$ 内， $p = k+1, k+2, \dots, \lambda$ ；同时， $w^p(a, w(x)_{-F,\eta}, b, w(x)_{F,\eta})$ 又被外-嵌入在 $w^p(a, w(x)_{-F,q}, b, w(x)_{F,q})$ 外， $q = 0, 1, 2, \dots, \eta-1$ ；达到“以假乱真，混淆视听”的目的。只要参数 η 获得安全，从 $w^p(a, w(x)_{-F,i}, b, w(x)_{F,i})$ ， $i = 1, 2, \dots, \lambda$ 中辨识真信息图像是困难的； η 是单向函数^[16, 17, 24]中的参数，单向函数具有不可逆性^[24]。

4° 图 5 中， $w(a, w(x)^-, b, w(x)^+)$ 是一个重要信息图像的一个子图像，完整的重要图像，因为一些原因，略。

11.2 信息图像内-外嵌入定理

定理 22(信息图像内-嵌入定理) 信息图像 $w(a, w(x)^-, b, w(x)^+)$ 与信息图像 $w^*(a, w(x)_{-F,i}, b, w(x)_{F,i})$ 满足

$$w(a, w(x)^-, b, w(x)^+) \subset w^*(a, w(x)_{-F,i}, b, w(x)_{F,i}) \quad (86)$$

的充分必要条件是

$$\alpha_{-F,i} = \alpha^- \cup \alpha_{-,*} \quad (87)$$

$$\alpha_{F,i} = \alpha^- - \alpha_{-,*} \quad (88)$$

式(86)中，“ $\subset$ ”是一个特别记号，“ $\subset$ ”表示 $w(a, w(x)^-, b, w(x)^+)$ 被套在(嵌入) $w^*(a, w(x)_{-F,i}, b, w(x)_{F,i})$ 内； $\alpha_{-F,i}$ 是 $w(x)_{-F,i}$ 的属性集， α^- 是 $w(x)^-$ 的属性集， $\alpha_{-,*} = \{\alpha' | \beta \in V, \beta \in \alpha^-, f(\beta) = \alpha' \in \alpha_{-,*}\}$ ； $\alpha_{F,i}$ 是 $w(x)_{F,i}$ 的属性集， α^- 是 $w(x)^-$ 的属性集， $\alpha_{-,*} = \{\beta | \alpha_i \in \alpha^-, f(\alpha_i) = \beta \in \alpha_{-,*}\}$ 。

定理 23(信息图像外-嵌入定理) 信息图像 $w(a, w(x)^-, b, w(x)^+)$ 与信息图像 $w^*(a, w(x)_{-F,i}, b, w(x)_{F,i})$ 满足

$$w^*(a, w(x)_{-,F,i}, b, w(x)_{\bar{F},i}) \subset w(a, w(x)_{-,}, b, w(x)^{-}) \quad (89)$$

的充分必要条件是

$$\alpha^- = \alpha_{-,F,i}^- \cup \alpha_{-,}, \quad (90)$$

$$\alpha^- = \alpha_{\bar{F},i}^- \cup \alpha_{-,}, \quad (91)$$

式(89)中,“ $\subset$ ”是一个特别记号,“ $\subset$ ”表示 $w(a, w(x)_{-,}, b, w(x)^{-})$ 被反套在(嵌入) $w^*(a, w(x)_{-,F,i}, b, w(x)_{\bar{F},i})$ 外, $\alpha_{-,} = \{\beta_i | \alpha_i \in \alpha_{-,F,i}, \bar{f}(\alpha_i) = \beta_i \in \alpha_{-,F,i}\}$, $\alpha_{-,}^- = \{\alpha_i' | \beta_i \in V, \beta_i \in \alpha_{\bar{F},i}, f(\beta_i) = \alpha_i \in \alpha_{\bar{F},i}\}$ 。

