

# 稀疏约束下非负矩阵分解的增量学习算法

王万良 蔡 竞

(浙江工业大学计算机科学与技术学院 杭州 310023)

**摘要** 非负矩阵分解(NMF)是一种有效的子空间降维方法。为了改善非负矩阵分解运算规模随训练样本增多而不断增大的现象,同时提高分解后数据的稀疏性,提出了一种稀疏约束下非负矩阵分解的增量学习算法,该算法在稀疏约束的条件下利用前一次分解的结果参与迭代运算,在节省大量运算时间的同时提高了分解后数据的稀疏性。在ORL和CBCL人脸数据库上的实验表明了该算法降维的有效性。

**关键词** 子空间降维,稀疏约束,非负矩阵分解,增量学习

**中图分类号** TP181 **文献标识码** A **DOI** 10.11896/j.issn.1002-137X.2014.08.051

## Incremental Learning Algorithm of Non-negative Matrix Factorization with Sparseness Constraints

WANG Wan-liang CAI Jing

(College of Computer Science and Technology, Zhejiang University of Technology, Hangzhou 310023, China)

**Abstract** Non-negative matrix factorization is a useful method of subspace dimensionality reduction. However, with the increasing of training samples, the computing scale of non-negative matrix factorization increases rapidly. To solve this problem and improve the sparseness of the data obtained after factorization as well, an incremental learning algorithm of non-negative matrix factorization with sparseness constraints was proposed in this paper. Using the results of previous factorization involved in iterative computation with sparseness constraints, the cost of the computation is reduced and the sparseness of data after factorization is highly improved. Experimental results on both ORL and CBCL face databases show that the proposed method is effective on dimensionality reduction.

**Keywords** Subspace dimensionality reduction, Sparseness constraints, Non-negative matrix factorization, Incremental learning

### 1 引言

子空间降维是机器学习领域以及图像处理过程中一种常用的方法。该方法是将高维的特征向量映射到低维子空间进行分类,从而有效避免了维度灾难<sup>[1]</sup>(Curse of Dimensionality)导致的相似度度量上的偏差,有利于数据存储及分类等后续处理。有别于主成分分析<sup>[2]</sup>(PCA)、独立成分分析<sup>[3]</sup>(ICA)等传统降维方法,1999年由Lee和Seung<sup>[4,5]</sup>在杂志《nature》上提出的非负矩阵分解算法(NMF),在非负约束下实现了矩阵的分解,将人脸图像表示成基图像的线性组合,使分解后的数据具有一定的稀疏性和可解释性。之后国内外学者在此基础上又提出了许多基于NMF算法的改进<sup>[6-11]</sup>,并成功应用于模式识别与图像处理等领域<sup>[12-16]</sup>。其中Hoyer<sup>[6,7]</sup>将NMF算法和稀疏编码思想相结合,提出了具有稀疏约束的非负矩阵分解算法(NMFSC),使分解后的因子矩阵具有更好且可控的稀疏性;Serhat等人<sup>[8]</sup>提出了增量式非负矩阵分解算法(INMF),从而避免新训练样本加入后对基矩阵与系数矩阵的重新运算,节省了大量的运算时间;姜伟等人<sup>[9]</sup>提出了稀疏约束图正则非负矩阵分解算法(GNMFSC),其不仅考

虑了数据的几何信息,并且对系数矩阵增加稀疏约束,使分解后的人脸图像具有更高的识别率。

本文将稀疏约束的思想引入非负矩阵分解的增量学习中,提出了稀疏约束下非负矩阵分解的增量学习算法(INMF-SC),在初始训练样本数据规模庞大的情况下,其不仅提高了分解后系数矩阵和基矩阵的稀疏度,节省了降维后数据存储的空间,同时也避免了新训练样本加入时的大量重复运算,大大提高了运算效率。

