

基于多特定类的序决策表下近似约简

于天佑^{1,2} 张楠^{1,2} 岳晓冬³ 童向荣^{1,2} 孔贺庆^{1,2}

(烟台大学数据科学与智能技术山东省高校重点实验室 山东烟台 264005)¹

(烟台大学计算机与控制工程学院 山东烟台 264005)² (上海大学计算机工程与科学学院 上海 200444)³

摘 要 属性约简是粗糙集理论研究的重要内容之一,通过属性约简可以获取给定信息系统的¹最小特征子集。经典的序决策表属性约简是关于决策属性中的所有决策类的约简,但在实际应用中,由于决策者的偏好或者部分决策类数据的缺失,往往仅需要获得特定决策类的属性约简。基于这种考虑,文中回顾了序决策表的优势关系与下近似约简,定义了基于序决策表的单特定类与多特定类下近似约简,构造了相应的差别矩阵,提出了基于多特定类的序决策表下近似属性约简算法。基于多特定类的序决策表下近似约简可以较好地退化为基于单特定类的序决策表下近似约简或基于经典全决策类的序决策表下近似约简,是一种更加广泛的约简框架。实验采用了 6 组 UCI 数据集,分别在每个数据集上计算了 3 个单特定类和 3 组多特定类的约简,并将约简结果和约简效率与经典全类下近似约简、上近似约简及最大分布约简 3 个算法的约简结果和约简效率进行了比较。实验结果表明,在选定的特定类的数量相对全部决策类的数量较少时,约简的结果可能会更短,约简的效率也会有不同程度的提升。

关键词 粗糙集,属性约简,多特定类,序决策表,差别矩阵

中图法分类号 TP311 文献标识码 A DOI 10.11896/jsj.kx.180901781

Multi-class-specific Attribute Reduction of Lower Approximation in Ordered Decision Tables

YU Tian-you^{1,2} ZHANG Nan^{1,2} YUE Xiao-dong³ TONG Xiang-rong^{1,2} KONG He-qing^{1,2}

(Key Lab for Data Science and Intelligence Technology of Shandong Higher Education Institutes,
Yantai University, Yantai, Shandong 264005, China)¹

(School of Computer and Control Engineering, Yantai University, Yantai, Shandong 264005, China)²

(School of Computer Engineering and Science, Shanghai University, Shanghai 200444, China)³

Abstract Attribute reduction is one of the important research topic in rough set theory. The minimal feature subset of a given information system can be obtained by attribute reduction. Classical attribute reduction in ordered decision system is about all decision classes in decision attribute. However, in practice, considering the preference of decision maker and the lack of some decision data, only attribute reduction of some specific decision classes is needed. Based on this consideration, in this paper, the dominance relations and lower approximation reduction in ordered decision table were reviewed, the single-class-specific and multi-class-specific lower approximation reduction in ordered decision table were presented, a discernibility matrix for this reduction was introduced, and an algorithm of lower approximation attribute reduction in ordered decision system was proposed. The multi-class-specific lower approximation reduction can degenerate to single-class-specific reduction or classical reduction, so it is a more general reduction framework. In the experiment, 6 sets of UCI data sets were used, 3 single-class-specific reducts and 3 multi-class-specific reducts were calculated on each data set, and the reduction result and efficiency were compared with the result and efficiency of classical lower, upper approximation reduction and maximum distribution reduction. Experiment results show that when the number of selected specific classes is less than all decision classes, the reduct may be shorter, and the efficiency will be improved to varying degrees.

Keywords Rough set, Attribute reduction, Multi-class-specific, Ordered decision table, Discernibility matrix

到稿日期:2018-09-20 返修日期:2018-12-24 本文受国家自然科学基金项目(61403329,61572418,61702439,61572419,61502410),山东省自然科学基金项目(ZR2018BA004,ZR2016FM42),烟台大学研究生科技创新基金项目(YDZD1807)资助。

于天佑(1995—),男,硕士生,主要研究方向为粗糙集、数据挖掘与机器学习,E-mail:anso_y@163.com;张楠(1979—),男,博士,硕士生导师,CCF 会员,主要研究方向为粗糙集、认知信息学和人工智能,E-mail:zhangnan0851@163.com(通信作者);岳晓冬(1981—),男,博士,副教授,硕士生导师,CCF 会员,主要研究方向为机器学习、粗糙集、软计算和数据挖掘;童向荣(1975—),男,博士,教授,硕士生导师,主要研究方向为多 Agent 系统、分布式人工智能与数据挖掘技术;孔贺庆(1995—),男,硕士生,主要研究方向为粗糙集与机器学习。

1 引言

1982 年,波兰学者 Pawlak 教授提出了粗糙集理论(rough set theory)^[1-2],该理论可以有效地处理不确定或不精确的数据,现已被广泛应用于数据挖掘、近似计算、认知科学、模式识别与人工智能等研究领域。经典的 Pawlak 粗糙集理论采用等价关系对决策表中的论域进行划分,并通过正域、负域和边界域来分辨确定性信息和不确定性信息^[3]。决策表中可能含有部分冗余属性,将这些冗余属性剔除可以使得决策表的分类能力保持不变;通过删除冗余属性来简化对决策的描述的方法被称为属性约简。删除决策表中的冗余属性,留下的分类能力不变的属性集子集为该决策表的约简的结果。不混淆时,约简的结果通常亦简称为“约简”。属性约简是粗糙集理论中十分重要的研究内容之一,目前存在十余种不同目标的属性约简。下近似约简是经典粗糙集中较早被关注的一种约简,用于保留决策表中的确定性信息。为求解属性约简,Skowron 于 1992 年提出了差别矩阵法^[4]。该方法采用差别矩阵来保存所有的差别信息,再通过命题公式化简来求解全部的约简。目前,差别矩阵法已成为一种常用的约简求解方法。

经典粗糙集中的决策表采用等价关系进行分类,但在实际生活中,有大量的问题是基于序关系的。在序决策表下,按照属性值将对象进行排序,其中存在递增或递减的偏序关系。序决策表是决策表在覆盖关系上的一种拓展,为研究其中的不确定性信息,需要对其进行属性约简来简化描述,因此序决策表的属性约简有很大的研究价值和应用价值。现如今,基于序关系的粗糙集理论已经得到了较为深入的探索^[5-13],相应的属性约简方法也已经较为完善^[14-21]。Xu 等^[22-25]对粗糙集与序关系的结合进行了大量的研究,Qian 等^[26-27]对序关系粗糙集模型进行了进一步拓展。

在以往的研究工作中,属性约简通常会考虑决策属性中的全部决策类;但在某些情况下,可以只对决策属性中的部分决策类进行约简,这种约简方式被称为特定类约简。只计算一个决策类的约简被称为单特定类约简,计算多个特定类的约简被称为多特定类约简。特定类约简是局部约简的一种,在不混淆的情况下,单特定类约简也可直接称为局部约简。近年来,特定类的特征选择方法引起了越来越多的关注^[28-34]。Liu 等^[28]提出了经典粗糙集下基于差别矩阵的第 l 决策类正域约简、第 l 决策类分布约简以及第 l 决策类 β -分布约简。Qian 等^[29]提出了特定类正域约简的启发式方法。Yao 等^[30]分析了特定类约简的基本性质,并将其应用于三支决策。上述研究未对序决策表中下近似的特定类与多特定类的约简进行讨论。本文提出了利用差别矩阵计算序决策表的多特定类下近似属性约简的方法。

基于差别矩阵的序决策表多特定类下近似属性约简是一种更加广泛的约简框架,支持对多个感兴趣的特定类进行约简。当多特定类约简只取一个决策类时,约简等价于序决策表单特定类下近似约简;当取全部决策类时,约简退化为基于经典的全决策类的序决策表下近似约简。

本文第 2 节介绍了序决策表及其下近似约简的相关概

念;第 3 节提出了序决策表下单特定类与多特定类的下近似约简差别矩阵,并简单描述了利用所提出的差别矩阵求解约简的算法;第 4 节通过实验比较了上近似约简^[22]、最大分布约简^[23]、下近似约简、单特定类下近似约简、多特定类下近似约简的结果和效率;最后总结全文。

2 基本概念

本节介绍序决策表相关的基本概念,包括序决策表的定义,序决策表的上近似、下近似和经典下近似约简。

2.1 序决策表及其上近似和下近似

下面给出序决策表的定义。

定义 1^[7] 设 $S^{\geq} = (U, AT = C \cup D, V, f)$ 为序决策表。其中 U 为非空有限对象集,称为论域。 $AT = C \cup D$ 为非空有限属性集, C 和 D 分别为条件属性集和决策属性集。 V 为所有属性 $a \in AT$ 的值域 V_a 的集合。 f 为信息函数 $f_a: U \rightarrow V_a$ 的集合。

给定集合 S ,记 $|S|$ 为 S 中元素的个数。若集合 D 中只有一个元素,即 $|D| = 1$,则称 $S^{\geq}$ 为单决策表。若 $|D| > 1$,则称 $S^{\geq}$ 为多决策表。本文只讨论单决策表的情况。

对于 $A \subseteq AT$,记 $R_A^{\geq} = \{(x, y) \in (U \times U) \mid y \geq Ax\}$,称 $R_A^{\geq}$ 为序决策表 $S^{\geq}$ 关于属性集 A 的优势关系。 $xR_A^{\geq}y$ 表示对象 y 关于属性 A 优于对象 x 。对于单个属性 $a \in A$,优势关系 $R_{\{a\}}^{\geq}$ 可简写为 $R_a^{\geq}$ 。需要指出的是,本文只考虑对象属性为数值型递增偏序关系的情况。

性质 1^[7] 设 $S^{\geq} = (U, AT = C \cup D, V, f)$ 为序决策表,对于任意的 $A \subseteq AT$,有 $R_A^{\geq} = \bigcap_{a \in A} R_a^{\geq}$ 。

根据优势关系可以定义对象的优势类。

定义 2 设 $S^{\geq} = (U, AT = C \cup D, V, f)$ 为序决策表,对于任意的 $A \subseteq AT, x_i, x_j \in U$,定义:

$$[x_i]_A^{\geq} = \{x_j \in U \mid f_a(x_i) \leq f_a(x_j), \forall a \in A\}$$

其中, $[x_i]_A^{\geq}$ 为对象 x_i 关于优势关系 $R_A^{\geq}$ 的优势类。决策表中所有对象关于优势关系 $R_A^{\geq}$ 的优势类的集合记作 $U/R_A^{\geq}$ 。

