

利用共线点求解多摄像机内外参数

罗欢

(昆明理工大学津桥学院 昆明 650000)

摘要 文中利用运动中共线点的几何特性来获得多摄像机的内外参数。首先,由空间中共线点与图像点之间的对应矩阵来得到对内参数的线性约束,获得了多个摄像机的内参数;然后,根据共线点在摄机组中各个摄像机下运动前后的坐标,获得摄像机相对于基准摄像机的旋转矩阵和平移向量,以求出摄像机的外参数;最后,进行模拟数据实验和真实图像实验,结果表明了该方法的可行性和有效性。

关键词 多摄像机,共线点,单应矩阵

中图分类号 TP391.41 文献标识码 A

Using Collinear Points Solving Intrinsic and External Parameters of Multiple Cameras

LUO Huan

(Kunming University of Science and Technology Oxbridge College, Kunming 650000, China)

Abstract The thesis used the geometric characteristics of collinear points to get the intrinsic parameters of the cameras. Firstly, the homographic matrix between space collinear points and its image points is used to get the linear constraints of the intrinsic parameters and the intrinsic parameters for multiple cameras. Then, according to the coordinates of collinear points before and after movement in each camera, the rotation matrix and translation vector of the camera relative to the reference camera are obtained, and the outside parameters of the cameras are solved. Finally, simulation data and real image experiments show the feasibility and effectiveness of this method.

Keywords Multiple cameras, Collinear points, Homographic matrix

1 研究背景

摄像机标定^[1-5]利用摄像机所拍摄的二维图像中的已知信息(特征点追踪、场景结构等)来获得摄像机成像模型中的所有内外参数。根据所使用标定物的维数不同可将摄像机标定方法分为 4 类:基于三维标定物的标定方法^[6-7]、基于二维标定物的标定方法^[8-9]、基于一维标定物的标定方法^[10-12]、基于零维标定物的标定方法^[13-17]。

随着多摄像机应用的日益普遍,近年来研究者们开展了对多摄像机标定的研究工作,研究如何将单个或少量几个摄像机的标定技术扩展到多个摄像机的情况,如何高效地标定多摄像机系统,由此衍生出了一些新的标定方法^[18-21]。但仍有许多理论和技术问题需要解决,如遮挡、多视点匹配、多摄像机标定等。Wang 等^[22]根据 Zhang^[10]和 Wu 等^[11]的方法从像平面的单应矩阵出发,标定杆的初始位置固定在 x 轴上。首先通过标定杆上点的世界坐标与图像坐标建立对应关系,然后根据点在世界坐标系中关于中点的约束、等长的约束得到关于单应矩阵的约束,推导出了关于摄像机内参数的线性约束。该方法要求标定杆的位置,有很大的局限性。Sun 等^[23]提出了基于标定物体的运动而不需要标定摄像机之间的对应关系来计算多个摄像机的外参数。虽然对标定物没有要求,但需要用精密的仪器来追踪物体前后的运动特征,成本较高,也比较复杂。Liu 等^[24]提出用激光探测器扫描的激光点来对摄像机的外参数进行标定。选取两个相邻摄像机,放

置在激光扫描仪前面至少移动两次,选取激光扫描仪上至少 3 个非共线的点求解旋转矩阵,每个摄像机捕捉在不同位置平面拦截的 LRF 的激光光斑图像,然后计算旋转矩阵和平移向量,最后进行非线性优化求得外参数。文献^[25]提出了一种简单易行的 5 点标定算法,该算法仅利用矩形的 4 个角点和 1 个中心点对应求解出单应矩阵。该算法通过多次拍摄不同姿态下的标定图像来提高算法的稳定性,不仅避免了大量图像点的匹配精准性问题,还具有较好的鲁棒性。文献^[22]提出的方法限定标定杆必须位于 x 轴上,而文献^[24]的方法得到的精度高,但成本也高,过程比较复杂,在此基础上本文推导出了过原点的共线三点即可求出摄像机的内参数。在求解摄像机外参数时,标定模板也是只需要 3 个共线点,选取一个摄像机作为基准摄像机 0,把基准摄像机和另外的摄像机组成一个摄机组 $(0, i)$ 来计算摄像机的外参数,该方法简化了求解摄像机外参数的标定过程,也降低了标定成本。

