

基于多阶抽样谱图聚类彩色图像分割

朱 峰 宋余庆 朱玉全 许莉莉 金洪伟

(江苏大学理学院 镇江 212013)

摘 要 针对谱聚类应用于图像分割时权矩阵的谱难以计算的实际问题,设计了一个图像多阶抽样谱图聚类算法。首先,给出了采样数定理及其证明,并推导出与聚类类别数和最小聚类数相关的最小采样数目;其次,根据最小采样数数目,对像素点进行均匀采样,并利用谱聚类对采样点进行聚类,设计一个罚函数,通过多次抽样,消除抽样对谱聚类模型稳定性的影响;最后,定义了像素点和类之间的距离,对剩余的点按距离最近原则进行聚类。实验结果表明了算法的有效性。

关键词 谱聚类,多阶抽样,图像分割,归一化割

中图法分类号 TP391.41 **文献标识码** A

Color Image Segmentation Based on Spectral Clustering Using Multi-sampling

ZHU Feng SONG Yu-qing ZHU Yu-quan XU Li-li JIN Hong-wei

(Faculty of Science, Jiangsu University, Zhenjiang 212013, China)

Abstract Spectral clustering for image segmentation is difficult to calculate the spectrum of weighted matrix. A multi-stage sampling spectrum image clustering algorithm was designed to eliminate it. First, the sampling theorem was given and proved, and the minimum sample size was derived according to the smallest cluster and cluster number. Secondly, image pixels were sampled based on the minimum sample size and a penalty function was proposed by repeated sampling for the elimination of sampling model on the stability effects of spectral clustering. Finally, the distance between a pixel point and categories was defined, the remaining points were assigned respective cluster depending on the principles of the nearest distance. The experimental results show the effectiveness of the algorithm.

Keywords Spectral clustering, Multi-sampling, Image segmentation, Normalized cut

图像分割是将图像分割成具有不同特征的不相交的连通子区域的过程,其结果对图像分析和图像理解有重要意义。聚类是一种常用的图像分割技术,多年来已经提出了许多基于聚类的图像分割算法,例如K均值(K-means)^[1],模糊C均值(Fuzzy C-means)^[2],自组织映射(self-organizing map)^[3],高斯混合模型(Gauss Mixture Model)^[4]等,但是这些方法往往不考虑图像的空间信息,导致分割的区域不连续,且多数情形下无法得到全局最优解。

近几年,基于谱聚类的图像分割方法也是人们感兴趣的领域之一。Shi和Malik将图像分割转换为最优化图的划分问题,提出了将归一化割准则(Normalized Cut Criterion)^[5]作为全局最优准则。利用谱聚类进行图像分割是近来较新的一种图像分割方法。该方法一般先以图像的像素为顶点构造赋权图(边权一般反映像素之间的相似程度),然后通过分析一个以图的边权为元素的矩阵(权矩阵)的特征向量和特征值来对图的顶点进行聚类以达到分割图像的目的。由于像素点之间的边权可以结合图像的不同特征,例如位置、亮度、色彩、纹理等,因此基于谱聚类的图像分割方法简单,能处理较复杂的图像。但是基于谱聚类的图像分割方法在实际应用中存在权