除优势关系 $R_A^{\geq}$ 外,还存在劣势关系 $R_A^{\leq}$,二者的关系矩阵互为转置。本文只讨论优势关系的序决策表。

根据序决策表中条件优势类与决策优势类之间的关系定义其上近似和下近似:其上近似为条件优势类与决策优势类交集不为空的对象集合,表示序决策表中的不确定性信息;其下近似为条件优势类全部包含于决策优势类的对象集合,表示序决策表中的确定性信息。

定义 3 设 $S^{\geq} = (U, C \cup D, V, f)$ 为序决策表。对于 $X \subseteq U, A \subseteq C, X$ 关于优势关系 $R_A^{\geq}$ 的上近似和下近似分别为:

$$\overline{R_A^{\geq}}(X) = \{x \in U \mid [x]_A^{\geq} \cap X \neq \emptyset\}$$

$$\underline{R_A^{\geq}}(X) = \{x \in U \mid [x]_A^{\geq} \subseteq X\}$$

对于 U 上多个对象集构成的集合 $F = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$, $n = |F|$,其上近似和下近似分别为:

$$\overline{R_A^{\geq}}(F) = (\overline{R_A^{\geq}}(X_1), \overline{R_A^{\geq}}(X_2), \dots, \overline{R_A^{\geq}}(X_n))$$

$$\underline{R_A^{\geq}}(F) = (\underline{R_A^{\geq}}(X_1), \underline{R_A^{\geq}}(X_2), \dots, \underline{R_A^{\geq}}(X_n))$$

序决策表中对象集的集合 F 的上(下)近似为 F 中各个对象集 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 的上(下)近似构成的 n 维向量。需要

注意的是,若两个向量相等,则两个向量的长度相等,且其中对应位置的元素也相等。

例 1 表 1 列出了序决策表 $S^{\geq}=(U,C\cup D,V,f)$,其中 $C=\{a,b,c,d\},D=\{e\}$ 。求条件属性对决策属性各个优势类的下近似。

表 1 序决策表					
Table 1 Ordered decision table					
U	a	b	c	d	e
x_1	0	2	0	4	6
x_2	2	1	2	2	0
x_3	1	0	2	1	2
x_4	3	1	3	0	2
x_5	0	1	0	1	0
x_6	2	0	0	3	2
x_7	3	2	1	2	2
x_8	1	0	4	2	5

条件属性集的各个优势类分别为：
 $[x_1]_C^{\geq}=\{x_1\},[x_2]_C^{\geq}=\{x_2\},[x_3]_C^{\geq}=\{x_2,x_3,x_8\},$
 $[x_4]_C^{\geq}=\{x_4\},[x_5]_C^{\geq}=\{x_1,x_2,x_5,x_7\},[x_6]_C^{\geq}=\{x_6\},[x_7]_C^{\geq}=\{x_7\},[x_8]_C^{\geq}=\{x_8\}。$

决策优势类集 $U/R_D^{\geq}=\{D_1,D_2,D_3,D_4\}$ 中的各个决策优势类分别为：

$D_1=[x_1]_D^{\geq}=\{x_1\}$
 $D_2=[x_2]_D^{\geq}=[x_5]_D^{\geq}=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8\}$
 $D_3=[x_3]_D^{\geq}=[x_4]_D^{\geq}=[x_6]_D^{\geq}=[x_7]_D^{\geq}=\{x_1,x_3,x_4,x_6,x_7,x_8\}$
 $D_4=[x_8]_D^{\geq}=\{x_1,x_8\}$

根据定义 3,可求得条件属性集对于决策属性集各个优势类的下近似分别为：

$\underline{R}_C^{\geq}(D_1)=\{x_1\}$
 $\underline{R}_C^{\geq}(D_2)=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8\}$
 $\underline{R}_C^{\geq}(D_3)=\{x_1,x_4,x_6,x_7,x_8\}$
 $\underline{R}_C^{\geq}(D_4)=\{x_1,x_8\}$

2.2 序决策表的下近似约简

序决策表的下近似表示序决策表中能够提供确定性信息的对象。下近似约简可以剔除序决策表中冗余的条件属性,并保留序决策表中的确定性信息。

定义 4^[14] 设 $S^{\geq}=(U,C\cup D,V,f)$ 为序决策表。记 $U/R_D^{\geq}=\{D_1,D_2,\cdots,D_n\},n=1,2,3,\cdots,|U/R_D^{\geq}|。$

若集合 $A\subseteq C$ 满足 $\underline{R}_A^{\geq}(U/R_D^{\geq})=\underline{R}_C^{\geq}(U/R_D^{\geq})$,则 A 为 $S^{\geq}$ 的下近似协调集。

对于给定的序决策表,其下近似协调集求得的下近似与其全部条件属性求得的下近似相同,即保留的确定性信息相同。对于序决策表的一个下近似协调集,若删除其中任意属性后不再是下近似协调集,则该协调集为序决策表的一个下近似约简。

定义 5^[14] 设 $S^{\geq}=(U,C\cup D,V,f)$ 为序决策表,则 $A\subseteq C$ 为 $S^{\geq}$ 的下近似约简,当且仅当其满足以下两个条件：

(1) $\underline{R}_A^{\geq}(U/R_D^{\geq})=\underline{R}_C^{\geq}(U/R_D^{\geq})；$

(2)对于任意子集 $A'\subseteq A$,有 $\underline{R}_{A'}^{\geq}(U/R_D^{\geq})\neq \underline{R}_C^{\geq}(U/R_D^{\geq})。$

例 2 判断 $\{a,b,c\}$ 和 $\{a,c,d\}$ 是不是例 1 中序决策表的下近似约简。

(1)若 $A=\{a,b,c\}$,则有 $A\subseteq C,A$ 对于决策属性集中各个优势类的下近似分别为：

$\underline{R}_A^{\geq}(D_1)=\emptyset$
 $\underline{R}_A^{\geq}(D_2)=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8\}$
 $\underline{R}_A^{\geq}(D_3)=\{x_1,x_4,x_7,x_8\}$
 $\underline{R}_A^{\geq}(D_4)=\{x_8\}$

条件属性集 A 与条件属性集 C 的下近似不同, $\underline{R}_A^{\geq}(U/R_D^{\geq})\neq \underline{R}_C^{\geq}(U/R_D^{\geq})$,因此 $A=\{a,b,c\}$ 不是例 1 中序决策表的下近似约简。

(2)若 $A=\{a,c,d\}$,则有 $A\subseteq C,A$ 对于决策属性集中各个优势类的下近似分别为：

$\underline{R}_A^{\geq}(D_1)=\{x_1\}$
 $\underline{R}_A^{\geq}(D_2)=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8\}$
 $\underline{R}_A^{\geq}(D_3)=\{x_1,x_4,x_6,x_7,x_8\}$
 $\underline{R}_A^{\geq}(D_4)=\{x_1,x_8\}$

条件属性集 A 与条件属性集 C 的下近似相同, $\underline{R}_A^{\geq}(U/R_D^{\geq})=\underline{R}_C^{\geq}(U/R_D^{\geq})$ 。经同样的计算可知,在 A 分别为 $\{a,c\},\{a,d\},\{c,d\}$ 的 3 种情况下, $\underline{R}_A^{\geq}(U/R_D^{\geq})\neq \underline{R}_C^{\geq}(U/R_D^{\geq})$,属性集 $\{a,c,d\}$ 的子集均不为下近似协调集。由此可知, $A=\{a,c,d\}$ 是例 1 中序决策表的一个下近似约简。

3 序决策表的多特定类下近似约简

3.1 基于差别矩阵的单特定类下近似约简

在实际应用中的某些情况下,可能仅有某一决策类对用户来说有意义。给出单特定类的下近似协调集定义如下：

定义 6 设 $S^{\geq}=(U,C\cup D,V,f)$ 为序决策表,特定类 $D_i\in U/R_D^{\geq}(i=1,2,\cdots,|U/R_D^{\geq}|)$ 。若集合 $A\subseteq C$ 满足 $\underline{R}_A^{\geq}(D_i)=\underline{R}_C^{\geq}(D_i)$,则称 A 为 $S^{\geq}$ 对于特定类 D_i 的下近似协调集。

对于单特定类,其约简的定义如下。

定义 7 设 $S^{\geq}=(U,C\cup D,V,f)$ 为序决策表,特定类 $D_i\in U/R_D^{\geq}(i=1,2,\cdots,|U/R_D^{\geq}|)$ 。 $A\subseteq C$ 为 $S^{\geq}$ 的特定类下近似约简,当且仅当其满足以下两个条件：

(1) $\underline{R}_A^{\geq}(D_i)=\underline{R}_C^{\geq}(D_i)；$
(2)对于 $\forall A'\subseteq A$,均有 $\underline{R}_{A'}^{\geq}(D_i)\neq \underline{R}_C^{\geq}(D_i)。$

约简成立需要满足两个条件:1)联合的充分性,即保留的属性能够保证序决策表下近似不变;2)独立的必要性,即删除任意一个属性后充分性不再成立。

定理 1 给定序决策表 $S^{\geq}=(U,C\cup D,V,f)$,特定类 $D_i\in U/R_D^{\geq}(i=1,2,\cdots,|U/R_D^{\geq}|)$ 。 $A\subseteq C$ 为下近似协调集,当且仅当 $x,y\in U$ 满足 $x\in \underline{R}_C^{\geq}(D_i),y\notin \underline{R}_C^{\geq}(D_i)$ 时, $\exists a\in A$ 使得 $f_a(x)>f_a(y)$ 。

证明:(1)必要性。假设当对象 x,y 满足 $x\in \underline{R}_C^{\geq}(D_i),y\notin \underline{R}_C^{\geq}(D_i)$ 时,对于 $\forall a\in A$,有 $f_a(x)\leq f_a(y)$,则 $y\in [x]_A^{\geq}。$

1) <http://archive.ics.uci.edu/ml/datasets.html>

由于 $x \in R_C^{\geq}(D_i)$, 且 $R_C^{\geq}(D_i) = R_A^{\geq}(D_i)$, 因此 $[x]_A^{\geq} \subseteq D_i$ 。又由于 $y \in [x]_A^{\geq}$, 因此 $[y]_A^{\geq} \subseteq [x]_A^{\geq}$, 故 $[y]_A^{\geq} \subseteq D_i$ 。从而可以得出 $y \in R_A^{\geq}(D_i) = R_C^{\geq}(D_i)$, 与已知矛盾, 故 $\exists a \in A$ 使得 $f_a(x) > f_a(y)$ 。

