抗冲激噪声的核分式低次幂自适应滤波算法

董 庆 林 云
(重庆邮电大学光电工程学院 重庆 400065)

摘 要 文中提出了一种基于分数低阶统计误差准则的抗非高斯冲激噪声的核分式低次幂(KFLP)算法。在存在脉冲干扰的环境下,该算法利用权重更新公式中存在瞬时估计误差的倒数系数的有利特性,使得算法在瞬时估计误差突然增大时的权重向量自动停止更新,由此消除了脉冲干扰对权重向量的影响。仿真结果表明,在相同的冲激噪声环境下,随着代价函数的幂次逐渐趋近于 1,核分式低次幂算法的稳定性将得到进一步的提高。另一方面,在非高斯脉冲环境下与采用传统的均方误差准则的核最小均方(Kernel Least-Mean-Square,KLMS)算法相比,所提算法的收敛曲线更加平滑,性能更加稳定。

关键词 分数低阶统计误差准则,非高斯冲激噪声,核分式低次幂算法,均方误差准则,核最小均方算法
中图法分类号 TP911 **文献标识码** A

Kernel Fractional Lower Power Adaptive Filtering Algorithm Against Impulsive Noise

DONG Qing LIN Yun
(College of Optoelectronic Engineering,Chongqing University of Posts and Telecommunications,Chongqing 400065,China)

Abstract To filter out the non-Gaussian impulsive noises,a kernel fractional lower power (KFLP) algorithm based on the fractional lower order statistics error criterion was proposed. Due to the favorable characteristics of the fractional lower order power coefficient of reciprocal,the adaptive update of the weight vector will stop automatically in the presence of impulsive interference. Thus,the effect of updating the weight vector caused by the impulse interference is eliminated. Simulation results show that as the power of the cost function approaches unity,the robustness of the kernel-type low-power algorithm improves in the non-Gaussian impulsive environment. Moreover,compared with the kernel least-mean-square (KLMS) algorithm based on the mean square error criterion,the proposed algorithm has smoother convergence curve and more stable performance.

Keywords Fractional lower order statistics error criterion,Non-Gaussian impulsive noise,Kernel fractional low power algorithm,Mean square error criterion,Kernel least-mean-square algorithm

核方法作为解决非线性问题的一种强大的非参数化建模工具,已成为机器学习和信号处理领域的研究热点。核方法的主要思想是将输入数据通过一个再生核变换到高维特征空间,然后采用核评价的方法高效地计算特征空间的内积操作。基于传统的均方误差(MSE)准则的核自适应滤波算法因为设计易实现、计算复杂度较低等特点,现已被广泛应用于通信、生物医学、雷达、声纳和工业控制等领域。Engel 等提出了一种计算复杂度高但收敛速度快的算法——核递归最小二乘(KRLS)算法[1]。随后,Liu 等提出核最小均方(KLMS)算法,该方法成为了实际运用中应用最广泛的算法[2]。同时,由于核最小均方算法固有的简单性和鲁棒性,Richard 等从理论上分析和推导了算法的收敛行为[3-4]。此外,对于上述算法,学者们相继提出了改进和变形算法。文献[5]给出了核自适应滤波的概述。

值得注意的是,以上提及的传统核自适应滤波算法大多是基于均方误差准则且假设为高斯噪声环境。当环境噪声发生改变时,由于非高斯噪声的干扰以及不恰当的非高斯建模的影响,使得常规基于均方误差准则的核自适应滤波算法的性能严重下降甚至失效。针对这一问题,Gao 等充分考虑 α 稳态噪声分布[6],提出了一种基于分数低阶统计误差准则的核最小均方 p 次幂(KLMP)算法。该算法适用于稳态噪声分布,在冲激噪声环境下效果甚微。基于此,本文充分考虑非高斯冲激噪声,提出了一种基于分数低阶统计误差准则[7]的抗非高斯冲激噪声的核分式低次幂(KFLP)算法。

本文第 1 节详细地介绍了算法的预备知识;第 2 节为了抑制 KLMS 类型算法在冲激噪声环境下的发散性和不稳定性,推导了核分式低次幂(KFLP)算法,在非高斯冲激噪声环境下,KFLP 算法的递归权重系数将自动停止更新;第 3 节详细地介绍了仿真实验及结果;最后总结全文。

1 预备知识

1.1 核方法

核方法是一种寻找隐藏在未知非线性系统中的非线性关系的有效方法[8]。Vapnik 对核方法的理解是如果将输入数据映射到高维空间,那么在低维难以解决的问题将会变得容易[9]。在核自适应滤波器中,输入信号由基础信号通过再生