矩阵的特征值和特征向量难以计算的问题。由于聚类的对象是图像的像素,权矩阵的维数将比较大,例如一幅 256×256 的灰度图像,其权矩阵的维数将达到 216×216 ,而一幅 1024×1024 的灰度图像,其权矩阵的维数将高达 220×220 ,因此计算权矩阵的特征值和特征向量将比较困难。针对这个问题,Shi等人^[5]提出将每一个像素点一定范围以外的边权置为零,利用由此得到的一个稀疏权矩阵的特征向量来近似原权矩阵的特征向量;Fowlkes等人^[6]提出从图像中进行采样,利用Nyström方法从采样点集之间的权矩阵和采样点集与未采样点集之间的权矩阵来近似原权矩阵,然后利用该近似权矩阵的特征向量来近似原权矩阵的特征向量;Keuchel等人^[7]提出从权矩阵的列向量中进行采样,利用矩阵的奇异值分解来逼近原权矩阵,然后利用该近似权矩阵的特征向量来近似原权矩阵的特征向量。尽管这些近似方法获得了一些较好的实验结果,但是由于矩阵的特征向量不一定是稳定的,导致分割对象的边界偏移。据此本文提出了图像多阶抽样谱图聚类算法,通过多次抽样结果相对稳定原则,选择最具代表性的样本进行聚类训练,得出最终的谱聚类近似模型,解决了谱聚类应用于图像分割时谱难以计算的问题和抽样稳定性问

到稿日期:2009-08-17 返修日期:2009-10-26 本文受国家自然科学基金(60841003)资助。

朱 峰(1977—),男,讲师,主要研究方向为图像处理等,E-mail:zhuf@ujs.edu.cn;宋余庆(1959—),男,教授,主要研究方向为数据挖掘、知识发现、图像数据库系统等;朱玉全(1966—),男,教授,主要研究方向为数据挖掘、图像识别等。

题。

1 谱图聚类理论

任意特征空间的点集都可以采用一个无向图 $G=(V, E)$ 来表达,其中 V 是节点的集合, E 是连接节点的边的集合, V 的基 $N=|V|$ 。连接每两个节点的边均赋予权值 $w(u, v)$, 该权值衡量节点 u 和 v 的相似程度。如果将节点集 V 分成两个独立的子集 A 和 B , 其中 $B=V-A$, 那么通过移去连接 A 和 B 中所有节点的边就可以得到点集 A 和 B 之间的分离度, 称为割 (cut):

$$cut(A, B) = \sum_{u \in A, v \in B} w(u, v) \quad (1)$$

Wu 和 Leahy^[8] 提出一种基于最小割准则的聚类方法, 但是该方法容易划分出图中孤立点。为了克服这种现象, Shi 和 Malik^[5] 提出采用归一化割准则 (normalized cuts, Ncut) 来描述两类间的分离度, 定义如下:

$$Ncut(A, B) = \frac{cut(A, B)}{asso(A, V)} + \frac{cut(A, B)}{asso(B, V)} \quad (2)$$

式中, $asso(A, V) = \sum_{u \in A, v \in V} w(u, v)$ 为 A 中的节点与图中所有节点的连接权值之和。采用 Ncut 准则就可以克服划分孤立点的问题, 最小的 Ncut 值对应的划分即为图 G 的最优划分。在这种情况下, 最小化 Ncut 可以转化为如下的标准特征系统:

$$D^{-\frac{1}{2}}(D-W)D^{-\frac{1}{2}}z = \lambda z \quad (3)$$

式中, D 是 $N \times N$ 的对角矩阵, 其对角线上的元素为 $d_i = \sum_j w(i, j)$, W 是对称矩阵, 其元素为 $w(i, j)$, λ 和 z 分别为相应的特征值和特征矢量。特征系统 (3) 的第二个最小的特征值对应的特征矢量可以用来完成全图的最优划分, 从而得到对应图像的一个分割结果。可以采用递归算法以相同的方式进一步对分割得到的子图进行划分, 直至满足终止条件为止。由于计算特征值和特征矢量十分耗时, 一般采用近似的 Lanczos 方法来求解。基于归一化割谱图聚类算法的具体过程如下。

算法 1 基于归一化割谱图聚类算法

输入: n 个节点 $x_1, x_2, \dots, x_n$, 相似矩阵 $S \in R^{n \times n}$, 聚类类别数 k

输出: k 个聚类 $A_1, A_2, \dots, A_k$, 其中 $A_i = \{j | y_j \in C_i\}$

1. 构造相似图 $G=(V, E, W)$, W 为图 G 的加权关联矩阵;