(2)充分性。若 A 不为下近似协调集, 则 $R_A^{\geq}(D_i) \neq R_C^{\geq}(D_i)$ 。由于 $A \subseteq C$, 因此 $|R_A^{\geq}(D_i)| < |R_C^{\geq}(D_i)|$ 。即 $\exists x' \in U$ 满足 $x' \in R_C^{\geq}(D_i)$ 且 $x' \notin R_A^{\geq}(D_i)$ 。故有 $[x']_C^{\geq} \subseteq D_i$, 但 $[x']_A^{\geq} \not\subseteq D_i$ 。又由于 $[x']_C^{\geq} \subseteq [x']_A^{\geq}$, 因此 $\exists y' \in U$ 满足 $y' \in [x']_A^{\geq}$ 但 $y' \notin D_i$, 即 $y' \notin R_C^{\geq}(D_i)$ 。于是存在 $x' \in R_C^{\geq}(D_i)$, $y' \notin R_C^{\geq}(D_i)$ 。由必要性得知 $\exists a \in A$ 使得 $f_a(x') > f_a(y')$, 与 $y' \in [x]_A^{\geq}$ 矛盾, 故 A 为下近似协调集。

根据定理 1, 定义序决策表的特定类约简差别矩阵。
定义 8 设 $S^{\geq} = (U, C \cup D, V, f)$ 为序决策表, 特定类为 $D_i \in U/R_D^{\geq} (i=1, 2, \dots, |U/R_D^{\geq}|)$, 记

$$P_i = \{(x, y) | x \in R_C^{\geq}(D_i), y \notin R_C^{\geq}(D_i)\}$$
$$\mathbf{M}_i(x, y) = \begin{cases} \{a \in C | f_a(x) > f_a(y)\}, & (x, y) \in P_i \\ \emptyset, & (x, y) \notin P_i \end{cases}$$

$\mathbf{M}_i(x, y)$ 为 x, y 两个对象所对应的差别属性集。记 $\mathbf{M}_i$ ($\mathbf{M}_i(x, y)$) 为 $S^{\geq}$ 对于单特定类 D_i 的下近似差别矩阵。

该差别矩阵可以保留序决策表中的差别信息。而约简结果所包含的差别信息应与差别矩阵中的相同。

定理 2 设 $S^{\geq} = (U, C \cup D, V, f)$ 为序决策表, 特定类为 $D_i \in U/R_D^{\geq} (i=1, 2, \dots, |U/R_D^{\geq}|)$, 其对应的差别矩阵为 $\mathbf{M}_i = (\mathbf{M}_i(x, y))$, $A \subseteq C$, 则下述(1)与(2)等价。

- (1) A 为下近似协调集;
 - (2) 对于 $\forall (x, y) \in P_i$, 有 $\mathbf{M}_i(x, y) \cap A \neq \emptyset$ 。
- 证明: (1) $\rightarrow$ (2)
- 对于 $\forall (x, y) \in P_i$, $\exists x, y \in U$ 满足 $x \in R_C^{\geq}(D_i)$, $y \notin R_C^{\geq}(D_i)$ 。由定理 1 可知, $\exists a \in A$ 使得 $f_a(x) > f_a(y)$ 。于是有 $a \in \mathbf{M}_i(x, y)$, 因此 $\mathbf{M}_i(x, y) \cap A \neq \emptyset$ 。

- (2) $\rightarrow$ (1)
- 若对于 $\forall (x, y) \in P_i$, 满足 $\mathbf{M}_i(x, y) \cap A \neq \emptyset$, 则 $\exists a' \in A$ 使得 $a' \in \mathbf{M}_i(x, y)$, 并满足 $f_{a'}(x) > f_{a'}(y)$, $x \in R_C^{\geq}(D_i)$, $y \notin R_C^{\geq}(D_i)$ 。由定理 1 可知 A 为下近似协调集。证毕。

为采用差别矩阵来求解约简, 需要利用差别属性集来构成差别函数。

定义 9 设 $S^{\geq} = (U, C \cup D, V, f)$ 为序决策表, 特定类为 $D_i \in U/R_D^{\geq} (i=1, 2, \dots, |U/R_D^{\geq}|)$, 相应差别矩阵为 $\mathbf{M}_i = (\mathbf{M}_i(x, y))$, 则其差别函数为:

$$f_{\text{Dis}}(\mathbf{M}_i) = \bigwedge \{ \bigvee \mathbf{M}_i(x, y) | \mathbf{M}_i(x, y) \neq \emptyset \}$$

其中, $\bigvee \mathbf{M}_i(x, y)$ 表示满足 $a \in \mathbf{M}_i(x, y)$ 的属性的析取范式, 差别函数为各个 $\bigvee \mathbf{M}_i(x, y)$ 的合取范式。对于任意差别矩阵 $\mathbf{M}_i$, 其差别函数 $f_{\text{Dis}}(\mathbf{M}_i)$ 可以用于求取全部约简。首先采用吸收律将命题公式 $f_{\text{Dis}}(\mathbf{M}_i)$ 化简; 再采用结合律将合取范式转化为析取范式; 最后再用吸收律化简析取范式, 从而得到极小析取范式 $f_{\text{Dis}}(\mathbf{M}_i)_{\min}$ 。

对于任意差别矩阵 $\mathbf{M}$ 对应的差别函数 $f_{\text{Dis}}(\mathbf{M})$, 可求得极小析取范式:

$$f_{\text{Dis}}(\mathbf{M})_{\min} = \bigvee_{j=1}^m \{ \bigwedge_{i=1}^{l_j} c_{j_i} \}$$

其中, m 为差别函数中析取项的个数, 每个析取项是一个合取范式。 l_j 为第 j 个合取范式中合取项(属性)的个数。记 $f_{\text{Dis}}(\mathbf{M})_{\min}$ 中每个析取项中属性的集合为 $A_j = \{c_{j_i} | i=1, 2, \dots, l_j\}$, 则 A_j 为差别矩阵 $\mathbf{M}$ 可求得的一个约简。 $RED = \{A_j | j=1, 2, \dots, m\}$ 为差别矩阵 $\mathbf{M}$ 可求得的全部约简。

例 3 对表 1 中的 4 个决策优势类分别构造差别矩阵, 并求其单特定类下近似约简。

构造特定类 D_1 的差别矩阵 $\mathbf{M}_1$ 如下:

$$\mathbf{M}_1 = \begin{bmatrix} \emptyset \{b, d\} \{b, d\} \{b, d\} \{b, d\} \{b, d\} \{d\} \{b, d\} \\ \emptyset \emptyset \emptyset \emptyset \emptyset \emptyset \emptyset \emptyset \\ \emptyset \emptyset \emptyset \emptyset \emptyset \emptyset \emptyset \emptyset \\ \emptyset \emptyset \emptyset \emptyset \emptyset \emptyset \emptyset \emptyset \\ \emptyset \emptyset \emptyset \emptyset \emptyset \emptyset \emptyset \emptyset \\ \emptyset \emptyset \emptyset \emptyset \emptyset \emptyset \emptyset \emptyset \\ \emptyset \emptyset \emptyset \emptyset \emptyset \emptyset \emptyset \emptyset \\ \emptyset \emptyset \emptyset \emptyset \emptyset \emptyset \emptyset \emptyset \end{bmatrix}$$

$f_{\text{Dis}}(\mathbf{M}_1) = (b \vee d) \wedge d = d$, 因此 D_1 的特定类约简为 $\{d\}$ 。

构造特定类 D_2 的差别矩阵 $\mathbf{M}_2$ 如下:

$$\mathbf{M}_2 = \begin{bmatrix} \emptyset \emptyset \emptyset \emptyset \emptyset \emptyset \emptyset \emptyset \\ \emptyset \emptyset \emptyset \emptyset \emptyset \emptyset \emptyset \emptyset \\ \emptyset \emptyset \emptyset \emptyset \emptyset \emptyset \emptyset \emptyset \\ \emptyset \emptyset \emptyset \emptyset \emptyset \emptyset \emptyset \emptyset \\ \emptyset \emptyset \emptyset \emptyset \emptyset \emptyset \emptyset \emptyset \\ \emptyset \emptyset \emptyset \emptyset \emptyset \emptyset \emptyset \emptyset \\ \emptyset \emptyset \emptyset \emptyset \emptyset \emptyset \emptyset \emptyset \\ \emptyset \emptyset \emptyset \emptyset \emptyset \emptyset \emptyset \emptyset \end{bmatrix}$$

特定类 D_2 的差别矩阵 $\mathbf{M}_2$ 为空矩阵。可见 D_2 的特定类约简为空。由于 $R_C^{\geq}(D_2) = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8\}$ 包含了所有对象, 任何对象必然都属于 $R_C^{\geq}(D_2)$, 因此没有差别信息。

构造特定类 D_3 的差别矩阵 $\mathbf{M}_3$ 如下:

$$\mathbf{M}_3 = \begin{bmatrix} \emptyset \{b, d\} \{b, d\} \emptyset \{b, d\} \emptyset \emptyset \emptyset \\ \emptyset \emptyset \emptyset \emptyset \emptyset \emptyset \emptyset \emptyset \\ \emptyset \emptyset \emptyset \emptyset \emptyset \emptyset \emptyset \emptyset \\ \emptyset \{a, c\} \{a, b, c\} \emptyset \{a, c\} \emptyset \emptyset \emptyset \\ \emptyset \emptyset \emptyset \emptyset \emptyset \emptyset \emptyset \emptyset \\ \emptyset \{d\} \{a, d\} \emptyset \{a, d\} \emptyset \emptyset \emptyset \\ \emptyset \{a, b\} \{a, b, c\} \emptyset \{a, b, c, d\} \emptyset \emptyset \emptyset \\ \emptyset \{c\} \{c, d\} \emptyset \{a, c, d\} \emptyset \emptyset \emptyset \end{bmatrix}$$

$f_{\text{Dis}}(\mathbf{M}_3) = (b \vee d) \wedge (a \vee c) \wedge (a \vee b \vee c) \wedge d \wedge (a \vee d) \wedge (a \vee b) \wedge (a \vee b \vee c \vee d) \wedge c \wedge (c \vee d) \wedge (a \vee c \vee d)$
 $= d \wedge c \wedge (a \vee b)$
 $= (a \wedge c \wedge d) \vee (b \wedge c \wedge d)$