董 庆(1994－),男,硕士生,主要研究方向为核自适应滤波算法,E-mail:550199689@qq. com;林 云(1968－),男,博士,副教授,主要研究方向为压缩感知、稀疏信号处理,E-mail:linyun@cqupt. edu. cn(通信作者)。

核变换到高维特征空间，因此我们可以直接采用线性自适应滤波算法来跟踪非线性系统。只要算法可以表示成内积的形式，就无需在高维特征空间进行计算。

Mercer 核[10]是一个连续、对称的正定函数 $\kappa:\mathbb{U}\times\mathbb{U}\to\mathbb{R}$。$\mathbb{U}$ 是输入域，是$\mathbb{R}^L$的子集。设一个内积空间$\mathbb{H}$，定义了$\mathbb{H}$ 的再生核空间，若空间是完备的，那么该空间被称为再生核希尔伯特空间(RKHS)。Mercer 定理表明任意再生核 $\kappa(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}')$ 可以扩展如下[10-11]：

$$\kappa(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}')=\sum_{i=1}^{\infty}\zeta_i\phi_i(\boldsymbol{u})\phi_i(\boldsymbol{u}') \tag{1}$$

其中，ζ_i 是非负的特征值，ϕ_i 是相应的特征函数，$\boldsymbol{u}$ 是输入向量。因此，映射 φ 可以构造为：

$$\begin{aligned}&\varphi:\mathbb{U}\to\mathbb{F}\\&\varphi(\boldsymbol{u})=[\sqrt{\zeta_1}\varphi_1(\boldsymbol{u}),\sqrt{\zeta_2}\varphi_2(\boldsymbol{u}),\cdots]\end{aligned} \tag{2}$$

通过构建映射，我们得到一个重要的启示：

$$\varphi(\boldsymbol{u})^{\mathrm{T}}\varphi(\boldsymbol{u}')=\kappa(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}') \tag{3}$$

通常使用的核包括高斯核(4)和多项式核(5)：

$$\kappa(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}')=\exp(-a\parallel\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}'\parallel^2) \tag{4}$$

$$\kappa(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}')=(\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}'+1)^P \tag{5}$$

其中，高斯核具有通用的逼近能力，且数值计算稳定，通常能得到合理的结果。

1.2　核最小均方(KLMS)算法

设$\mathbb{H}$ 是子空间$\mathbb{U}\subset\mathbb{R}^L$中实值函数 φ 的希尔伯特空间，函数 $\kappa:\mathbb{U}\times\mathbb{U}\to\mathbb{R}$ 是一个再生核。给定一个序列$\{\boldsymbol{u}(n),d(n)\}_{n=1}^N$，为了找到真正的潜在函数 φ，下面的经验风险最小化问题试图被解决。

$$\min_{\omega}\sum_{n=1}^{N}(d(n)-\omega^{\mathrm{T}}\varphi(\boldsymbol{u}(n)))^2 \tag{6}$$

其中，$\omega=[\omega_1,\cdots,\omega_N]^{\mathrm{T}}$是最佳的权重估计。

对于一个给定的输入数据$\{\boldsymbol{u}(n)\}_{n=1}^N$，核诱发映射(式(2))用于将输入$\{\boldsymbol{u}(n)\}_{n=1}^N$变换到高维特征空间$\mathbb{F}$ 的 $\varphi(\boldsymbol{u}(n))$函数中。为简化起见，简写 $\varphi(n)=\varphi(\boldsymbol{u}(n))$ 。在新的输入序列上使用线性最小均方算法(LMS)，可得：

$$\begin{aligned}&\omega(0)=0\\&e(n)=d(n)-\omega(n-1)^{\mathrm{T}}\varphi(n)\\&\omega(n)=\omega(n-1)+\eta e(n)\varphi(n)\end{aligned} \tag{7}$$

其中，$e(n)$是瞬时估计误差，η 是步进参数。

但是，φ 的维度很高甚至是无限的，并且 φ 是隐式表达，因此需要一种替换方法来完成计算。对式(7)进行反复迭代，得：

$$\begin{aligned}\omega(n)&=\omega(n-1)+\eta e(n)\varphi(n)\\&=[\omega(n-2)+\eta e(n-1)\varphi(n-1)]+\eta e(n)\varphi(n)\\&\cdots\\&=\omega(0)+\eta\sum_{i=1}^{n}e(i)\varphi(i)\\&=\eta\sum_{i=1}^{n}e(i)\varphi(i)\end{aligned} \tag{8}$$

经过 n 步训练后，系统可以将一个新输入 $\boldsymbol{u}'$ 的输出简单地表示成变换后的输入信号的内积形式。

$$\omega(n)\varphi(\boldsymbol{u}')=\eta\sum_{i=1}^{n}e(i)\kappa(\boldsymbol{u}(i),\boldsymbol{u}') \tag{9}$$