2 利用共线点求解多摄像机的内外参数

选取针孔摄像机下的投影分别为 a, b, c 的 3 个共线点 A, B, C 。在一组具有 $k+1$ 的摄像机中,令摄像机 0 为基准摄像机,其他摄像机以基准摄像机为参照依次编号为摄像机 $i, i=1, 2, \dots, k$ 。世界坐标系为 $O_w - x_w y_w z_w$, 摄像机坐标系为 $O_i - x_i y_i z_i$, 图像坐标系为 $o - xy$ (见图 1)。

空间中的 3 个共线点 A_0, B_0, C_0 在第 j 次运动后变为 $A_j, B_j, C_j, j=1, 2, \dots, 6$, 共线点运动一次可得到摄像机内参

数的一个约束,运动6次即可获得摄像机内参数。共线点在针孔摄像机下的投影关系可以表示为:

$$\begin{cases} s_1 \mathbf{a}_{ij} = \mathbf{K}_i (\mathbf{R}_i \quad \mathbf{T}_i) \mathbf{A}_j \\ s_2 \mathbf{b}_{ij} = \mathbf{K}_i (\mathbf{R}_i \quad \mathbf{T}_i) \mathbf{B}_j, i=1,2,\dots,k, j=0,1,2,\dots,6 \\ s_3 \mathbf{c}_{ij} = \mathbf{K}_i (\mathbf{R}_i \quad \mathbf{T}_i) \mathbf{C}_j \end{cases} \quad (1)$$

其中, \mathbf{K}_i 表示第 i 个摄像机的内参数矩阵, $\mathbf{K}_i = \begin{pmatrix} f_u & s & u_0 \\ 0 & f_v & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; \mathbf{R}_i 表示第 i 个摄像机相对于基准摄像机的旋转矩阵; \mathbf{T}_i 表示第 i 个摄像机相对于基准摄像机的平移向量; $\mathbf{A}_j, \mathbf{B}_j, \mathbf{C}_j$ 表示空间中的3个共线点的第 j 次运动的坐标; $\mathbf{a}_{ij}, \mathbf{b}_{ij}, \mathbf{c}_{ij}$ 表示在第 i 个摄像机下 $\mathbf{A}_j, \mathbf{B}_j, \mathbf{C}_j$ 的图像点; s_i 表示非零的比例因子。

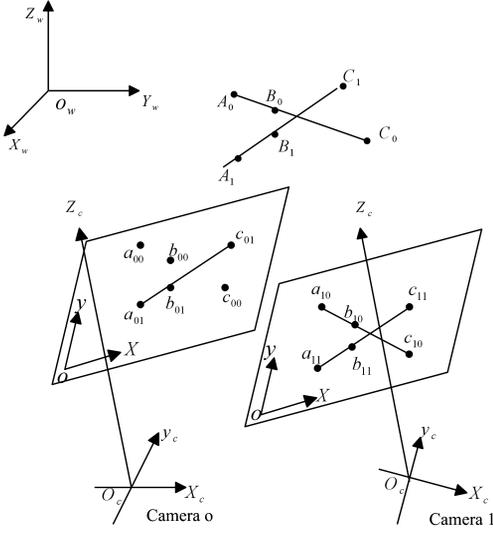


图1 共线点在多摄像机下的投影

2.1 利用共线点求解摄像机的内参数

设共线点所在的平面为 $x_w y_w$ 平面,下面以基准摄像机为例,求解基准摄像机的内参数矩阵 \mathbf{K}_0 。设共线的三点 $\mathbf{A}_j, \mathbf{B}_j, \mathbf{C}_j$ 在基准摄像机下的投影表示为:

$$\begin{cases} s_1 \mathbf{a}_{0j} = \mathbf{K}_0 (\mathbf{R}_0 \quad \mathbf{T}_0) \mathbf{A}_j = \mathbf{H} \mathbf{A}_j \\ s_2 \mathbf{b}_{0j} = \mathbf{K}_0 (\mathbf{R}_0 \quad \mathbf{T}_0) \mathbf{B}_j = \mathbf{H} \mathbf{B}_j, \\ s_3 \mathbf{c}_{0j} = \mathbf{K}_0 (\mathbf{R}_0 \quad \mathbf{T}_0) \mathbf{C}_j = \mathbf{H} \mathbf{C}_j \end{cases} \quad (2)$$

$j=0,1,2,\dots,6$

其中, $\mathbf{H} = \mathbf{K}_0 (\mathbf{r}_1 \quad \mathbf{r}_2 \quad t)$ 是空间平面到图像平面的单应矩阵。它的逆矩阵 $\mathbf{H}^{-1} = (\mathbf{h}_1^T \quad \mathbf{h}_2^T \quad \mathbf{h}_3^T)^T$ 表示图像平面到空间平面的单应矩阵,则有:

$$\begin{cases} s_1 \mathbf{H}^{-1} \mathbf{a}_{0j} = s_1 (\mathbf{h}_1^T \quad \mathbf{h}_2^T \quad \mathbf{h}_3^T)^T \mathbf{a}_{0j} = \mathbf{A}_j \\ s_2 \mathbf{H}^{-1} \mathbf{b}_{0j} = s_2 (\mathbf{h}_1^T \quad \mathbf{h}_2^T \quad \mathbf{h}_3^T)^T \mathbf{b}_{0j} = \mathbf{B}_j, \\ s_3 \mathbf{H}^{-1} \mathbf{c}_{0j} = s_3 (\mathbf{h}_1^T \quad \mathbf{h}_2^T \quad \mathbf{h}_3^T)^T \mathbf{c}_{0j} = \mathbf{C}_j \end{cases} \quad (3)$$

$j=0,1,2,\dots,6$

命题1 在针孔成像中,令其中一个共线点为坐标原点,可获得单应逆矩阵 \mathbf{H}^{-1} 的分向量 $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2$ 。

证明: 设 $\mathbf{A}_0, \mathbf{B}_0, \mathbf{C}_0$ 为共线三点(其中 \mathbf{A}_0 位于坐标原点),且 $\|\mathbf{B}_0 - \mathbf{A}_0\| = L_1, \|\mathbf{C}_0 - \mathbf{B}_0\| = L_2$,若 \mathbf{A}_0 位于坐标原点,则 \mathbf{A}_0 的 x 坐标为0,有:

$$\mathbf{h}_1^T \mathbf{a}_{00} = 0 \quad (4)$$

根据 $\mathbf{A}_0, \mathbf{B}_0, \mathbf{C}_0$ 共线点之间线段的比例关系,有:

$$(L_1 + L_2) \mathbf{h}_1^T \mathbf{b}_0 = L_1 \mathbf{h}_1^T \mathbf{c}_0 \quad (5)$$

式(5)整理得:

$$\mathbf{h}_1^T ((L_1 + L_2) \mathbf{b}_0 - L_1 \mathbf{c}_0) = 0 \quad (6)$$

由式(4)和式(5)有:

$$\mathbf{h}_1 = \mathbf{a}_0 \times ((L_1 + L_2) \mathbf{b}_0 - L_1 \mathbf{c}_0) \quad (7)$$