因此 D_3 的特定类约简为 $\{a, c, d\}, \{b, c, d\}$ 。

构造特定类 D_4 的差别矩阵 $\mathbf{M}_4$ 如下:

$$\mathbf{M}_4 = \begin{bmatrix} \emptyset & \{b,d\} & \{b,d\} & \{b,d\} & \{b,d\} & \{b,d\} & \{d\} & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \{c\} & \{c,d\} & \{c,d\} & \{a,c,d\} & \{c\} & \{c\} & \emptyset \end{bmatrix}$$

$$f_{\text{Dis}}(\mathbf{M}_4) = (b \vee d) \wedge d \wedge c \wedge (c \vee d) \wedge (a \vee c \vee d) = c \wedge d,$$

因此 D_4 的特定类约简为 $\{c, d\}$ 。

需要注意,当单特定类为属性值中最小的决策类时,差别矩阵必然为空。

性质 2 设 $S^{\geq} = (U, C \cup D, V, f)$ 为序决策表,特定类为 $D_i \in U/R_D^{\geq} (i=1, 2, \dots, |U/R_D^{\geq}|)$ 。 $S^{\geq}$ 中属性值最小的特定类约简的差别矩阵为空。

在序决策表下,总存在属性值最小的对象 $x_{\min}$ 满足对于 $\forall a \in D$, 有 $f_a(x_{\min}) \leq f_a(x_j)$, 其优势类为 $[x_{\min}]_D^{\geq} = U$ 。由于对于任意对象 x_i , 满足 $\underline{R}_C^{\geq}([x_i]_C^{\geq}) \subseteq U$, 因此优势类 $[x_{\min}]_D^{\geq} = U$ 的下近似为 $\underline{R}_C^{\geq}([x_{\min}]_D^{\geq}) = \underline{R}_C^{\geq}(U) = U$ 。由于不存在 (x, y) 满足 $x \in \underline{R}_C^{\geq}(U)$, $y \notin \underline{R}_C^{\geq}(U)$, 因此差别矩阵为空。

3.2 基于差别矩阵的多特定类下近似约简

多个决策类的下近似约简,称为多特定类下近似约简。本节将 3.1 节中单特定类的下近似约简拓展到多特定类的下近似约简。

定义 10 设 $S^{\geq} = (U, C \cup D, V, f)$ 为序决策表,其所有决策类的集合为 $U/R_D^{\geq} = \{D_1, D_2, \dots, D_n\}$, 则其多特定类的集合为所有决策类集合的子集:

$$\emptyset \subset \mathcal{Q}_{mc} \subseteq U/R_D^{\geq}$$

$\mathcal{Q}_{mc}$ 中至少包含一个决策类。该决策类在 $|\mathcal{Q}_{mc}|=1$ 时为单特定类,在 $|\mathcal{Q}_{mc}|=|U/R_D^{\geq}|$ 时为所有决策类。

定义 11 设 $S^{\geq} = (U, C \cup D, V, f)$ 为序决策表,有多特定类 $\mathcal{Q}_{mc} \subseteq U/R_D^{\geq}$ 。若集合 $A \subseteq C$ 满足 $\mathbf{R}_A^{\geq}(\mathcal{Q}_{mc}) = \underline{\mathbf{R}}_C^{\geq}(\mathcal{Q}_{mc})$, 则 A 为 $S^{\geq}$ 在多特定类 $\mathcal{Q}_{mc}$ 下的下近似协调集。

多特定类的下近似约简的定义与经典下近似约简类似。

定义 12 设 $S^{\geq} = (U, C \cup D, V, f)$ 为序决策表,有多特定类 $\mathcal{Q}_{mc} \subseteq U/R_D^{\geq}$ 。 $A \subseteq C$ 为一个 $S^{\geq}$ 在多特定类 $\mathcal{Q}_{mc}$ 下的多特定类的下近似约简,当且仅当其满足以下两个条件:

- (1) $\mathbf{R}_A^{\geq}(\mathcal{Q}_{mc}) = \underline{\mathbf{R}}_C^{\geq}(\mathcal{Q}_{mc})$;
- (2) 对于 $\forall A' \subseteq A$, 均有 $\mathbf{R}_{A'}^{\geq}(\mathcal{Q}_{mc}) \neq \underline{\mathbf{R}}_C^{\geq}(\mathcal{Q}_{mc})$ 。

多特定类约简有与单特定类约简(定理 1)类似的定理。

定理 3 设 $S^{\geq} = (U, C \cup D, V, f)$ 为序决策表,多特定类 $\mathcal{Q}_{mc} \subseteq U/R_D^{\geq}$ 。 $A \subseteq C$ 为其下近似协调集,当且仅当 $\exists D_i \in \mathcal{Q}_{mc} (i=1, 2, \dots, |\mathcal{Q}_{mc}|)$ 对于对象 $x, y \in U$ 满足条件 $x \in \underline{R}_C^{\geq}(D_i)$, $y \notin \underline{R}_C^{\geq}(D_i)$ 时, $\exists a \in A$, 使得 $f_a(x) > f_a(y)$ 。

证明: (1)必要性。若 $\exists D_i \in \mathcal{Q}_{mc}$, 使得当对象 x, y 满足条件 $x \in \underline{R}_C^{\geq}(D_i)$, $y \notin \underline{R}_C^{\geq}(D_i)$ 时, 对于 $\forall a \in A$, 有 $f_a(x) \leq f_a(y)$, 则有 $y \in [x]_A^{\geq}$ 。

由于 $x \in \underline{R}_C^{\geq}(D_i) = \underline{R}_A^{\geq}(D_i)$, 可知 $[x]_A^{\geq} \subseteq D_i$ 。又有 $y \in [x]_A^{\geq}$, 则 $[y]_A^{\geq} \subseteq [x]_A^{\geq}$, 故 $[y]_A^{\geq} \subseteq D_i$ 。从而可以得出 $y \in$

$\underline{R}_A^{\geq}(D_i) = \underline{R}_C^{\geq}(D_i)$, 与已知矛盾, 故 $\exists a \in A$ 使得 $f_a(x) > f_a(y)$ 。

(2)充分性。若 A 不是决策表 $S^{\geq}$ 的下近似协调集, 则有 $\underline{R}_A^{\geq}(D_i) \neq \underline{R}_C^{\geq}(D_i)$ 。由于 $A \subseteq C$, 因此 $|\underline{R}_A^{\geq}(D_i)| < |\underline{R}_C^{\geq}(D_i)|$ 。即 $\exists x' \in U$ 满足 $x' \in \underline{R}_C^{\geq}(D_i)$ 且 $x' \notin \underline{R}_A^{\geq}(D_i)$ 。故有 $[x']_C^{\geq} \subseteq D_i$, 但 $[x']_A^{\geq} \not\subseteq D_i$ 。

又由于 $[x']_C^{\geq} \subseteq [x']_A^{\geq}$, 因此 $\exists y' \in U$ 满足 $y' \in [x']_A^{\geq}$ 但 $y' \notin D_i$, 即 $y' \notin \underline{R}_C^{\geq}(D_i)$ 。于是 $x' \in \underline{R}_C^{\geq}(D_i)$, $y' \notin \underline{R}_C^{\geq}(D_i)$ 。由定理条件得知 $\exists a \in A$ 使得 $f_a(x') > f_a(y')$, 与 $y' \in [x]_A^{\geq}$ 矛盾, 故 A 为下近似协调集。

基于定理 3 可定义序决策表多特定类下近似约简的差别矩阵。

定义 13 设 $S^{\geq} = (U, C \cup D, V, f)$ 为序决策表,多特定类 $\mathcal{Q}_{mc} \subseteq U/R_D^{\geq}$, 记 $P_{mc} = \bigcup_{D_i \in \mathcal{Q}_{mc}} \{(x, y) \mid x \in \underline{R}_C^{\geq}(D_i), y \notin \underline{R}_C^{\geq}(D_i)\}$ 。

$$\mathbf{M}_{mc}(x, y) = \begin{cases} \{a \in C \mid f_a(x) > f_a(y)\}, & (x, y) \in P_{mc} \\ \emptyset, & (x, y) \notin P_{mc} \end{cases}$$

$\mathbf{M}_{mc}(x, y)$ 为 x, y 两个对象所对应的差别属性集。记 $\mathbf{M}_{mc}(\mathbf{M}_{mc}(x, y))$ 为 $S^{\geq}$ 对于多特定类 $\mathcal{Q}_{mc}$ 的下近似差别矩阵。

当 $\mathcal{Q}_{mc} = U/R_D^{\geq}$ 时,多特定类的差别矩阵等价于经典全类差别矩阵。当 $|\mathcal{Q}_{mc}|=1$ 时,多特定类的差别矩阵等价于单特定类差别矩阵。

下面给出多特定类 $\mathcal{Q}_{mc}$ 的差别矩阵与各单特定类 $D_i \in \mathcal{Q}_{mc} (i=1, 2, \dots, |\mathcal{Q}_{mc}|)$ 的差别矩阵的关系。

定理 4 设 $S^{\geq} = (U, C \cup D, V, f)$ 为序决策表,多特定类 $\mathcal{Q}_{mc} \subseteq U/R_D^{\geq}$ 。 $\mathbf{M}_{mc}(\mathbf{M}_{mc}(x, y))$ 为 $\mathcal{Q}_{mc}$ 的多特定类约简差别矩阵, $\mathbf{M} = \{\mathbf{M}_1(\mathbf{M}_1(x, y)), \mathbf{M}_2(\mathbf{M}_2(x, y)), \dots, \mathbf{M}_{|\mathcal{Q}_{mc}|}(\mathbf{M}_{|\mathcal{Q}_{mc}|}(x, y))\}$ 为 $D_i \in \mathcal{Q}_{mc} (i=1, 2, \dots, |\mathcal{Q}_{mc}|)$ 的单特定类约简差别矩阵的集合。则 $S^{\geq}$ 单特定类约简差别矩阵 $\mathbf{M}_i(\mathbf{M}_i(x, y)) \in \mathbf{M}'$ 与多特定类约简差别矩阵 $\mathbf{M}_{mc}(\mathbf{M}_{mc}(x, y))$ 有如下关系:

$$(1) \mathbf{M}_{mc}(x, y) = \bigcup_{\mathbf{M}_i \in \mathbf{M}'} \mathbf{M}_i(x, y);$$