定理 22, 23 的证明留给对此有兴趣的读者;事实上,定理 22, 23 的证明是直接的。

11.3 嵌入信息图像的分离-辨识

称 $\nabla_{-,F,i}$ 是信息图像 $w(a, w(x)_{-,F,i}, b, w(x)_{\bar{F},i})$ 关于信息图像 $w(a, w(x)_{-,}, b, w(x)^{-})$ 的下边界分离系数, 如果

$$\nabla_{-,F,i} = ||y_{-,F,i}|| / ||y_-|| \quad (92)$$

式中, $||y_-|| = (y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2)^{1/2}$ 是 $y_- = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$ 的 2-范数, $y_- = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$ 是数据集 $y_- = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ 生成的向量, $y_{-,F,i} = (y_{1,F,i}, y_{2,F,i}, \dots, y_{n,F,i})^T$ 是数据集 $y_{-,F,i} = \{y_{1,F,i}, y_{2,F,i}, \dots, y_{n,F,i}\}$ 生成的向量, $y_{-,F,i} = \{y_{1,F,i}, y_{2,F,i}, \dots, y_{n,F,i}\}$ 是 $w(x)_{-,F,i}$ 的离散生成。

称 $\Delta_{\bar{F},i}$ 是信息图像 $w(a, w(x)_{-,F,i}, b, w(x)_{\bar{F},i})$ 关于信息图像 $w(a, w(x)_{-,}, b, w(x)^{-})$ 的上边界分离系数, 如果

$$\Delta_{\bar{F},i} = ||y_{\bar{F},i}|| / ||y^+|| \quad (93)$$

由 $\nabla_{-,F,i}$ 与 $\Delta_{\bar{F},i}$ 构成的数对, 称作 $w(a, w(x)_{-,F,i}, b, w(x)_{\bar{F},i})$ 关于 $w(a, w(x)_{-,}, b, w(x)^{-})$ 的分离系数, 如果

$$(\nabla_{-,F,i}, \Delta_{\bar{F},i}) \quad (94)$$

定理 24(信息图像分离的区间定理) 若信息图像 $w^*(a, w(x)_{-,F,i}, b, w(x)_{\bar{F},i})$ 关于信息图像 $w(a, w(x)_{-,}, b, w(x)^{-})$ 的分离系数 $(\nabla_{-,F,i}, \Delta_{\bar{F},i})$ 构成以单位 1 为中心的离散区间 $[\nabla_{-,F,i}, \Delta_{\bar{F},i}]$, 则 $w(a, w(x)_{-,}, b, w(x)^{-})$ 从 $w^*(a, w(x)_{-,F,i}, b, w(x)_{\bar{F},i})$ 内被分离。

证明留给读者;事实上,式(93),式(94)给出 $\nabla_{-,F,i} \leq 1$, $\Delta_{\bar{F},i} \geq 1$; $\nabla_{-,F,i}$ 与 $\Delta_{\bar{F},i}$ 构成 $[\nabla_{-,F,i}, \Delta_{\bar{F},i}]$, 单位 1 是 $[\nabla_{-,F,i}, \Delta_{\bar{F},i}]$ 的中心。

由 11.1 节—11.3 节得到:

嵌入信息图像的辨识准则

信息图像 $w^*(a, w(x)_{-,F,i}, b, w(x)_{\bar{F},i})$ 与它的内-嵌入信息图像 $w(a, w(x)_{-,}, b, w(x)^{-})$ 满足

$$IDE \left\{ \begin{array}{l} w^*(a, w(x)_{-,F,i}, b, w(x)_{\bar{F},i}) \\ w(a, w(x)_{-,}, b, w(x)^{-}) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 1 - \nabla_{-,F,i} \geq 0 \\ 1 - \Delta_{\bar{F},i} \leq 0 \end{array} \quad (95)$$

式中, $IDE = \text{identification}$ 。

应当给出说明:在本节的例子中,给出信息图像嵌入-分离的研究思想与分析方法,以此启迪读者;为了简单,例子中删掉了具体数据集: y_- , y^+ , $y_{-,F,i}$, $y_{\bar{F},i}$;具体的规律(函数); $w(x)_{-,}$, $w(x)^{-}$, $w(x)_{-,F,i}$, $w(x)_{\bar{F},i}$ 的表达式。读者只要选择具体的 y_- , y^+ , $y_{-,F,i}$, $y_{\bar{F},i}$, 就能得到: $w(a, w(x)_{-,}, b, w(x)^{-})$, $w^*(a, w(x)_{-,F,i}, b, w(x)_{\bar{F},i})$;建议读者,取实验数据不妨试一试;或许比作者得到的更多。