2　核分式低次幂(KFLP)算法

为了有效地抑制非高斯冲激噪声的干扰，本文提出了一种基于分数低阶统计误差准则的核分式低次幂算法。核分式低次幂算法的代价函数是：

$$J(\omega)=\mathrm{E}\{|d(n)-\omega^{\mathrm{T}}(n)\varphi(n)|p\},0<p<1 \tag{10}$$

根据最速下降法，核分式低次幂算法的权重矢量可以通过推导以下公式得到。

$$\omega(n+1)=\omega(n)+\frac{1}{p}\eta[-\partial J(\omega)] \tag{11}$$

对代价函数关于 ω 求导：

$$\frac{\partial J(\omega)}{\partial\omega}\approx-p\frac{1}{|e(n)|^{(1-p)}}\mathrm{sgn}(e(n))\varphi(n) \tag{12}$$

将瞬时梯度向量式(12)代入式(11)，核分式低次幂算法的递归更新方程表示为：

$$\omega(n+1)=\omega(n)+\eta\frac{1}{|e(n)|^{(1-p)}}\mathrm{sgn}(e(n))\varphi(n) \tag{13}$$

当瞬时估计误差 $e(n)$的值很小时，选取一个适当的 p 值来保证算法的收敛；当 $e(n)$的值足够大甚至趋于无穷时，倒数系数 $1/|e(n)|^{(1-p)}$ 将趋于 0。在这种情况下，式(13)将变成：

$$\omega(n+1)\approx\omega(n) \tag{14}$$

从式(14)可以看出，当核分式低次幂算法受到冲激噪声干扰时，算法的权重向量将停止更新。

3　实验仿真结果及分析

本节通过 3 组仿真实验来验证利用非线性系统辨识来验证核分式低次幂算法遭遇非高斯冲激噪声干扰时的必要性及鲁棒性。一个非线性系统可以由一个线性模型和一个非线性模型构成，其中本次实验所使用的线性模型为 $H(z)=1+0.2z^{-1}$，非线性模型为 $f(n)=x(n)-0.9x(n)^2$。因此，该系统的期望输出为 $d(n)=x(n)-0.9x(n)^2+v(n)$，其中 $v(n)$是由高斯白噪声和冲激噪声组合而成的环境噪声。冲激噪声可以被表示成 k_nA_n，其中 k_n 是一个伯努利过程且成功的概率 $P[k_n=1]=p_r$，A_n 代表一个零均值的高斯过程。

实验 1　假设存在 10% 的非高斯冲激噪声干扰，其中 $p_r=0.03$，令 p 分别取 0.7，0.8，0.9，得到核分式低次幂算法的学习曲线。本次实验将使用 KFLP 和 KLMS 算法来追踪未知系统，并且对各种算法的收敛性及鲁棒性进行了对比。

从图中可以看出，当 p 值趋近 1 时，核分式低次幂算法的稳定性随着 p 值的增大而提高。另一方面，当 p 值趋于 0 时，核分式低次幂算法的收敛性下降。因此，从图 1 看出，$p=0.9$ 时 MSE 曲线较平稳，性能较好，$p=0.9$ 是一个较为理想的值，因此以下的仿真中 $p=0.9$。

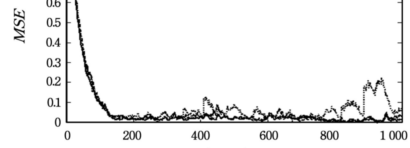

图 1　在不同 p 值下 KFLP 算法的归一化学习曲线对比

实验 2　实验在高斯白噪声环境下进行，即 $p_r=0$，且在第 600 次时产生一个冲激噪声。

图 2 给出了 KFLP 和 KLMS 算法在遭遇非高斯冲激噪声干扰时的学习曲线。

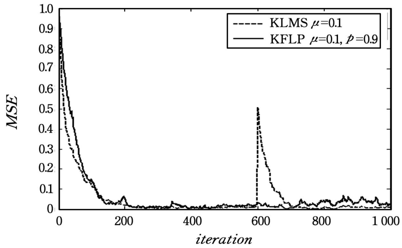

图 2 在第 600 次迭代过程中出现冲激噪声时各算法的性能对比

从图 2 中可以很清晰地看出，KFLP 算法的收敛速率小于 KLMS 算法。其原因在于 KFLP 算法是一个低阶范数类的算法，而此类算法的收敛速度普遍较慢。此外，在第 600 次迭代过程中出现一个冲激噪声干扰时，KLMS 算法无法抑制干扰，而 KFLP 算法能有效地避免冲激噪声对算法收敛性能的影响。