(2) $\{\mathbf{M}_{mc}(x, y)\} = \bigcup \{\mathbf{M}_i(x, y) \mid \mathbf{M}_i \in \mathbf{M}'\}$, 其中 $\{\mathbf{M}_i(x, y)\}$ 为差别矩阵 $\mathbf{M}_i \in \mathbf{M}'$ 中差别属性集的集合, $\{\mathbf{M}_{mc}(x, y)\}$ 为差别矩阵 $\mathbf{M}_{mc}$ 中差别属性集的集合。

证明: (1)由定义 6 及定义 10 可知,除空集外,单特定类和多特定类的差别矩阵中对象 x, y 相应的差别属性集均为 $\{a \in C \mid f_a(x) > f_a(y)\}$, 则可通过证明 $P_{mc} = \bigcup_{D_i \in \mathcal{Q}_{mc}} P_i$ 证明 (1)。其中:

$$P_i = \{(x, y) \mid x \in \underline{R}_C^{\geq}(D_i), y \notin \underline{R}_C^{\geq}(D_i)\}$$

$$P_{mc} = \bigcup_{D_i \in \mathcal{Q}_{mc}} \{(x, y) \mid x \in \underline{R}_C^{\geq}(D_i), y \notin \underline{R}_C^{\geq}(D_i)\}$$

易证(1)成立。

(2)对于任意的非空差别属性集 $\mathbf{M}_{mc}(x', y') \in \{\mathbf{M}_{mc}(x, y)\}$, 对象 x', y' 满足 $(x', y') \in P_{mc}$ 。由定义可知差别属性集为 $\{a \in C \mid f_a(x) > f_a(y)\}$ 。由(1)中的证明可知, $\exists P_i$ 满足 $(x', y') \in P_i$, 必存在单特定类差别矩阵的差别属性集的集合 $\{\mathbf{M}_i(x, y)\}$ 满足 $\mathbf{M}_i(x', y') \in \{\mathbf{M}_i(x, y)\}$, 其值为 $\{a \in C \mid f_a(x) > f_a(y)\}$, 则有 $\mathbf{M}_i(x', y') = \mathbf{M}_{mc}(x', y')$ 。可知 $\{\mathbf{M}_{mc}(x, y)\} \subseteq \bigcup \{\mathbf{M}_i(x, y) \mid \mathbf{M}_i \in \mathbf{M}'\}$ 。

$\forall \mathbf{M}_i \in \mathbf{M}'$ 中的非空差别属性集 $\mathbf{M}_i(x'', y'') \in \{\mathbf{M}_i(x, y)\}$

满足 $(x'', y'') \in P_i$, 其值为 $\{a \in C \mid f_a(x) > f_a(y)\}$ 。由(1)中的证明可知, $(x'', y'') \in P_{mc}$, 则对于多特定类差别属性集的集合 $\{\mathbf{M}_{mc}(x, y)\}$, 必有非空差别属性集 $\mathbf{M}_{mc}(x'', y'') = \{a \in C \mid f_a(x) > f_a(y)\} \in \{\mathbf{M}_{mc}(x, y)\}$, 则有 $\mathbf{M}_i(x'', y'') = \mathbf{M}_{mc}(x'', y'')$ 。可知 $\bigcup \{\mathbf{M}_i(x, y) \mid \mathbf{M}_i \in \mathbf{M}'\} \subseteq \{\mathbf{M}_{mc}(x, y)\}$ 。证毕。

多特定类有类似于单特定类(定理 2)的相关定理。

定理 5 设 $S^{\geq} = (U, C \cup D, V, f)$ 为序决策表, 多特定类 $\mathcal{Q}_{mc} \subseteq U/R_D^{\geq}$, 相应差别矩阵为 $\mathbf{M}_{mc} = (\mathbf{M}_{mc}(x, y))$, $A \subseteq C$, 则下述(1)与(2)等价。

(1) A 为下近似协调集;

(2) 对于 $\forall (x, y) \in P_{mc} \setminus$, 都有 $\mathbf{M}_{mc}(x, y) \cap A \neq \emptyset$ 。

证明: (1) $\rightarrow$ (2)

对于 $\forall (x, y) \in P_{mc}$, $\exists D_i \subseteq \mathcal{Q}_{mc}$ 使得 $x \in \underline{R_C^{\geq}}(D_i)$, $y \notin \underline{R_C^{\geq}}(D_i)$ 。由定理 3 可知, $\exists a \in A$ 使得 $f_a(x) > f_a(y)$ 。于是有 $a \in \mathbf{M}_{mc}(x, y)$, 故 $\mathbf{M}_{mc}(x, y) \cap A \neq \emptyset$ 。

(2) $\rightarrow$ (1)

若 $\forall (x, y) \in P_{mc}$, 满足 $\mathbf{M}_{mc}(x, y) \cap A \neq \emptyset$, 则 $\exists a' \in A$ 使得 $a' \in \mathbf{M}_{mc}(x, y)$, 并满足 $f_{a'}(x) > f_{a'}(y)$, $\exists D_i \in \mathcal{Q}_{mc}$ ($i = 1, 2, \dots, |\mathcal{Q}_{mc}|$) 使得 $x \in \underline{R_C^{\geq}}(D_i)$, $y \notin \underline{R_C^{\geq}}(D_i)$ 。由定理 3 可知 A 为下近似协调集。证毕。

多特定类差别矩阵的差别函数与单特定类差别矩阵的差别函数相似, 亦可求解全部约简。

定义 14 设 $S^{\geq} = (U, C \cup D, V, f)$ 为序决策表, 多特定类 $\mathcal{Q}_{mc} \subseteq U/R_D^{\geq}$, 其多特定类差别矩阵 $\mathbf{M}_{mc} = (\mathbf{M}_{mc}(x, y))$, 则其差别函数为:

$$f_{Dis}(\mathbf{M}_{mc}) = \bigwedge \{ \bigvee \mathbf{M}_{mc}(x, y) \mid \mathbf{M}_{mc}(x, y) \neq \emptyset \}$$

其中, $\bigvee \mathbf{M}_{mc}(x, y)$ 表示满足 $a \in \mathbf{M}_{mc}(x, y)$ 的属性的析取范式, 差别函数为各个 $\bigvee \mathbf{M}_{mc}(x, y)$ 的合取范式。

多特定类 $\mathcal{Q}_{mc}$ 差别矩阵的差别函数为所有单特定类 $D_i \in \mathcal{Q}_{mc}$ ($i = 1, 2, \dots, |\mathcal{Q}_{mc}|$) 差别矩阵的差别函数的合取。

定理 6 设 $S^{\geq} = (U, C \cup D, V, f)$ 为序决策表, 多特定类 $\mathcal{Q}_{mc} \subseteq U/R_D^{\geq}$, 有差别函数 $f_{Dis}(\mathbf{M}_{mc})$, 则对于所有 $D_i \in \mathcal{Q}_{mc}$ ($i = 1, 2, \dots, |\mathcal{Q}_{mc}|$) 的单特定类, 有相应差别函数的集合 $f_{Dis} = \{f_{Dis}(\mathbf{M}_1), f_{Dis}(\mathbf{M}_2), \dots, f_{Dis}(\mathbf{M}_{|\mathcal{Q}_{mc}|})\}$, 则:

$$f_{Dis}(\mathbf{M}_{mc}) = \bigwedge f_{Dis}$$

所有 $D_i \in \mathcal{Q}_{mc}$ 单特定类的差别函数合取后的命题公式 $\bigwedge f_{Dis}$ 与多特定类 $\mathcal{Q}_{mc}$ 的差别函数 $f_{Dis}(\mathbf{M}_{mc})$ 等价。

证明: 基于定理 4 中的(2), 根据所有单特定类差别矩阵的差别属性集与多特定类差别矩阵的差别属性集之间的关系可证。

由于多特定类差别矩阵可以退化成单特定类或经典的全决策类差别矩阵, 因此只需要实现多特定类差别矩阵算法即可。

算法 1 基于多特定类的序决策表下近似属性约简

输入: 序决策表 $S^{\geq} = (U, C \cup D, V, f)$, 多特定类 $\mathcal{Q}_{mc} = \{D_1, D_2, \dots, D_m\}$

输出: 序决策表 $S^{\geq}$ 的全部约简

1. Let dis_elems be an empty array;
2. for x in U;
3. for y in U;

4. if $x \in \underline{R_C^{\geq}}(D_i)$ and $y \notin \underline{R_C^{\geq}}(D_i)$, $D_i \in \mathcal{Q}_{mc}$:

5. temp = $\emptyset$;

6. for a in C;

7. if $f_a(x) > f_a(y)$:

8. temp = temp $\cup \{a\}$;

9. dis_elems.add(temp);

10. absorb(dis_elems);

11. associate(dis_elems);

12. absorb(dis_elems);

13. return dis_elems.

其中函数 $absorb(array)$ 利用吸收率将数组进行化简, 函数 $associate(array)$ 对数组采用了结合律。本文不再赘述其实现方法。

算法 1 中, 第 1—9 行的时间复杂度为 $O(|C| |U|^2)$, 第 10 行和第 12 行的吸收律的时间复杂度为 $O(|C| |U|^4)$ 。第 11 行中采用结合律转换合取范式为析取范式为 NP-hard 问题, 有指数级的时间复杂度 $O(|C| |U|^2)$ 。因此算法的整体时间复杂度为 $O(|C| |U|^2)$ 。

例 4 应用定理 4 对例 3 中所有特定类的差别矩阵进行处理, 可以得到经典下近似约简的差别矩阵 $\mathbf{M}$ 。

$\mathbf{M} =$

$$\begin{bmatrix} \emptyset & \{b, d\} & \{b, d\} & \{b, d\} & \{b, d\} & \{b, d\} & \{d\} & \{b, d\} \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \{a, c\} & \{a, b, c\} & \emptyset & \{a, c\} & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \{d\} & \{a, d\} & \emptyset & \{a, d\} & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \{a, b\} & \{a, b, d\} & \emptyset & \{a, b, c, d\} & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \{c\} & \{c, d\} & \{c, d\} & \{a, c, d\} & \{c\} & \{c\} & \emptyset \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} f_{Dis}(\mathbf{M}) &= (b \vee d) \wedge d \wedge (a \vee c) \wedge (a \vee b \vee c) \wedge (a \vee d) \wedge \\ &\quad (a \vee b) \wedge (a \vee b \vee d) \wedge (a \vee b \vee c \vee d) \wedge c \wedge (c \vee \\ &\quad d) \wedge (a \vee c \vee d) \\ &= c \wedge d \wedge (a \vee b) \\ &= (a \wedge c \wedge d) \vee (b \wedge c \wedge d) \end{aligned}$$