由于 $\mathbf{A}_0, \mathbf{B}_0, \mathbf{C}_0$ 共线,有:

$$\frac{\mathbf{h}_2^T \mathbf{c}_{00} - \mathbf{h}_2^T \mathbf{a}_{00}}{\mathbf{h}_1^T \mathbf{c}_{00} - \mathbf{h}_1^T \mathbf{a}_{00}} = \frac{\mathbf{h}_2^T \mathbf{b}_{00} - \mathbf{h}_2^T \mathbf{a}_{00}}{\mathbf{h}_1^T \mathbf{b}_{00} - \mathbf{h}_1^T \mathbf{a}_{00}} = \frac{\mathbf{h}_2^T \mathbf{c}_{00} - \mathbf{h}_2^T \mathbf{b}_{00}}{\mathbf{h}_1^T \mathbf{c}_{00} - \mathbf{h}_1^T \mathbf{b}_{00}} \quad (8)$$

化简式(8)可以得到:

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_2^T [(\mathbf{b}_{00} - \mathbf{a}_{00}) \mathbf{h}_1^T (\mathbf{c}_{00} - \mathbf{a}_{00}) - (\mathbf{c}_{00} - \mathbf{a}_{00}) \mathbf{h}_1^T (\mathbf{b}_{00} - \mathbf{a}_{00})] &= 0 \\ \mathbf{h}_2^T [(\mathbf{c}_{00} - \mathbf{b}_{00}) \mathbf{h}_1^T (\mathbf{c}_{00} - \mathbf{a}_{00}) - (\mathbf{c}_{00} - \mathbf{a}_{00}) \mathbf{h}_1^T (\mathbf{c}_{00} - \mathbf{b}_{00})] &= 0 \end{aligned} \quad (9)$$

由式(9)得:

$$\mathbf{h}_2 = [(\mathbf{b}_{00} - \mathbf{a}_{00}) \mathbf{h}_1^T (\mathbf{c}_{00} - \mathbf{a}_{00}) - (\mathbf{c}_{00} - \mathbf{a}_{00}) \mathbf{h}_1^T (\mathbf{b}_{00} - \mathbf{a}_{00})] \times [(\mathbf{c}_{00} - \mathbf{b}_{00}) \mathbf{h}_1^T (\mathbf{c}_{00} - \mathbf{a}_{00}) - (\mathbf{c}_{00} - \mathbf{a}_{00}) \mathbf{h}_1^T (\mathbf{c}_{00} - \mathbf{b}_{00})]$$

证毕。

命题2 在针孔成像中,令其中一个共线点为坐标原点,单应逆矩阵 \mathbf{H}^{-1} 的分向量 \mathbf{h}_3 与分向量 $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2$ 都线性无关。

证明: 共线点 $\mathbf{A}_j, \mathbf{B}_j, \mathbf{C}_j$ 经过运动后,得到新的共线点 $\mathbf{A}_j, \mathbf{B}_j, \mathbf{C}_j$,由于 $\mathbf{A}_j, \mathbf{B}_j, \mathbf{C}_j$ 共线且 $\|\mathbf{B}_j - \mathbf{C}_j\| = L_1, \|\mathbf{C}_j - \mathbf{B}_j\| = L_2$,有:

$$(L_1 + L_2) \frac{\mathbf{h}_2^T \mathbf{b}_{0j}}{\mathbf{h}_3^T \mathbf{b}_{0j}} = L_2 \frac{\mathbf{h}_2^T \mathbf{a}_{0j}}{\mathbf{h}_3^T \mathbf{a}_{0j}} + L_1 \frac{\mathbf{h}_2^T \mathbf{c}_{0j}}{\mathbf{h}_3^T \mathbf{c}_{0j}} \quad (10)$$

化简式(10)得到:

$$(L_1 + L_2) \mathbf{h}_3^T \mathbf{b}_{0j} \mathbf{h}_3^T \mathbf{a}_{0j} \mathbf{h}_3^T \mathbf{c}_{0j} = L_2 \mathbf{h}_2^T \mathbf{a}_{0j} \mathbf{h}_3^T \mathbf{c}_{0j} \mathbf{h}_3^T \mathbf{b}_{0j} + L_1 \mathbf{h}_2^T \mathbf{c}_{0j} \mathbf{h}_3^T \mathbf{a}_{0j} \mathbf{h}_3^T \mathbf{b}_{0j} \quad (11)$$