### 2 传统非负矩阵分解(NMF)

假设有训练样本集合 $\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ ,其中 $v_i (i=1, \dots, m)$ 为 $n$ 维非负列向量, $m$ 为训练样本个数。令矩阵 $V=[v_1, v_2, \dots, v_m] (V \in R^{n \times m})$ ,则非负矩阵分解可表示为两个非负矩阵 $W (W \in R^{n \times r})$ 和 $H (H \in R^{r \times m})$ 的乘积:

$$V \approx WH \tag{1}$$

其中, $W$ 称为基矩阵, $H$ 称为系数矩阵。 $r$ 代表基向量的个数,当 $r$ 的取值满足 $r \ll \frac{mn}{m+n}$ 时,原始的数据矩阵 $V$ 得到了有效的压缩。

由式(1)可知,非负矩阵分解是一种近似分解,因此需要

到稿日期:2013-10-02 返修日期:2013-12-23 本文受国家自然科学基金(61070043)资助。

王万良(1957-),男,教授,博士生导师,主要研究方向为计算机智能自动化,E-mail:caijing@zjtcxy.cn;蔡 竞(1985-),男,博士生,助教,主要研究方向为图像处理、计算机视觉。

对其建立合适的损失函数,通过对其最小化来求解  $W$  和  $H$ 。基于等方高斯噪声的损失函数因其简单、有效且易于理解而被国内外众多学者广泛使用,其表达方式如下:

$$F = \frac{1}{2} \|V - WH\|^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (V_{ij} - (WH)_{ij})^2 \quad (2)$$

$$\text{s. t. } W \geq 0, H \geq 0$$

由于损失函数  $F$  单独对于  $W$  或  $H$  来说是凸函数,因此可采用梯度下降法分别对其元素进行交替迭代求解,直至满足收敛条件。其更新规则如下:

$$H_{aj} \leftarrow H_{aj} \frac{(W^T V)_{aj}}{(W^T W H)_{aj}} \quad (3)$$

$$W_{ia} \leftarrow W_{ia} \frac{(V H^T)_{ia}}{(W H H^T)_{ia}} \quad (4)$$

其中,  $i=1, \dots, n, j=1, \dots, m, a=1, \dots, r$ 。

### 3 稀疏约束下非负矩阵分解的增量学习(INMFSC)

作为一种高效直观的子空间降维算法,传统非负矩阵分解算法最有用的特性之一就是分解后产生了低秩矩阵,即用少量的元素有效实现了大量数据的表达,节省了数据存储空间。此外,经分解后的基图像在足够稀疏的情况下,有效代表了人脸的头发、眼睛、嘴巴等部分,符合人类思维中局部构成整体的思想,具有较好的可解释性。

然而传统非负矩阵分解存在的一个重要问题就是每次新增训练样本数据时,其分解后的基矩阵  $W$  和系数矩阵  $H$  都需要重新进行迭代计算。在数据规模庞大的情况下,迭代求解所消耗的时间也是非常巨大的。本文提出的稀疏约束下非负矩阵分解的增量学习算法(INMFSC)则运用了分块矩阵的思想,在优化了数据稀疏度的基础上大大降低了新训练样本加入后重新学习阶段的运算时间,并且使学习后获得的新基矩阵  $W$  以及系数矩阵  $H$  的稀疏度有了明显提高。下面介绍该算法。

令  $W_k$  和  $H_k$  分别代表由  $k$  个训练样本构成的非负矩阵  $V$  分解后的基矩阵和系数矩阵,其中  $k \geq r$ 。分别对其添加基于  $l_1$ -范数正则化的稀疏约束条件,并用  $F_k$  代表此时的损失函数,表达式如下:

$$\begin{aligned} F_k &= \frac{1}{2} \|V - W_k H_k\|^2 + \alpha \|W_k\|_1 + \beta \|H_k\|_1 \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k (V_{ij} - (W_k H_k)_{ij})^2 + \alpha \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^r (W_k)_{ij} + \beta \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^r (H_k)_{ij} \end{aligned} \quad (5)$$