由此可得全部决策类的约简为 $\{a, c, d\}, \{b, c, d\}$ 。

记多特定类 $\mathcal{Q}_{mc} = \{D_1, D_2\}$, 其差别矩阵为 $\mathbf{M}_{mc}$, 则有:

$\mathbf{M}_{mc} =$

$$\begin{bmatrix} \emptyset & \{b, d\} & \{b, d\} & \{b, d\} & \{b, d\} & \{d\} & \{b, d\} \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \{a, c\} & \{a, b, c\} & \emptyset & \{a, c\} & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \{d\} & \{a, d\} & \emptyset & \{a, d\} & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \{a, b\} & \{a, b, c\} & \emptyset & \{a, b, c, d\} & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \{c\} & \{c, d\} & \emptyset & \{a, c, d\} & \emptyset & \emptyset \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} f_{Dis}(\mathbf{M}_{mc}) &= (b \vee d) \wedge d \wedge (a \vee c) \wedge (a \vee b \vee c) \wedge (a \vee d) \wedge \\ &\quad (a \vee b) \wedge (a \vee b \vee d) \wedge (a \vee b \vee c \vee d) \wedge c \wedge \\ &\quad (c \vee d) \wedge (a \vee c \vee d) \\ &= c \wedge d \wedge (a \vee b) \\ &= (a \wedge c \wedge d) \vee (b \wedge c \wedge d) \end{aligned}$$

因此关于决策类 D_1 和 D_3 的多特定类可约简为 $\{a, c, d\}, \{b, c, d\}$ 。

3.3 单特定类、多特定类下近似约简结果间的关系

下面给出一个单特定类和包含该单特定类的多特定类约简结果的关系。

定理 7 设 $S^{\geq} = (U, C \cup D, V, f)$ 为序决策表, 多特定类 $\mathcal{Q}_{mc} \subseteq U/R_D^{\geq}$, 若其多特定类全部约简的集合为 $RED(\mathcal{Q}_{mc})$, 设 $A \in RED(\mathcal{Q}_{mc})$, 则对于任意 $D_i \in \mathcal{Q}_{mc} (i=1, 2, \dots, |\mathcal{Q}_{mc}|)$ 的全部约简集合 $RED(D_i)$, 必定存在 $A' \in RED(D_i)$, 使得 $A' \subseteq A$ 。

对于 $\forall A \in RED(\mathcal{Q}_{mc})$, 任意单类约简集合 $RED(D_i)$ 中至少有一个 $A' \in RED(D_i)$ 满足 $A' \subseteq A$ 。但对于任意单特定类的任意约简 $A'' \in RED(D_i), D_i \in \mathcal{Q}_{mc}$, 在多特定类约简中未必有相应的超集 $A''' \in RED(\mathcal{Q}_{mc})$ 满足 $A'' \subseteq A'''$ 。

证明: 设多特定类相应差别矩阵为 $\mathbf{M}_{mc} = (\mathbf{M}_{mc}(x, y))$, 单特定类 $D_i \in \mathcal{Q}_{mc}$ 相应差别矩阵为 $\mathbf{M}_i = (\mathbf{M}_i(x, y))$ 。根据定理 5, $\forall A \in RED(\mathcal{Q}_{mc})$ 都有 $\mathbf{M}_{mc}(x, y) \cap A \neq \emptyset$ 。根据定理 4, 由于 $\{\mathbf{M}_i(x, y)\} \subseteq \{\mathbf{M}_{mc}(x, y)\}$, 易知 $\mathbf{M}_i(x, y) \cap A \neq \emptyset$, 则 A 在单特定类 $D_i \in \mathcal{Q}_{mc}$ 的条件下亦为下近似协调集。因此对于 $\forall D_i \in \mathcal{Q}_{mc}$, 必存在下近似约简 $A' \subseteq A$, 即 $A' \in RED(D_i)$ 。

对于任意差别矩阵 $\mathbf{M}$, 称所得全部约简的并集为约简的核属性集。任意约简必然包含核属性集。

定义 15 设有某单特定类或多特定类全部约简的集合 RED , 定义该约简的核属性集为:

$$CORE = \bigcap RED$$

在差别矩阵中, 若存在核属性, 则核属性必然会出现某个属性数为 1 的差别属性集中。

定理 8 给定差别矩阵 $\mathbf{M} = (\mathbf{M}(x, y))$, 设其差别属性集的集合为 $\{\mathbf{M}(x, y)\}$ 。则差别矩阵 $\mathbf{M}$ 全部约简的核属性集为:

$$CORE = \bigcup \{a | a \in \{\mathbf{M}(x, y)\} \wedge |a| = 1\}$$

证明: 首先证明对于 $\forall a \in CORE, \exists \mathbf{M}(x', y') \in \{\mathbf{M}(x, y)\}$ 满足 $\mathbf{M}(x', y') = \{a\}$ 。由反证法可知, 若对于 $\forall a \in CORE$, 不存在 $\mathbf{M}(x', y') \in \{\mathbf{M}(x, y)\}$ 满足 $\mathbf{M}(x', y') = \{a\}$, 则对于 $\forall \mathbf{M}(x', y') \in \{\mathbf{M}(x, y) | \mathbf{M}(x, y) \cap \{a\} \neq \emptyset\}$, 有 $|\mathbf{M}(x', y')| > 1$ 。记 $S = \bigcup \{\mathbf{M}(x, y) | \mathbf{M}(x, y) \cap \{a\} \neq \emptyset\}$ 。

设 RED 为全部约简的集合, 对于 $\forall A \in RED$, 记 $A' = (A \cup S) - \{a\}$, 易知对于 $\mathbf{M}(x', y') \in \{\mathbf{M}(x, y)\}$, 有 $\mathbf{M}(x', y') \cap A' \neq \emptyset$ 。即 A' 亦为下近似协调集, 且 A' 中不包含 a 。根据核的定义可知 $a \notin CORE$, 与前提条件矛盾。从而可知:

$$CORE \subseteq \bigcup \{a | a \in \{\mathbf{M}(x, y)\} \wedge |a| = 1\}$$

由差别矩阵求解约简的过程可知, 对于 $\forall A \in RED, \forall \mathbf{M}(x', y') \in \{\mathbf{M}(x, y)\}$, 有 $\mathbf{M}(x', y') \cap A \neq \emptyset$, 则 $\exists a \in A$ 满足 $a \in \mathbf{M}(x', y')$ 。从而可知, 只包含一个属性的差别属性集 $\mathbf{M}(x', y') = \{a\}$, 对于 $\forall A \in RED$, 满足 $a \in A$ 。根据核的定义可知 $a \in CORE$ 。易得 $\bigcup \{a | a \in \{\mathbf{M}(x, y)\} \wedge |a| = 1\} \subseteq CORE$ 。证毕。

核属性集为相应约简的差别矩阵中只有一个属性的差别属性集的并集。

例 5 根据例 3 与例 4 中的差别矩阵及其约简求得相应的核属性集。

单特定类差别矩阵 $\mathbf{M}_1$ 的约简为 $\{d\}$, 其核属性集为 $\{d\}$ 。单特定类差别矩阵 $\mathbf{M}_2$ 的约简为空集, 其核属性集为空集。单特定类差别矩阵 $\mathbf{M}_3$ 的约简为 $\{b, c, d\}, \{a, c, d\}$, 其核属性集为 $\{c, d\}$ 。单特定类差别矩阵 $\mathbf{M}_4$ 的约简为 $\{c, d\}$, 其核属性集为 $\{c, d\}$ 。经典下近似差别矩阵 $\mathbf{M}$ 的约简为 $\{b, c, d\}, \{a, c, d\}$, 其核属性集为 $\{c, d\}$ 。多特定类差别矩阵 $\mathbf{M}_{mc}$ 的约简为 $\{b, c, d\}, \{a, c, d\}$, 其核属性集为 $\{c, d\}$ 。

定理 9 设 $S^{\geq} = (U, C \cup D, V, f)$ 为序决策表, 有多特定类 $\mathcal{Q}_{mc} \subseteq U/R_D^{\geq}$ 的约简核属性集 $CORE_{mc}$, 对于各个 $D_i \in \mathcal{Q}_{mc} (i=1, 2, \dots, |\mathcal{Q}_{mc}|)$ 的单特定类的约简, 有核属性集的集合 $CORE' = \{CORE_1, CORE_2, \dots, CORE_{|\mathcal{Q}_{mc}|}\}$, 从而有:

$$CORE_{mc} = \bigcup CORE'$$

证明: 对于多特定类 $\mathcal{Q}_{mc} \subseteq U/R_D^{\geq}$, 决策表 $S^{\geq}$ 有差别矩阵 $\mathbf{M}_{mc} = (\mathbf{M}_{mc}(x, y))$, 其差别属性集的集合为 $\{\mathbf{M}_{mc}(x, y)\}$ 。对于单特定类 $D_i \in \mathcal{Q}_{mc} (i=1, 2, \dots, |\mathcal{Q}_{mc}|)$, 有差别矩阵的集合 $\mathbf{M}' = \{\mathbf{M}_1(\mathbf{M}_1(x, y)), \mathbf{M}_2(\mathbf{M}_2(x, y)), \dots, \mathbf{M}_{|\mathcal{Q}_{mc}|}(\mathbf{M}_{|\mathcal{Q}_{mc}|}(x, y))\}$ 。设 $\{\mathbf{M}_i(x, y)\}$ 为差别矩阵 $\mathbf{M}_i \in \mathbf{M}'$ 的差别属性集的集合。

根据定理 8 可知:

$$CORE_{mc} = \bigcup \{a | a \in \{\mathbf{M}_{mc}(x, y)\} \wedge |a| = 1\}$$

$$CORE_i = \bigcup \{a | a \in \{\mathbf{M}_i(x, y)\} \wedge |a| = 1\}$$

根据定理 4 可知 $\{\mathbf{M}_{mc}(x, y)\} = \bigcup \{\mathbf{M}_i(x, y) | \mathbf{M}_i \in \mathbf{M}'\}$, 从而可知 $CORE_{mc} = \bigcup CORE'$ 。