由于 $\mathbf{a}_{0j}, \mathbf{b}_{0j}, \mathbf{c}_{0j}$ 共线,因此 $\mathbf{b}_{0j} = \lambda_1 \mathbf{a}_{0j} + \lambda_2 \mathbf{c}_{0j}$,其中系数 λ_1, λ_2 可由图像点坐标求得,把 \mathbf{b}_{0j} 代入化简后的式子为:

$$(L_1 \mathbf{h}_2^T \mathbf{a}_{0j} \mathbf{h}_3^T \mathbf{c}_{0j} - L_2 \mathbf{h}_2^T \mathbf{c}_{0j} \mathbf{h}_3^T \mathbf{a}_{0j}) (\lambda_1 \mathbf{h}_3^T \mathbf{a}_{0j} - \lambda_2 \mathbf{h}_3^T \mathbf{c}_{0j}) = 0 \quad (12)$$

由式(12)可得 $L_1 \mathbf{h}_2^T \mathbf{a}_{0j} \mathbf{h}_3^T \mathbf{c}_{0j} - L_2 \mathbf{h}_2^T \mathbf{c}_{0j} \mathbf{h}_3^T \mathbf{a}_{0j} = 0, \lambda_1 \mathbf{h}_3^T \mathbf{a}_{0j} - \lambda_2 \mathbf{h}_3^T \mathbf{c}_{0j} = 0$ 。

$L_1 \mathbf{h}_2^T \mathbf{a}_{0j} \mathbf{h}_3^T \mathbf{c}_{0j} - L_2 \mathbf{h}_2^T \mathbf{c}_{0j} \mathbf{h}_3^T \mathbf{a}_{0j} = 0$,表示物体移动后的直线与初始位置直线平行,此时对内参数无法构成约束,这个条件在一般情况下不成立,因此得到一个关于 \mathbf{h}_3 的线性约束:

$$(\lambda_1 \mathbf{a}_{0j} - \lambda_2 \mathbf{c}_{0j})^T \mathbf{h}_3 = 0 \quad (13)$$

由于 $\mathbf{a}_{00}, \mathbf{b}_{00}, \mathbf{c}_{00}$ 共线,因此 \mathbf{c}_{00} 可由 \mathbf{a}_{00} 和 \mathbf{b}_{00} 线性表示为 $\mathbf{c}_{00} = \mathbf{a}_{00} + \lambda_3 (\mathbf{b}_{00} - \mathbf{a}_{00})$,其中系数 λ_3 可由图像点坐标求得。由共线点的齐次坐标和两点之间的长度关系可以得到:

$$\mathbf{h}_1^T \mathbf{c}_{00} = (L_1 + L_2) \cos \theta \mathbf{h}_3^T \mathbf{c}_{00} \quad (14)$$

其中, θ 为共线点所在的直线与 x 轴的夹角。将 \mathbf{c}_{00} 代入式(14)化简可以得到:

$$\lambda_3 \mathbf{h}_1^T \mathbf{b}_{00} = (L_1 + L_2) \cos \theta \mathbf{h}_3^T [\mathbf{a}_{00} + \lambda_3 (\mathbf{b}_{00} - \mathbf{a}_{00})] \quad (15)$$

根据 \mathbf{B}_0 像点的坐标可以得到:

$$\mathbf{h}_1^T \mathbf{b}_{00} = L_1 \cos \theta \mathbf{h}_3^T \mathbf{b}_{00} \quad (16)$$

把式(16)代入式(15)化简后可以得到:

$$\{\lambda_3 L_1 \cos \theta \mathbf{b}_{00} - (L_1 + L_2) \cos \theta [\mathbf{a}_{00} + \lambda_3 (\mathbf{b}_{00} - \mathbf{a}_{00})]\}^T \mathbf{h}_3 = 0 \quad (17)$$