实验 3 此次实验中存在 3% 的非高斯冲激噪声干扰，其中 $p_r=0.03$ 。

图 3 给出了在存在 3% 的非高斯冲激噪声环境中，KFLP 和 KLMS 算法的学习曲线。图 3 表明，基于分数低阶统计误差准则的核分式低次幂算法受冲激噪声的影响较小，而采用传统的均方误差准则的核最小均方(KLMS)算法的收敛性能较差。其原因在于 KFLP 算法的权重更新公式中存在瞬时估计误差的倒数系数 $\frac{1}{|e(n)|^{(1-p)}}$，这一特性使得在冲激噪声干扰下 KFLP 算法的权重向量更新将自动停止。

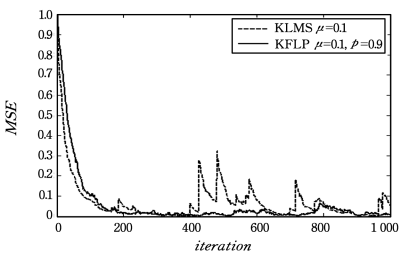

图 3 冲激噪声干扰下各算法的归一化学习曲线对比

结束语 为了减少冲激噪声干扰的影响，本文提出了一种基于分数低阶统计误差准则的核分式低次幂算法。理论推导和仿真实验验证了 KFLP 算法的有效性和鲁棒性。未来的工作将会着重考虑如何提高 KFLP 算法的收敛速度以及完善 KFLP 算法的理论分析。

参 考 文 献

[1] ENGEL Y, MANNOR S, MEIR R. The kernel recursive least-squares algorithm[J]. IEEE Transactions on signal processing, 2004, 52(8): 2275-2285.

[2] LIU W, POKHAREL P P, PRINCIPE J C. The kernel least-mean-square algorithm[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2008, 56(2): 543-554.

[3] PARREIRA W D, BERMUDEZ J C M, RICHARD C, et al. Stochastic behavior analysis of the Gaussian kernel least-mean-square algorithm[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2012, 60(5): 2208-2222.

[4] CHEN J, GAO W, RICHARD C, et al. Convergence analysis of kernel LMS algorithm with pre-tuned dictionary[C]// 2014 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP). IEEE, 2014: 7243-7247.

[5] LIU W, PRINCIPE J C, HAYKIN S. Kernel adaptive filtering: a comprehensive introduction[M]. John Wiley & Sons, 2011.

[6] GAO W, CHEN J. Kernel Least Mean MYM p MYM-Power Algorithm[J]. IEEE Signal Processing Letters, 2017, 24(7): 996-1000.

[7] PEI S C, TSENG C C. Least mean p-power error criterion for adaptive FIR filter[J]. IEEE Journal on Selected Areas in Communications, 1994, 12(9): 1540-1547.

[8] HAYKIN S. Kernel Adaptive Filtering: A Comprehensive Introduction[M]. 2010.

[9] VAPNIK V. The nature of statistical learning theory [M]. Springer science & business media, 2013.

[10] ARONSZAJN N. Theory of reproducing kernels[J]. Transactions of the American Mathematical Society, 1950, 68(3): 337-404.

[11] BURGES C J C. A tutorial on support vector machines for pattern recognition[J]. Data mining and knowledge discovery, 1998, 2(2): 121-167.

[12] ZHU Z, GAO X, CAO L, et al. Analysis on the adaptive filter based on LMS algorithm[J]. Optik-International Journal for Light and Electron Optics, 2016, 127(11): 4698-4704.

(上接第 75 页)

[4] DUNN J S. Scheduling Underway Replenishment as a Generalized Orienteering Problem [D]. California: Navy Postgraduate School, 1992.

[5] BROWN G G, DEGRANGE W C, PRICE W L. Scheduling combat logistics force replenishments at sea for the US Navy[J]. Navy Research Logistics, 2017(8): 611-693.

[6] 曹守启，邵娇云，陈莹，等. 带有等待时间窗的补给运输船航路规划[J]. 计算机工程及应用，2015，51(1)：243-249.

[7] 岳奎志，韩维，于承军，等. 舰艇编队物资海上分段补给的系统动力学模型 [J]. 系统仿真学报，2013，25(3).

[8] PATTERSON B L. An analytical approach to the operation of replenishment at sea[D]. California: Naval Postgraduate School, 1968.

[9] WAGGONER M H. An analytical model for application to the operation of replenishment at sea[D]. California: Naval Postgraduate School, 1967.

[10] BEVERIDGE J D. An analytical and computer simulation approach to the problem of replenishing task forces at sea[D]. California: Naval Postgraduate School, 1970.

[11] 李杨，徐峰，谢光强，等. 多智能体技术发展及其应用综述[J]. 计算机工程与应用，2018，54(9)：13-21.