2. 计算式 (3) 前 k 个特征值对应特征向量 $u_1, u_2, \dots, u_k$;

3. 设 $U \in R^{n \times k}$ 是以 $u_1, u_2, \dots, u_k$ 为列的矩阵;

4. For $i=1, 2, \dots, n$, 令 $y_i \in R^k$ 为矩阵 U 相应的第 i 行;

5. 应用 k -means 聚类法将点集 $(y_i)_{i=1, 2, \dots, n}$ 分成 k 个聚类 $C_1, C_2, \dots, C_n$ 。

2 基于多阶抽样谱图聚类图像分割

当图像的尺度较大时, 采用 Ncut 方法其对应的邻接权值矩阵 W 的维数也相应较大。如果采用基于像素的邻接权值矩阵, 我们必须求解一个如式 (3) 的 $N \times N$ 维的特征系统, 即使采用近似算法来优化实现, 对于大尺度的图像而言其计算复杂性仍然非常高, 而且划分的稳定性极大地依赖于参数的选择。另外, 特征系统的次小特征值一般非常小, 所以特征值计算的微小误差也会对相应特征矢量划分点的选择造成影响, 从而影响分割的结果。所有这些因素都限制了 Ncut 方法

的应用。

2.1 基本概念

定义 1 (相似度) 定义二元函数 $R: V \times V \rightarrow [0, 1]$, 若二元函数 R 满足

$$R(v_i, v_j) = R(v_j, v_i) = w_{ij}, i, j = 1, 2, \dots, N$$

式中, w_{ij} 为两个节点 i, j 的边权值, 则称 R 为两像素点之间的相似度函数。

显然有

$$W = (w_{ij})_{N \times N} = (R(v_i, v_j))_{N \times N}$$

定义 2 (点与类之间距离) 设像素点 $v \in V$, 类 $A \subset V$, 定义 v 和 A 之间的距离为

$$D(v, A) = 1 - \max\{R(v, v_j) | v_j \in A\}$$

定理 1 对于一个聚类 u , 如果取样本大小 s 满足:

$$s \geq fN + \frac{N}{|u|} \log\left(\frac{1}{\delta}\right) + \frac{N}{|u|} \sqrt{(\log\left(\frac{1}{\delta}\right))^2 + 2f|u| \log\left(\frac{1}{\delta}\right)} \quad (4)$$

那么, 样本中属于聚类 u 的点的个数小于 $f|u|$ 的概率小于 δ , $0 < \delta < 1, 0 < f < 1$ 。

证明: 对 $P(X < f|u|) < \delta$ 进行变形, 得:

$$P(X < (1 - (1 - \frac{f|u|}{\mu}))\mu) < \delta$$

由 chernoff 界 $P(X < (1 - \epsilon)\mu) < e^{-\frac{\epsilon^2 \mu}{2}}$ 结论可知, 上式成立的条件是

$$e^{-\frac{\mu(1 - \frac{f|u|}{\mu})^2}{2}} \leq \delta$$

令 $\mu = \frac{s|u|}{N}$, 上式关于 s 的解即得证。

从定理 1 可以看出, 样本至少有 $f|u|$ 点以很大概率属于聚类 u 。如果假设 $u_{\min}$ 是所有聚类中最小的一个聚类, $s_{\min}$ 是式 (4) 的右边以 $|u_{\min}|$ 替代 $|u|$ 的结果, 显然, 在式 (4) 中, 当 $u = u_{\min}$ 时, $|u| \geq |u_{\min}|$ 。所以当样本大小为 $s_{\min}$ 时, 可以保证以 $1 - \delta$ 的概率使得任意聚类 u 包含 $f|u|$ 个点。然而, 式 (4) 中最小采样数并不是随着 N 增加而增加, 而是随着聚类个数 k 增加而增加, 这是因为那些小的聚类不是我们需要的, 而可以看作孤立点。因此, 假设最小聚类为平均聚类数据的某个比例, 即 $|u_{\min}| = \frac{N}{k\rho}, \rho > 1$, 另设最小聚类至少有 ξ 个数据点,