其中,稀疏约束系数  $\alpha$  和  $\beta$  均为大于等于 0 的常数,通过对  $W_k$  和  $H_k$  做稀疏约束可使样本数据分解后具备较高的稀疏性,且稀疏程度与  $\alpha$  和  $\beta$  的值成正比。

同样地,当第  $k+1$  个训练样本加入后,损失函数  $F_{k+1}$  则为:

$$\begin{aligned} F_{k+1} &= \frac{1}{2} \|V - W_{k+1} H_{k+1}\|^2 + \alpha \|W_{k+1}\|_1 + \beta \|H_{k+1}\|_1 \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{k+1} (V_{ij} - (W_{k+1} H_{k+1})_{ij})^2 + \alpha \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^r (W_{k+1})_{ij} + \\ &\quad \beta \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{k+1} (H_{k+1})_{ij} \end{aligned} \quad (6)$$

基矩阵  $W$  的每一列可以看作构成某一训练样本的组件,而系数矩阵  $H$  的每一列  $h_i$  代表了每个组件的参与程度。随着训练样本数量的增多,新训练样本的表达能力逐渐减小。

因此当训练样本数量足够大时,新加入训练样本对于作为组件集合的基矩阵  $W$  并不会太大的影响,其对应的系数向量  $h_i$  受到影响也同样较小。于是损失函数  $F_k$  可以做如下近似:

$$\begin{aligned} F_k &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k (V_{ij} - (W_{k+1} H_{k+1})_{ij})^2 + \alpha \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^r (W_{k+1})_{ij} \\ &\quad + \beta \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^k (H_{k+1})_{ij} \\ &\cong \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k (V_{ij} - (W_{k+1} H_k)_{ij})^2 + \alpha \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^r (W_{k+1})_{ij} + \beta \\ &\quad \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^k (H_k)_{ij} \end{aligned} \quad (7)$$

由此可以得到  $F_k$  与  $F_{k+1}$  之间的近似关系,如式(8)所示,其中  $f_k$  代表新样本加入后损失函数的增量式。

$$\begin{aligned} F_{k+1} &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{k+1} (V_{ij} - (W_{k+1} H_{k+1})_{ij})^2 + \alpha \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^r (W_{k+1})_{ij} \\ &\quad + \beta \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^k (H_{k+1})_{ij} \\ &\cong F_k + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n ((v_{k+1})_i - (W_{k+1} h_{k+1})_i)^2 + \beta h_{k+1} \\ &\cong F_k + f_{k+1} \end{aligned} \quad (8)$$

在得到了损失函数的增量式表达后,利用梯度下降法得到系数矩阵增量部分  $h_{k+1}$  的更新规则:

$$(h_{k+1})_a \leftarrow (h_{k+1})_a - \eta \frac{\partial F_{k+1}}{\partial (h_{k+1})_a} \quad (9)$$

其中求导部分的计算如下:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_{k+1}}{\partial (h_{k+1})_a} &\cong \frac{\partial}{\partial (h_{k+1})_a} (F_k + f_{k+1}) = \frac{\partial f_{k+1}}{\partial (h_{k+1})_a} \\ &= \frac{\partial}{\partial (h_{k+1})_a} \left[ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n ((v_{k+1})_i - (W_{k+1} h_{k+1})_i)^2 + \beta (h_{k+1})_i \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial (h_{k+1})_a} \left[ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n ((v_{k+1})_i - \sum_{k=1}^r (W_{k+1})_{ik} (h_{k+1})_k)^2 + \beta (h_{k+1})_i \right] \\ &= \sum_{i=1}^n (((v_{k+1})_i - (W_{k+1} h_{k+1})_i) (-W_{k+1})_{ia}) + \beta \\ &= -(W_{k+1}^T v_{k+1})_a + (W_{k+1}^T W_{k+1} h_{k+1})_a + \beta \end{aligned} \quad (10)$$