12 诸多讨论与建议

本文的工作是文献[1]的继续,是文献[1]欠账读者的一

个偿还。

1982 年,波兰杰出学者 Z. Pawlak 教授巧妙地把“近似概念”引入到有限普通集合 X 中,改进有限普通集合 X ,提出粗集^[2],给出粗集的数学结构: $(R_-(X), R^-(X))$;这一原创性的工作为数学理论与应用,信息科学与信息工程,计算机科学与计算机工程等多个研究领域提供了一个新的思维空间与新的研究工具;这一杰出的学术成就,将启迪着年轻的一代学者,聪明的年轻学子们;使得从事粗集理论与应用研究的人对这位已谢世的长者的怀念与敬仰。数学结构: $(R_-(X), R^-(X))$ 对“近似概念”的刻画如此“经典,精辟”。在粗集理论中,没有“人为的因素”参入,更没有“人们主观意识”的干扰,因此粗集被人们接受与认可。从粗集结构: $(R_-(X), R^-(X))$, 容易看到: Z. Pawlak 粗集是一个“静态粗集”,因为“静态特性”的存在, Z. Pawlak 粗集是由 $X \subset U$ 的下近似, $X \subset U$ 的上近似构成的一个集合对: $(R_-(X), R^-(X))$ 。从这个层面看, Z. Pawlak 粗集的应用空间是十分有限的。

1°. 在应用领域及信息系统中,人们遇到的集合(信息集合)大多都具有动态特性,如果利用具有“静态特性”的 Z. Pawlak 粗集研究这些领域与系统,使人感到“研究工具的缺失与力不从心”。如果把“动态特性”引入到 Z. Pawlak 粗集中,改进 Z. Pawlak 粗集,则 Z. Pawlak 粗集变成什么样子? 如果这个想法是正确的,被改进的 Z. Pawlak 粗集是否具有更大的应用空间? 被改进的 Z. Pawlak 粗集,在什么样的条件下,能回到 Z. Pawlak 粗集的“原点”? 基于这个想法,2002 年作者把“动态特性”,引入到 Z. Pawlak 粗集中,改进了 Z. Pawlak 粗集,提出 S-粗集(singular rough sets)^[3],文献[1]对此给出讨论与介绍;这种改进,没有改变 Z. Pawlak 粗集中的等价关系。从结构上看:由一对集合对构成的 Z. Pawlak 粗集

$$(R_-(X), R^-(X)) \quad (96)$$

变成一个集合对串(集合对族)

$$\{((R, F)_o(X^o)_i, (R, F)^o(X^o)_j) | i \in I, j \in J\} \quad (97)$$

式(97)是 S-粗集的形式之一:单向 S-粗集。

式(97)的存在取决于元素迁移概念^[1,3,23];换句话说,因为元素迁移概念的定义,使得 Z. Pawlak 粗集动起来,式(96)变成式(97);显然,在式(97)中抽掉元素迁移概念,式(97)回到式(96),或者

$$\{((R, F)_o(X^o)_i, (R, F)^o(X^o)_j) | i \in I, j \in J\}_{F=\phi} = (R_-(X), R^-(X)) \quad (98)$$

式(98)表明: $F = \phi$, 式(97)回到式(96)的“原点”。

2°. 在信息系统中,人们更需要知道:信息的分布规律(函数)是什么? 如何能及早地知道信息规律 $w(x)$ 的变化及变化的最后结果是什么? 这样的例子在金融系统、风险估计系统中遇到的最多。Z. Pawlak 粗集, S-粗集能对这些问题给出解答吗? 显然是不能的。因为 Z. Pawlak 粗集, S-粗集不具有规律特性。基于这个想法,2005 年作者把“函数概念”引入到 Z. Pawlak 粗集, S-粗集中;改进 Z. Pawlak 粗集, S-粗集,使 Z. Pawlak 粗集, S-粗集具有“规律特性”,提出函数 S-粗集^[12]与函数粗集^[12]。从结构上看: Z. Pawlak 粗集