则有 $f = \frac{\xi}{|u_{\min}|}$, 可得定理 1 的推论。

推论 1 设数据点数目 N 大于聚类数 k 且最小聚类至少有 ξ 个数据点, 那么独立于原始数据点个数的最小取样数目为:

$$s_{\min} = \xi k \rho + k \rho \log\left(\frac{1}{\delta}\right) + \sqrt{\log\left(\frac{1}{\delta}\right)^2 + 2\xi \log\left(\frac{1}{\delta}\right)} (\rho > 1) \quad (5)$$

2.2 算法描述

谱聚类应用于图像分割时存在权矩阵的谱难以计算的实际问题, 因此设计了一个图像多阶抽样谱图聚类算法。首先根据推论 1 中给出的最小采样数公式对像素点进行采样, 并对采样点利用谱聚类进行聚类, 本文采用相似度函数为:

$$w(i, j) = \begin{cases} e^{-\frac{\|X(i) - X(j)\|_2^2}{\sigma^2}}, & \|X(i) - X(j)\|_2 < r \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \quad (6)$$

根据采样定理,仅仅进行一次采样,采样结果存在一定不稳定性,本文采取多次抽样,消除抽样对谱聚类模型的稳定性影响,并设一个罚函数作为采样好坏的评价标准。罚函数具体定义如下:

$$Ncut_k = \frac{cut(A_1, V-A_1)}{assoc(A_1, V)} + \frac{cut(A_2, V-A_2)}{assoc(A_2, V)} + \dots + \frac{cut(A_k, V-A_k)}{assoc(A_k, V)} \quad (7)$$

最后根据定义 2 给出了像素点和类之间的距离,对剩余的点按距离最近原则进行聚类。具体算法描述如下:

算法 2 基于多阶抽样谱图聚类图像分割算法

输入:一幅图像 I , 相似矩阵 $S \in R^{n \times n}$, 聚类类别数 k

输出:图像聚类分割标签

1. 以图像 I 的像素点构造相似图 $G=(V, E, W)$;
2. 利用给定的 k, ρ, ξ, δ 值确定最小抽样数 s_{min} ;
3. 从图像 I 中不放回地随机抽取样本 I_s , 利用算法 1 进行聚类;
4. 转到第 2 步,直到 $|Ncut_k^{(t+1)} - Ncut_k^{(t)}| < \epsilon$ 终止。

5. 据定义 2 对剩余的像素计算点与各聚类类别距离,按距离最近原则将该像素划分到已知聚类中

3 实验结果与分析

为了验证论文提出的基于多阶抽样的谱图聚类图像分割算法,本实验使用 Dell 公司图像专用工作站, CPU 为 Intel(2) nl(TM), 速度 1.5GHz, 内存 1Gb, 硬盘 120Gb, matlab7.0 作为实验开发工具,实验数据来源于美国加州大学伯克利分校的 BSDb 标准测试图像数据库^[9]。令 $k=4, \rho=2, \xi=20$, 据式(5)计算采样数为 155。