为保证迭代过程中数据的非负性,遵循乘性迭代规则得到梯度下降的步长:

$$\eta = \frac{(h_{k+1})_a}{(W_{k+1}^T W_{k+1} h_{k+1})_a + \beta} \quad (11)$$

于是得到  $h_{k+1}$  最终更新规则如下:

$$(h_{k+1})_a \leftarrow (h_{k+1})_a \frac{(W_{k+1}^T v_{k+1})_a}{(W_{k+1}^T W_{k+1} h_{k+1})_a + \beta} \quad (12)$$

用相同方法可求得基矩阵  $W$  的更新规则为:

$$(W_{k+1})_{ia} \leftarrow (W_{k+1})_{ia} \frac{(V_k H_k^T + v_{k+1} h_{k+1}^T)_{ia}}{(W_{k+1} H_k H_k^T + W_{k+1} h_{k+1} h_{k+1}^T)_{ia} + \alpha} \quad (13)$$

由此我们可以得到 INMFSC 算法步骤如下:

1. 随机初始化正矩阵  $W$  和  $H$ 。
2. 对于训练样本集  $V$  (包含  $k$  个训练样本) 按以下规则进行迭代,直至满足收敛条件:

$$H_{aj} \leftarrow H_{aj} \frac{(W^T V)_{aj}}{(W^T W H)_{aj}}$$

$$W_{ia} \leftarrow W_{ia} \frac{(V H^T)_{ia}}{(W H H^T)_{ia}}$$

3. 每加入一个新训练样本  $v_{k+1}$  时,按以下规则更新  $W$  和  $H$  直至满足收敛条件,其中  $H_{k+1} = [H_k, h_{k+1}]$ ,  $h_{k+1}$  初始化为  $h_k$ 。

$$(W_{k+1})_{ia} \leftarrow (W_{k+1})_{ia} \frac{(V_k H_k^T + v_{k+1} h_{k+1}^T)_{ia}}{(W_{k+1} H_k H_k^T + W_{k+1} h_{k+1} h_{k+1}^T)_{ia} + \alpha}$$

$$(h_{k+1})_a \leftarrow (h_{k+1})_a \frac{(W_{k+1}^T v_{k+1})_a}{(W_{k+1}^T W_{k+1} h_{k+1})_a + \beta}$$

以上各式中  $i=1, \dots, n, j=1, \dots, m, a=1, \dots, r, \alpha$  和  $\beta$  均为非负常数。

## 4 实验结果及分析

### 4.1 数据描述及参数设置

ORL 人脸数据库是由剑桥大学 AT&T 实验室创建的, 该数据库包含 40 人共 400 幅人脸图像, 其中部分图像包含了姿态、表情和面部饰物的变化。选取前 300 幅人脸图像作为初始训练样本, 将每幅大小为  $92 \times 112$  像素的图像变为  $10304 \times 1$  的列向量, 则初始训练样本规模为  $10304 \times 300$  的矩阵, 而剩余 100 幅图像作为新增训练样本。根据训练样本规模, 设置基矩阵的维数  $r$  为 25, 稀疏约束的参数  $\alpha = \beta = 1$ , 梯度下降法的初始迭代和增量迭代次数均为 150 次。

CBCL 人脸数据库是由麻省理工大学媒体实验室创建的, 该数据库包含 16 人共 2592 幅不同姿势、光照和大小的人脸图像, 其中前 2429 幅用于训练。选取前 2300 幅人脸图像作为初始训练样本, 将每幅大小为  $19 \times 19$  像素的图像变为  $361 \times 1$  的列向量, 则初始训练样本规模为  $361 \times 2300$  的矩阵, 剩余 129 幅图像作为新增训练样本。根据训练样本规模, 设置基矩阵的维数  $r$  为 49, 稀疏约束的参数  $\alpha = \beta = 0.005$ , 梯度下降法的初始迭代和增量迭代次数均为 150 次。