$$(R_-(X), R^-(X)) \quad (99)$$

变成函数粗集

$$(R_-(Q), R^-(Q)) \quad (100)$$

从结构上看,单向 S-粗集

$$\{((R, F)_o(X^o)_i, (R, F)^o(X^o)_j) | i \in I, j \in J\} \quad (101)$$

变成函数单向 S-粗集

$$\{(R, F)_i, (Q^*)_i, (R, F)^o(Q^*)_j) | i \in I, j \in J\} \quad (102)$$

式(101)是 S-粗集中形式之一;式(102)是函数 S-粗集的形式之一。

从式(99),式(100)中容易看到:在一定条件下,函数粗集能够回到 Z. Pawlak 粗集的“原点”;从式(101),式(102)中容易看到:在一定条件下,函数单向 S-粗集能够回到单向 S-粗集的“原点”。

3°. 从式(97)的动态结构中容易得到:单向 S-粗集为动态数据挖掘、动态知识发现的研究,提供了理论与工具性的支持;从式(100)的结构中容易得到:函数粗集为寻找信息系统中的信息规律,提供了理论与工具性的支持;从式(102)的动态结构中容易得到:函数单向 S-粗集为寻找信息系统中具有动态变化特征的信息规律,提供了理论与工具性的支持。

4°. Z. Pawlak 教授提出粗集之后,数据挖掘与知识发现的研究已成为国际、国内学术界研究的热点之一,诸多优秀的成果出自年轻一代之手。然而动态数据挖掘与动态知识发现、规律挖掘与规律发现、动态规律挖掘与动态规律发现、信息图像的塑性生成、信息图像的嵌入、信息图像的伪装、信息的动态搜索、信息的隐写等多个具有重要理论与应用价值的研究领域仍处在“研究空白”状态,这不能不说是人们研究中的“一个遗漏”。函数粗集、函数 S-粗集的提出,有希望催生这些具有举足轻重的领域“热闹起来”,显然,这个“热闹的局面”的到来还需要聪明的年轻一代的参与。作者建议:聪明、勤奋的年轻学子们,不妨将函数粗集、函数 S-粗集应用这些待开发的领域中,在漫不经心的条件下,会收获良多;不会让你沮丧地“空手而归”。

受到内容与论文长度的限制,这里留下两个伏笔:

A. 文献[1]中的 S-粗集^[1-11, 22, 23]、函数 S-粗集^[12-23]都有元素迁移 $f \in F, \bar{f} \in \bar{F}$ 的概念;元素迁移的定义使得 S-粗集、函数 S-粗集具有了动态特性,使得 S-粗集、函数 S-粗集更贴近信息系统的原貌,因为信息系统具有动态特性。利用 S-粗集、函数 S-粗集研究信息系统,能够获得我们以往不知道的一些新结果,这些新结果以往都潜藏在信息系统中,不为人知。用具有静态特性的模型(方法)去研究信息系统,所得到的结果相差甚远。元素迁移,在文献[1-11, 22, 23; 12-23]中是利用数学的抽象表达方式给出: $\exists u_i \in U, u_i \in X, f(u_i) = x'_i \in X; \exists x_i \in X, \bar{f}(x_i) = u_i \in X$;这种表达方式是数学中的惯例。显然,这种表达,给应用带来困难;甚至有人问:元素迁移是什么?

B. 给定 $\alpha = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m\}$, α 是一个风险属性集;如果把 α_i 都给予一个相同的度量(危害值) $\eta_i, i = 1, 2, \dots, m$;显然, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 在 η 的条件下构成 α ; α 之外的 $\beta \in \alpha, \beta$ 的度量 η_β^* 满足 $\eta_\beta^* < \eta$; 或 $\eta < \eta_\beta^*$ 。在一定条件下, α 内的某些 α_k , 它的 η_k 变成 η_k^* , 则 α_k 被从 α 内删除(α_k 已不构成威胁), 或者 $\bar{f}(\alpha_k) = \beta_k \in \alpha$; 在另外一些条件下, α 外的 β_r , 它的 η_r 变成 η ; 或者 $\eta_r = \eta$, 则 β_r 进入 α 内(β_r 构成威胁); 或者 $f(\beta_r) = \alpha_r \in \alpha$; 如此等等。显然, 风险属性集 α 是动态的(属性迁入, 迁出)。这个粗略的讨论, 或许打开读者的思维闸门, 使其认识元素迁移。“元素迁移”是 S-粗集、函数 S-粗集存在的“基石”。元素迁移的诸多讨论, 将另文给出。