4 实验分析与验证

本节采用标准 UCI 数据集进行实验。数据集中连续型数据采用 WEKA3.8 进行等频离散化处理。为规定数据集中的标称型数据的大小关系, 并统一数据格式, 数据集中的标称数据类型按照其字母顺序进行排序。为处理数据集中的缺失数据, 实验中使用相应属性下出现频率最高的属性值来填补缺失数据。数据集中的属性从左至右分别以从 1 开始递增的正整数命名。数据集的详细信息如表 2 所列。实验环境: Windows 7-64bit; Intel Core i5-6500 处理器, 3.20GHz 主频; 8 GB 内存。程序运行在 Python3.6.2 上, 采用 PyCharm Community Edition 2017.2.4 进行编码。

表 2 数据集
Table 2 Data sets

编号	数据集	对象数	条件属性数	决策类数
1	Airfoil Self Noise	1503	5	16
2	Balance Scale	625	4	5
3	Contraceptive Method Choice	1473	9	3
4	Solar Flare	1066	12	6
5	User Knowledge Modeling	258	5	4
6	Yeast	1484	9	10

实验选择了经典全类下近似约简算法、文献[22]中的上近似(Upper Approximation, UA)约简算法和文献[23]中的最大分布(Maximum Distribution, MD)约简算法作为对比算法。4.1 节列举了序决策表的单特定类与多特定类约简的结果, 以及对比算法的约简结果。由于部分数据集中决策类过多, 实验中每个数据集只选取了 3 个特定类和 3 种可能的特

定类组合的约简结果;4.2 节通过折线图分别分析了单特定类、多特定类和对比较算法的效率,同样地,每个数据集只选取了 3 个特定类和 3 种可能的特定类的组合。

4.1 单特定类约简结果

各数据集采用 MD 约简、UA 约简算法得到的约简和采用单特定类约简算法得到的约简结果如表 3 所列。由于某些数据集中决策类较多,这里只给出部分决策类的约简结果。表中“类 1”“类 2”“类 3”3 列分别表示数据集中选取求解约简的 3 个不同决策类,“决策”为该决策类在决策表中的决策值。由于部分约简结果较长,难以填入表格,因此将其内容列在下方:

集合 01={1,2,3,4,5,6,7,8,9}

集合 02={{1,2,3,4,5,7,8,9},{1,2,3,4,6,7,8,9}}

集合 03={3,5,6,8,10,11,12}

集合 04={1,3,4,5,6,8,10,11,12}

集合 05={3,5,8,10,11,12}

集合 06={2,3,4,6,8,9}

集合 07={1,2,3,4,6,7,8,9}

可见单特定类约简结果的长度往往比全类约简、UA 约简和 MD 约简的结果的长度要短,至少不会比全类约简结果长。约简结果的长短并非衡量约简结果好坏的唯一标准,但具有一定的指导意义。例如较短的正域约简结果可以在使用数据集进行分类时加快分类器的学习速度,并且可以保证在训练中不丢失确定性信息。

表 3 单特定类约简
Table 3 Single-class-specific reducts

数据集	全约简	UA	MD	单特定类约简					
				类 1	决策	类 2	决策	类 3	决策
1	{1,2,3,4}	{1,2,3,4,5}	{1,2,3,4,5}	{1,2,4}	8	{1,2}	7	{2,3,4}	2
2	{1,2,3}	{1}	{1,2,3,4}	{1,2,3}	5	{1,2,3}	4	{1,2,3}	3
3	集合 01	集合 01	集合 01	集合 02	3	集合 01	2	∅	1
4	集合 03	集合 04	集合 04	{5,8,10,11}	4	集合 03	3	集合 05	2
5	{1,2,3,4,5}	∅	{1,2,3,4,5}	{1,2,4,5}	3	{5}	2	{1,2,3,5}	1
6	集合 01	集合 01	集合 01	{2,3,4,8,9}	10	集合 06	9	集合 07	8

4.2 多特定类约简结果

各数据集多特定类约简的结果如表 4 所列。由于多特定类可能的组合较多,这里只给出部分多特定类约简的结果。表 4 中“组合 1”“组合 2”“组合 3”这 3 列分别表示数据集中选取求解约简的不同决策类集合,“决策”为相应决策的决策值的集合。由于部分约简结果较长难以填入表格,因此

将其内容列在下方:

集合 08={1,2,3,4,5,6,7,8,9}

集合 09={{1,2,3,4,5,7,8,9},{1,2,3,4,6,7,8,9}}

集合 10={3,5,6,8,10,11,12}

集合 11={2,3,4,6,8,9}

集合 12={1,2,3,4,6,7,8,9}

表 4 多特定类约简
Table 4 Multi-class-specific reducts

数据集	多特定类约简					
	组合 1	决策	组合 2	决策	组合 3	决策
1	{1,2}	{7,6}	{1,2,4}	{7,6,3}	{1,2,3,4}	{6,3,2,1}
2	{1,2,3}	{5,4}	{1,2,3}	{5,4,3}	{1,2,3}	{5,4,3,2}
3	集合 08	{3,2}	集合 09	{3,1}	集合 08	{2,1}
4	{5,8,10,11}	{5,4}	集合 10	{5,3}	集合 10	{4,3}
5	{1,2,4,5}	{3,2}	{5}	{2,0}	{1,2,3,5}	{2,1,0}
6	集合 11	{10,9}	集合 12	{9,8}	集合 12	{10,9,8}

对比表 3 可知:由于只选定了部分决策类,多特定类约简结果的长度介于单类约简和经典全类约简结果之间,往往要比全类约简、UA 约简和 MD 约简的结果的长度要短,至少不会比全类约简结果长。如果将多特定类选为所有决策类,则算法退化为全类约简算法。

4.3 约简效率分析

本节展示基于差别矩阵的单特定类、多特定类下近似约简与 MD 约简、UA 约简算法的算法效率。图 1 展示了 6 个数据集下运行对比算法和部分单特定类下近似约简算法时,随着属性数增多的时间消耗折线图。其横坐标代表属性数,纵坐标代表计算约简消耗的时间。由图可知,单特定类下近似约简的效率通常高于对比算法;在部分数据集下,单特定类下近似约简的效率大幅高于对比算法。部分单特定类下近似约简得到了空的差别矩阵,因此算法仅耗

费生成差别矩阵的时间,求解约简不会耗费时间,如图 1(f)所示。

在某些情况下,添加属性后求解约简的过程反而变得更快。这是因为在添加属性求得新的差别矩阵后,新的属性产生了更短的差别属性集;在求解全部约简的过程中,相对较短的差别属性集通过吸收律吸收了相对较长的差别属性集,使得结合律能够更快地进行。

图 2 展示了 6 个数据集下运行 MD 约简、UA 约简算法和部分多特定类下近似约简算法时,随着属性数增多的时间消耗折线图。从图 2 中可以看出与图 1 中类似的规律。事实上,当选定的决策类数目相对全部决策类数目较少时,才有比较明显的加速效果;当选定的决策类数目接近全部决策类数目时,约简长度和约简效率也会接近全类约简结果和约简效率。

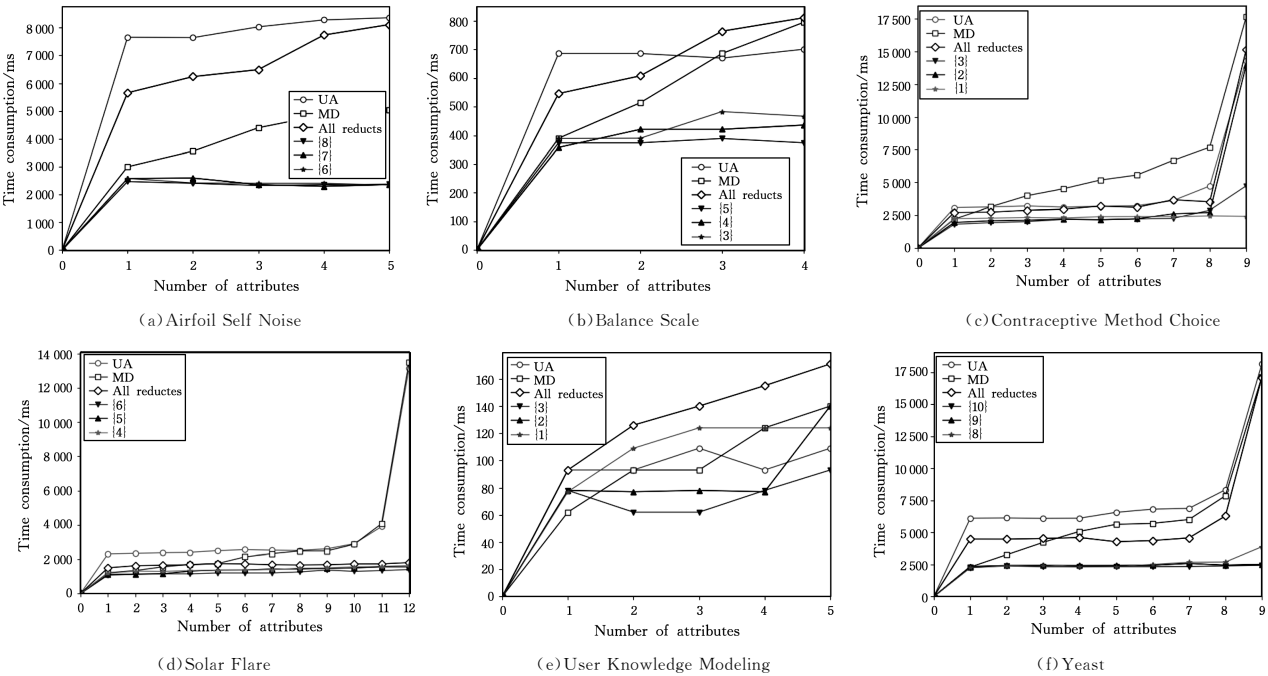


图 1 约简时间消耗的比较分析(I)