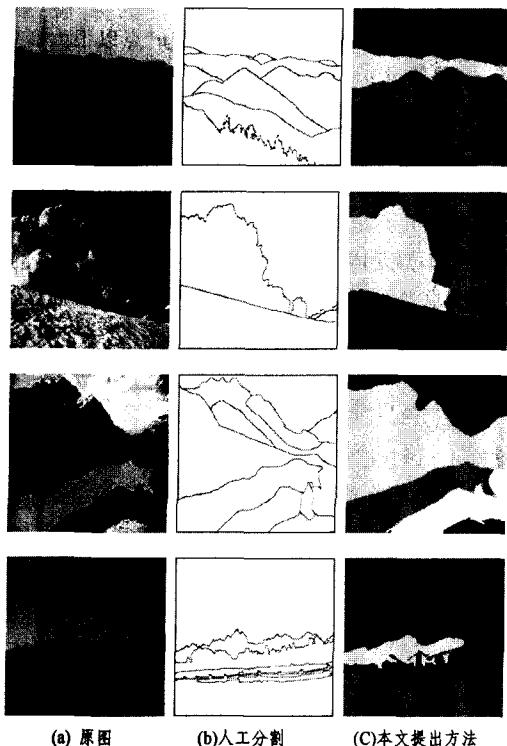


图 3 彩色图像本文方法分割结果与人工分割结果比较

图 3 是一组彩色图像分割结果,其中图 3(a1, b1, c1, d1) 为原始图像,图 3(a2, b2, c2, d2) 为人工分割结果^[10],图 3(a3, b3, c3, d3) 为本文提出方法的分割结果。从分割结果对比可以看出,本文提出的多阶抽样谱图聚类图像分割算法能够准

确地将目标区域分割出来,虽然分割结果在图像细节上面不够完善,但是本文所提方法时间复杂度为 $O(k * \xi)$,与图像大小无关,仅仅与分割类别数 K 及最小聚类含有 ξ 个数据点有关,大大提高了算法的执行效率。

结束语 针对谱聚类应用于图像分割时存在权矩阵的谱难以计算的实际问题,提出了一种多阶抽样谱图聚类图像分割算法。该方法根据 chernoff 界给出了最小采样数公式,对采样点利用谱聚类进行聚类,对剩余的点按距离最近原则进行聚类。针对数据采样具有随机性和不稳定性,提出采取多次抽样消除抽样对谱聚类模型稳定性的影响,并设一个罚函数作为采样好坏的评价标准。实验结果也显示了基于多阶抽样的谱图聚类分割算法的有效性。但是基于多阶抽样的谱图聚类分割算法对噪声比较敏感,怎样抑制噪声的影响是下一步研究的目标。

参考文献

- [1] Kanungo T, Mount D M, Netanyahu N S, et al. An Efficient k-Means Clustering Algorithm; Analysis and Implementation[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2002, 24(7): 881-892
- [2] Mark Junjie Li, Michael K Ng, Yiu-ming Cheung, et al. Agglomerative Fuzzy K-Means Clustering Algorithm with Selection of Number of Cluster[J]. IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering, 2008, 20(11): 1519-1534
- [3] Toivanen P J, Ansamaki J, Parkkinen J P S, et al. Edge detection in multispectral images using the self-organizing map[J]. Pattern Recognition Letters, 2003, 24(16): 2987-2994
- [4] Greenspan H, Goldberger J. Constrained Gaussian mixture model framework for automatic segmentation of MR brain image [J]. IEEE Transactions on Medical Imaging, 2006, 25(9): 1233-1245
- [5] Shi Jianbo, Malik J. Normalized Cuts and Image Segmentation [J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2000, 22(8): 888-905
- [6] Fowlkes C, Belongie S, Chung F, et al. Spectral Grouping Using the Nystrom Method[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2004, 26(2): 214-225
- [7] Jens K, Daniel K. Efficient combination of probabilistic sampling approximations for robust image segmentation [J]. Lecture Notes in Computer Science (including subseries Lecture Notes in Artificial Intelligence and Lecture Notes in Bioinformatics), 2006, 4174: 41-50
- [8] Wu Z, Leahy R. An optimal graph theoretic approach to data clustering: theory and its application to image segmentation[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1993, 15(11): 1101-1113
- [9] Fowlkes C, Martin D, Malik J. The Berkeley Segmentation Dataset and Benchmark (BSDb)[OL]. www.cs.berkeley.edu/projects/vision/grouping/segbench/
- [10] Arbelaez P, Maire M, Fowlkes C, et al. From contours to regions: an empirical evaluation[A]// IEEE International Conference on Computer Vision and Pattern Recognition, CVPR[C]. 2009