实验环境为 Matlab7. 11 运行于 Intel Core i3-370M 2. 40GHz, 3G 内存 PC 机的 Windows 7 32 位系统。

### 4.2 运算时间对比

在 ORL 人脸数据库上, 初始训练样本数为 300 的情况下 NMF、INMF 以及 INMFSC 3 种算法随新增样本数量的增多而分别消耗的运算时间如表 1 所列。在 CBCL 人脸数据库上初始训练样本为 2300 的情况下, 3 种算法的时间消耗情况如表 2 所列。

表 1 ORL 库新增训练样本时 3 种算法对应时间消耗(初始训练样本数为 300)

新增训练样本	NMF/s	INMF/s	INMFSC/s
1	15.76	1.63	0.03
5	15.94	7.97	0.14
10	16.42	16.17	0.28
50	19.14	80.16	1.41
100	24.92	162.87	2.89

表 2 CBCL 库新增训练样本时 3 种算法对应时间消耗(初始训练样本数为 2300)

新增训练样本	NMF/s	INMF/s	INMFSC/s
1	8.566	0.135	0.025
5	8.582	0.448	0.184
10	8.609	0.901	0.441
50	8.891	5.141	2.429
100	9.054	10.502	5.682

根据表 1 和表 2 的结果可知, 增量学习算法 INMF 和 INMFSC 的运算时间随着新增训练样本数量的增加呈线性增长。当新增训练样本数量较少时, 增量学习算法较传统的 NMF 算法有着明显的速度优势。而当新增训练样本超过一定数量时, 传统增量学习算法 INMF 的运算效率则越来越低, 而本文提出的 INMFSC 算法依然保持着较高的运算速度。此外, 通过对表 1 与表 2 的比较可发现, INMFSC 算法在

样本维数远远大于样本个数的情况下具有更高的运算效率。

### 4.3 稀疏度量

根据文献[7]提出的稀疏度量公式对分解后的基矩阵和系数矩阵进行度量, 公式如下:

$$sp(x) = \frac{\sqrt{n} - \frac{\sum |x_i|}{\sqrt{\sum x_i^2}}}{\sqrt{n} - 1} \quad (14)$$

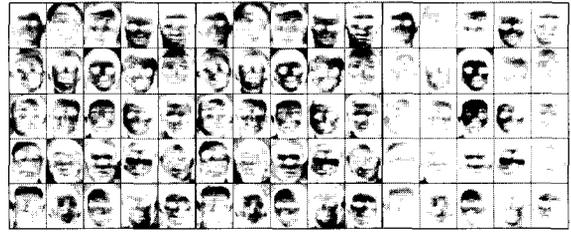
其中,  $n$  代表向量  $x$  的维度,  $x_i$  代表向量  $x$  第  $i$  个元素的值。  $sp(x) \in [0, 1]$ ,  $sp(x)$  的值越接近 1 表示向量的稀疏度越高。

在当前实验环境及参数设置下, 以式(14)作为稀疏度量标准, 则经过 NMF、INMF 和 INMFSC 3 种算法分解后得到的因子矩阵(包括基矩阵  $W$  和系数矩阵  $H$ )稀疏度如表 3 所列。其中 NMF 算法得到的是初始训练样本分解后的因子矩阵, 而 INMF 算法和 INMFSC 算法得到的是新增训练样本分解后的因子矩阵。

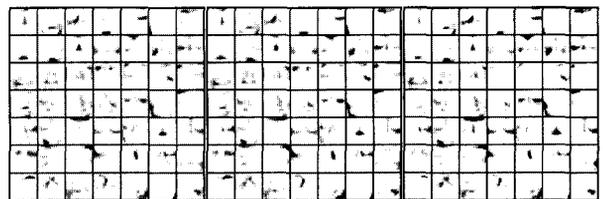
表 3 3 种算法得到的因子矩阵稀疏度

	ORL 人脸数据库		CBCL 人脸数据库	
	基矩阵 W	系数矩阵 H	基矩阵 W	系数矩阵 H
NMF	0.323	0.302	0.624	0.503
INMF	0.328	0.368	0.626	0.529
INMFSC	0.469	0.648	0.704	0.575