参 考 文 献

[1] 史开泉. S-粗集与数据挖掘单位圆特征[J]. 计算机科学, 2010,

37(5):1-8

- [2] Pawlak Z. Rough sets[J]. International Journal of Computer and Information Sciences, 1982, 32(11): 341-356
- [3] Shi Kaiquan. S-rough sets and its applications in diagnosis-recognition for disease[J]. IEEE Proceedings of the First International Conference on Machine Learning and Cybernetics, 2002, 1(1): 50-54
- [4] 史开泉, 崔玉泉. S-粗集与它的结构[J]. 山东大学学报: 理学版, 2002, 37(6): 471-474
- [5] Shi Kaiquan, Cui Yuquan. F-decomposition and $\bar{F}$ -reduction of S-rough sets[J]. An International Journal Advances in Systems Science and Applications, 2004, 4(4): 487-499
- [6] Shi Kaiquan, Chang Tingcheng. One direction S-rough sets[J]. International Journal of Fuzzy Mathematics, 2005, 13(2): 319-334
- [7] Shi Kaiquan. Two direction S-rough sets[J]. International Journal of Fuzzy Mathematics, 2005, 13(2): 335-349
- [8] 史开泉, 崔玉泉. S-粗集与它的分解-还原[J]. 系统工程与电子技术, 2005, 27(4): 644-651
- [9] Shi Kaiquan. S-rough sets and knowledge separation[J]. Journal of Systems Engineering and Electronics, 2005, 16(2): 237-240
- [10] Hu Haiqing, Wang Hongyu, Shi Kaiquan. Two direction S-rough recognition of knowledge and recognition model[J]. An International Journal Advances in Systems Science and Applications, 2005, 5(3): 368-374
- [11] 史开泉. S-粗集与新材料发现-识别[J]. 系统工程与电子技术, 2006, 28(3): 383-388
- [12] Shi Kaiquan. Function S-rough sets and function transfer[J]. An International Journal Advances in Systems Science and Applications, 2005, 5(1): 1-8
- [13] 张萍, 史开泉, 卢昌荆. 函数 S-粗集与粗规律挖掘-分离[J]. 系统工程与电子技术, 2005, 27(11): 1899-1902
- [14] 史开泉, 姚炳学. 函数 S-粗集与规律辨识[J]. 中国科学 E: 信息科学, 2008, 38(4): 553-564
- [15] Shi Kaiquan, Yao Bingxue. Function S-rough sets and law identification[J]. Science in China F: Information Sciences, 2008, 51(5): 499-510
- [16] 史开泉, 赵建立. 函数 S-粗集与隐藏规律安全-认证[J]. 中国科学 E: 信息科学, 2008, 38(8): 1234-1243
- [17] Shi Kaiquan, Zhao Jianli. Function S-rough sets and security-authentication of hiding law[J]. Science in China F: Information Sciences, 2008, 51(7): 924-935
- [18] Zhang Ling, Shi Kaiquan. Security transmission and recognition of F-knowledge[J]. Journal of Systems Engineering and Electronics, 2009, 20(4): 877-882
- [19] Qiu Jinming, Shi Kaiquan. F-rough law and the discovery of rough law[J]. Journal of Systems Engineering and Electronics, 2009, 20(1): 81-89
- [20] Zhou Houyong, Huang Shunliang, Shi Kaiquan. Hiding dependence-discovery of F-hiding laws System law[J]. Journal of Systems Engineering and Electronics, 2009(3): 543-550
- [21] Li Dongya, Ren Xuefang, Shi Kaiquan. Rough law generation and its separation-recognition[J]. Journal of Systems Engineering and Electronics, 2009, 20(6): 1239-1246
- [22] 史开泉, 崔玉泉. S-粗集与粗决策[M]. 北京: 科学出版社, 2006: 155-165
- [23] 史开泉, 姚炳学. 函数 S-粗集与系统规律挖掘[J]. 北京: 科学出版社, 2007: 147-198
- [24] Koblitz N. Elliptic curve crypto systems[J]. Mathematics and Computer, 1987, 21(1): 203-209