Fig.1 Comparative analysis of reduction time consumption I

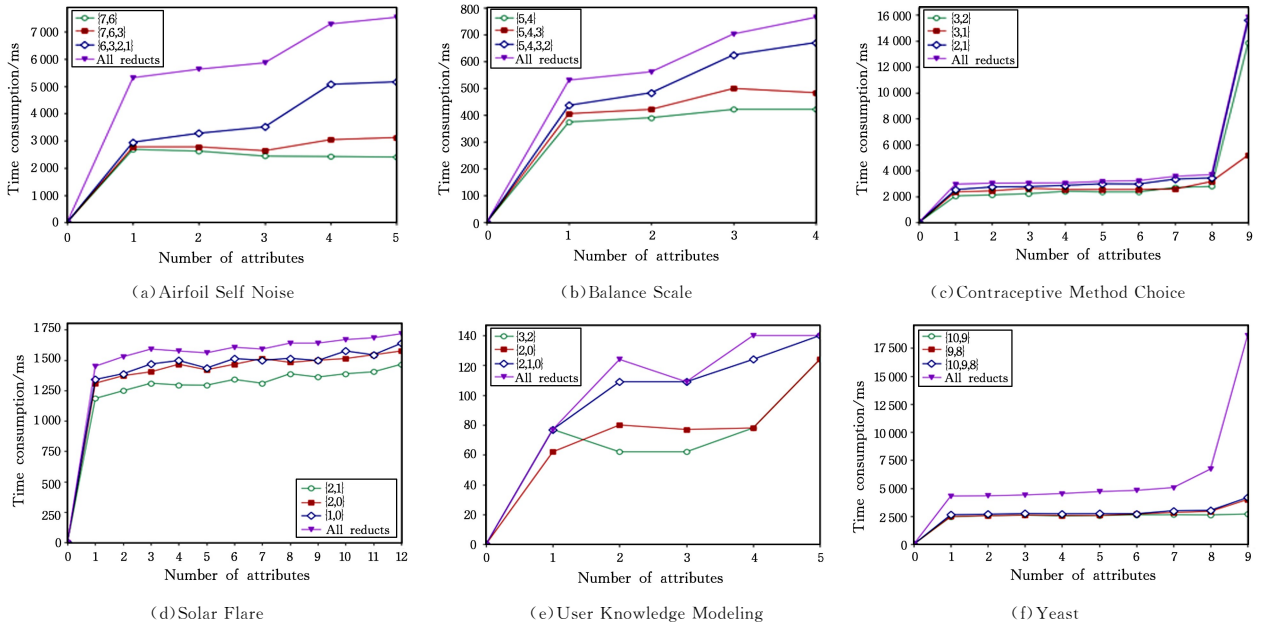


图 2 约简时间消耗的比较分析(II)

Fig.2 Comparative analysis of reduction time consumption II

结束语 求解序决策表的约简是一个十分重要的研究课题,本文提出了序决策表的单特定类与多特定类下近似约简,并给出了相应的差别矩阵用于求解。该方法作为一种更广泛的约简框架,可以退化为特定类约简或经典全类约简。实验结果表明,在拥有多个决策类的数据集中,通过构建较少的特定类的差别矩阵来忽略某些不受重视的区分信息,可以减少运算量,并且可使得结果更加简洁。

基于多特定类求解约简的方法可以用于大部分约简目标、多种数据背景。多特定类算法是全类约简算法的超集,能够兼容全类算法和单特定类算法,因此多特定类约简可以推

广作为一种基于更多类型的数据背景、面向更多约简目标的更加完备的约简框架。当前多特定类约简的相关研究尚有较多的空缺,需要进一步研究。

参 考 文 献

[1] PAWLAK Z. Rough sets [J]. International Journal of Computer and Information Sciences,1982,11(5):341-356.

[2] PAWLAK Z. Rough sets; Theoretical aspects of reasoning about data [M]. Dordrecht;Kluwer Academic Publishers,1992.

[3] WANG G Y,YAO Y Y,YU H. A survey on rough set theory and applications [J]. Chinese Journal of Computers, 2009,

32(7):1229-1246. (in Chinese)

王国胤,姚一豫,于洪.粗糙集理论与应用研究综述[J]. 计算机学报,2009,32(7):1229-1246.

[4] SKOWRON A, RAUSZER C. The discernibility matrices and functions in information systems [J]. Theory and Decision Library, 1992, 11: 331-362.

[5] LI W T, XU W H. Multigranulation decision-theoretic rough set in ordered information system [J]. Fundamenta Informaticae, 2015, 139(1): 67-89.

[6] SAI Y, YAO Y Y, ZHONG N. Data analysis and mining in ordered information tables [C]// Proceedings of 2001 IEEE International Conference on Data Mining. Washington DC: IEEE Computer Society Press, 2001: 497-504.

[7] DEMBCZYNSKI K, PINDUR R, SUSMAGA R. Generation of exhaustive set of rules within dominance-based rough set approach [J]. Electronic Notes Theory Computer Science, 2003, 82(4): 96-107.

[8] GRECO S, MATARAZZO B, SLOWINSKI R. Rough approximation by dominance relations [J]. International Journal of Intelligent Systems, 2002, 17(2): 153-171.

[9] GEDIGA G, RUNTSCH I. Rough approximation quality revisited [J]. Artificial Intelligence, 2001, 132(2): 219-234.

[10] GRECO S, MATARAZZO B, SLOWINSKI R. Rough approximation of a preference relation by dominance relation [J]. Europe Journal of Operation Research, 1999, 117(1): 63-83.

[11] ZHANG Q G, ZHANG P, WANG G Y. Research on approximation set of rough set based on fuzzy similarity [J]. Journal of Intelligent and Fuzzy System, 2017, 32(3): 2549-2562.

[12] ZHANG H Y, LEUNG Y, ZHOU L. Variable-precision-dominance-based rough set approach to interval-valued information systems [J]. Information Sciences, 2013, 244: 75-91.

[13] GU S M, HU C, WU W Z, et al. Uncertainty measures in multi-label ordered information systems [J]. Journal of Nanjing University, 2015, 51(2): 377-383. (in Chinese)

顾沈明,胡超,吴伟志,等.多标记序信息系统的不确定性研究[J]. 南京大学学报(自然科学), 2015, 51(2): 377-383.

[14] ZHANG X Y, XU W H. Lower Approximation reduction in ordered information system with fuzzy decision [J]. Applied Mathematics, 2011, 2(7): 918-921.

[15] SUSMAGA R. Reducts and constructs in classic and dominance-based rough sets approach [J]. Information Sciences, 2014, 271: 45-64.

[16] CHEN H M, LI T R, CAI Y, et al. Parallel attribute reduction in dominance-based neighborhood rough set [J]. Information Sciences, 2016, 373: 351-368.

[17] ZHANG X Y, XU W H, ZHANG W X. A novel algorithm of matrix computation for lower approximation reduction in IOIS [C]// 2010 Seventh International Conference on Fuzzy Systems and Knowledge Discovery. Washington DC: IEEE Computer Society Press, 2010, 8: 1876-1880.

[18] WANG F, QIAN Y H, LIANG J Y. Heuristic attribute reduction algorithm to ordered information systems [J]. Computer Science, 2010, 37(1): 258-260. (in Chinese)

王锋,钱宇华,梁吉业.序信息系统的启发式属性约简算法[J]. 计算机科学, 2010, 37(1): 258-260.

[19] SHI D R, XU W H. Distribution reduction in interval-valued fuzzy decision ordered information systems [J]. Journal of Frontiers of Computer Science and Technology, 2017, 11(4): 652-658. (in Chinese)

史德容,徐伟华.区间值模糊决策序信息系统的分布约简[J]. 计算机科学与探索, 2017, 11(4): 652-658.

[20] HUANG Q, WEI L. Attribute reduction approach to an ordered information system based on boolean matrix [J]. Journal of Chinese Mini-Micro Computer Systems, 2016, 37(8): 1717-1720. (in Chinese)

黄琴,魏玲.基于布尔矩阵的序信息系统属性约简方法[J]. 小型微型计算机系统, 2016, 37(8): 1717-1720.

[21] YAN Y J, DAI J H. Unsupervised feature selection for interval ordered information systems [J]. Pattern Recognition and Artificial Intelligence, 2017, 30(10): 928-936. (in Chinese)

闫岳君,代建华.区间序信息系统的无监督特征选择[J]. 模式识别与人工智能, 2017, 30(10): 928-936.

[22] XU W H, ZHANG X Y, ZHANG W X. Upper Approximation Reduction in Inconsistent Target Information System Based on Dominance Relations [J]. Computer Engineering, 2009, 2010(16): 1012-1013. (in Chinese)

徐伟华,张晓燕,张文修.优势关系下不协调目标信息系统的上近似约简[J]. 计算机工程, 2009, 2010(16): 1012-1013.

[23] XU W H, ZHANG W X. Methods for knowledge reduction in inconsistent ordered information systems [J]. Journal of Applied Mathematics and Computing, 2008, 26(1/2): 313-323.

[24] XU W H, LI Y, LIAO X W. Approaches to attribute reductions based on rough set and matrix computation in inconsistent ordered information systems [J]. Knowledge-Based Systems, 2012, 27: 78-91.

[25] XU W H, ZHANG W X. Uncertainty measures of roughness of knowledge and rough sets in ordered information systems [J]. Lecture Notes in Artificial Intelligence, 2007, 4682: 759-769.

[26] QIAN Y H, LIANG J Y, DANG C Y. Interval ordered information systems [J]. Computers and Mathematics with Applications, 2008, 56(8): 1994-2009.

[27] QIAN Y H, LIANG J Y, DANG C Y, et al. Set-valued ordered information systems [J]. Information Sciences, 2009, 179(16): 2809-2832.

[28] LIU G L, HUA Z, ZOU J Y. Local attribute reductions for decision tables [J]. Information Sciences, 2017, 422: 204-217.

[29] QIAN Y H, LIANG X Y, WANG Q, et al. Local rough set: a solution to rough data analysis in big data [J]. International Journal of Approximate Reasoning, 2018, 97: 38-63.

[30] YAO Y Y, ZHANG X Y. Class-specific attribute reducts in rough set theory [J]. Information Sciences, 2017, 418: 601-618.

[31] BAGGENSTOSS P M. Class-specific feature sets in classification [J]. IEEE Trans. on Signal Processing, 1999, 47(12): 3428-3432.

[32] PINEDA-BAUTISTA B, CARRASCO-CHOA J A, MARTINEZ-TRINIDAD J F. General framework for class-specific feature selection [J]. Expert Systems with Applications, 2011, 38(8): 10018-10024.

[33] CHEN D G, ZHAO S Y. Local reduction of decision system with fuzzy rough sets [J]. Fuzzy Sets and Systems, 2010, 161(13): 1871-1883.

[34] YANG X B, QI Y, YU D J, et al. α -Dominance relation and rough sets in interval-valued information systems [J]. Information Sciences, 2015, 294: 334-347.