从表 3 中可以看到, INMFSC 算法分解后得到的基矩阵  $W$  和系数矩阵  $H$  均较 NMF 算法和 INMF 算法所得到的更为稀疏, 有效提高了存储效率。将  $r$  维的基矩阵  $W$  重构成  $r$  个人脸基图像, 如图 1 所示, 其中 ORL 人脸数据库基矩阵维度  $r$  为 25, CBCL 人脸数据库基矩阵维度  $r$  为 49。



(a) ORL 人脸数据库



(b) CBCL 人脸数据库

图 1 3 种算法得到的基图像表示

通过图 1 中 3 种算法在 ORL 及 CBCL 两个人脸数据库上的对比可知, 相较于 NMF 算法和 INMF 算法, 本文提出的 INMFSC 算法不仅可使分解后的数据更为稀疏, 同时也使基图像更具有局部表达性。

**结束语** 针对传统非负矩阵分解在新增训练样本时运算速度较慢且数据稀疏度一般的问题, 提出了稀疏约束下非负矩阵分解的增量学习算法, 通过对增量目标函数添加正则化项, 不仅提高了数据分解后的稀疏度, 增强了数据表达的可解释性, 同时很大程度上提高了运算效率。实验结果证明, 本文算法是有效的, 对处理大规模数据的增量学习有着较好的降维效果。

## 参考文献

- [1] Powell W B. Approximate Dynamic Programming, Solving the Curses of Dimensionality[M]. New York: John Wiley & Sons, 2007:92-99
- [2] Turk M, Pentland A. Eigen faces for recognition[J]. Journal of Cognitive Neuroscience, 1991, 3(1): 71-86
- [3] Bartlett M S, Lades H M, Sejnowski T J. Independent component representations for face recognition[C]// Proceedings of The International Society for Optical Engineering. San Jose, 1998, 2399(3): 528-539
- [4] Lee D, Seung H S. Learning the parts of objects by non-negative matrix factorization[J]. Nature, 1999, 401(6755): 788-791
- [5] Lee D, Seung H S. Algorithms for non-negative matrix factorization[C]// Proceedings of Advances in Neural Information Processing Systems. Vancouver, 2000: 556-562
- [6] Hoyer P O. Non-negative sparse coding [C]// Proceedings of IEEE Workshop on Neural Network for Signal Processing, Martigny. 2002: 557-565
- [7] Hoyer P O. Non-negative matrix factorization with sparseness constraints[J]. Journal of Machine Learning Research, 2004, 5(9): 1457-1469
- [8] Bucak S S, Günsel B. Incremental subspace learning via non-negative matrix factorization[J]. Pattern Recognition, 2009, 42(5):

(上接第 223 页)

**结束语** Ajax 技术在当前主流的 Web 应用中被频繁地使用到。本文在对基于 Ajax 技术的 Web 应用的建模过程中, 提出将网页中会引起局部刷新的部分划分成多个子部分即网页状态元素, 定义网页状态元素上的 Ajax 操作集及相应的值域并根据这些网页状态元素的变化定义网页不同的子状态。将网页内部的所有状态封装在一起, 使之与外部状态变化独立, 这样能更好地反映网页内部的状态的变化, 使得模型的结构更加清晰, 方便针对一张网页内的状态迁移进行测试。本文利用 UML 状态图支持组合状态的特性来描述 Web 应用的模型, 并将其转化为 Kripke 结构, 使用 CTL 公式来描述模型的陷阱性质。使用模型检验工具 SMV 产生反例并抽取测试用例。在复杂的 Web 应用中一张网页内会出现异步刷新的部分并且 Ajax 请求通常会有很多, 一张网页的内部结构和状态迁移会复杂很多, 建模的难度非常大, 下一步将研究如何简化对复杂的网页结构和状态迁移的 Web 应用建模。

## 参考文献

- [1] Garrett J J. Ajax: A New Approach to Web Applications [OL]. <http://adaptivepath.com/ideas/essays/archives/000385.php>
- [2] Li L P, Miao H K, Chen S B. Test Generation for Web Applications Using Model-Checking[C]//SNPD. 2010: 237-242
- [3] Grumberg, Long D E. Model checking and modular verification [J]. ACM Transactions on Programming Languages and Systems, 1994, 16(3): 843-871
- [4] 颜炯, 王戟, 陈火旺. 基于模型的软件测试综述[J]. 计算机科学, 2004, 31(2): 184-187

788-797

- [9] Guan Nai-yang, Tao Da-cheng, Luo Zhi-gang, et al. Online non-negative matrix factorization with robust stochastic approximation[J]. IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems, 2012, 23(7): 1087-1099
- [10] 姜伟, 李宏, 余震国, 等. 稀疏约束正则非负矩阵分解[J]. 计算机学报, 2013, 40(1): 218-220, 256
- [11] 史加荣, 焦李成, 尚凡华. 不完全非负矩阵分解的加速算法[J]. 电子学报, 2011, 39(2): 291-295
- [12] 同鸣, 张伟, 张建龙, 等. 一种基于部分基矩阵稀疏约束非负矩阵分解的抵抗大强度剪切攻击视频水印构架[J]. 电子与信息学报, 2012, 34(8): 1819-1826
- [13] 施蓓琦, 刘春, 孙伟伟, 等. 应用稀疏非负矩阵分解聚类实现高光谱影像波段的优化选择[J]. 测绘学报, 2013, 42(3): 351-358
- [14] 方蔚涛, 马鹏, 成正斌, 等. 二维投影非负矩阵分解算法及其在人脸识别中的应用[J]. 自动化学报, 2012, 38(9): 1503-1512
- [15] Liu Xu, Liu Tiao-tiao, Bai Wen-wen, et al. Encoding of rat working memory by power of multi-channel local field potentials via sparse non-negative matrix factorization [J]. Neurosci Bull, 2013, 29(3): 279-286
- [16] Guan Nai-yang, Zhang Xiang, Luo Zhi-gang, et al. Sparse representation based discriminative canonical correlation analysis for face recognition[C]// Proceedings of International Conference on Machine Learning and Applications. Boca Raton, 2012: 51-56

- [5] 曾红卫. Web 应用的验证与测试方法研究[D]. 上海: 上海大学, 2008
- [6] Hierons R M, Bogdanov K, Bowen J P, et al. Using formal specifications to support testing [J]. ACM Computing Surveys (CSUR), 2009, 41(2): 1-76
- [7] Ammann P, Ding W, Xu D. Using a model checker to test safety properties[C]// Proceedings of the 7th International Conference on Engineering of Complex Computer Systems (ICECCS 2001). IEEE Press: New York, 2001: 212-221
- [8] Fraser G, Wotawa F, Ammann P E. Testing with model checkers: a survey[J]. Software Testing, Verification and Reliability, 2009, 19(3): 215-261
- [9] Marchetto A, Tonella P, Ricca F. State-based testing of Ajax Web applications[C]// Proceedings of the 1st IEEE International Conference on Software Testing Verification and Validation (ICST'08). IEEE Computer Society, 2008: 120-130
- [10] Mesbah A, Bozdog E, van Deursen A. Crawling Ajax by Inferring User Interface State Changes [C] // Eighth International Conference, Web Engineering, ICWE'08. 2008: 122-134
- [11] Mesbah A, van Deursen A, Roest D. Invariant-based automatic testing of modern Web applications[J]. IEEE Transactions on Software Engineering (TSE), 2012, 38(1): 35-53
- [12] McMillan K L. The SMV System for SMV version 2. 5. 4 [OL]. <http://www.cs.cmu.edu/modelcheck/smv/smvmanual.ps>
- [13] Fraser G, Gargantini A. An evaluation of model checkers for specification based test case generation[C]// ICST. IEEE Computer Society, 2009: 41-50