即式(17)是另一个关于 \mathbf{h}_3 的线性约束。因此由式(13)和式(17)可以得到:

$$\mathbf{h}_3 \approx (\lambda_1 \mathbf{a}_{0j} - \lambda_2 \mathbf{c}_{0j}) \times \{\lambda_3 L_1 \cos \theta \mathbf{b}_{00} - (L_1 + L_2) \cos \theta [\mathbf{a}_{00} + \lambda_3 (\mathbf{b}_{00} - \mathbf{a}_{00})]\} \quad (18)$$

因此,向量 \mathbf{h}_3 与分向量 $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2$ 都线性无关。证毕。

命题 3 在针孔成像中,令其中一个共线点为坐标原点,可获得两个相互垂直的无穷远点的像。

证明:由等长约束 $\|B_0 - A_0\| = \|B_j - A_j\|$, 有:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\mathbf{h}_1^T \mathbf{b}_{00} - \mathbf{h}_1^T \mathbf{a}_{00}}{\mathbf{h}_3^T \mathbf{b}_{00} - \mathbf{h}_3^T \mathbf{a}_{00}} \right)^2 + \left(\frac{\mathbf{h}_2^T \mathbf{b}_{00} - \mathbf{h}_2^T \mathbf{a}_{00}}{\mathbf{h}_3^T \mathbf{b}_{00} - \mathbf{h}_3^T \mathbf{a}_{00}} \right)^2 = \\ & \left(\frac{\mathbf{h}_1^T \mathbf{b}_{0j} - \mathbf{h}_1^T \mathbf{a}_{0j}}{\mathbf{h}_3^T \mathbf{b}_{0j} - \mathbf{h}_3^T \mathbf{a}_{0j}} \right)^2 + \left(\frac{\mathbf{h}_2^T \mathbf{b}_{0j} - \mathbf{h}_2^T \mathbf{a}_{0j}}{\mathbf{h}_3^T \mathbf{b}_{0j} - \mathbf{h}_3^T \mathbf{a}_{0j}} \right)^2 \end{aligned} \quad (19)$$

式(19)整理后可以得到:

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\mathbf{h}_1^T (\mathbf{b}_{00} \mathbf{h}_3^T \mathbf{a}_{00} - \mathbf{a}_{00} \mathbf{h}_3^T \mathbf{b}_{00})}{\mathbf{h}_3^T \mathbf{b}_{00} \mathbf{h}_3^T \mathbf{a}_{00}} \right]^2 + \\ & \left[\frac{\mathbf{h}_2^T (\mathbf{b}_{00} \mathbf{h}_3^T \mathbf{a}_{00} - \mathbf{a}_{00} \mathbf{h}_3^T \mathbf{b}_{00})}{\mathbf{h}_3^T \mathbf{b}_{00} \mathbf{h}_3^T \mathbf{a}_{00}} \right]^2 = \\ & \left[\frac{\mathbf{h}_1^T (\mathbf{b}_{0j} \mathbf{h}_3^T \mathbf{a}_{0j} - \mathbf{a}_{0j} \mathbf{h}_3^T \mathbf{b}_{0j})}{\mathbf{h}_3^T \mathbf{b}_{0j} \mathbf{h}_3^T \mathbf{a}_{0j}} \right]^2 + \\ & \left[\frac{\mathbf{h}_2^T (\mathbf{b}_{0j} \mathbf{h}_3^T \mathbf{a}_{0j} - \mathbf{a}_{0j} \mathbf{h}_3^T \mathbf{b}_{0j})}{\mathbf{h}_3^T \mathbf{b}_{0j} \mathbf{h}_3^T \mathbf{a}_{0j}} \right]^2 \end{aligned}$$

令 $\mathbf{g}_1 = \frac{\mathbf{b}_{00} \mathbf{h}_3^T \mathbf{a}_{00} - \mathbf{a}_{00} \mathbf{h}_3^T \mathbf{b}_{00}}{\mathbf{h}_3^T \mathbf{b}_{00} \mathbf{h}_3^T \mathbf{a}_{00}}$, $\mathbf{g}_2 = \frac{\mathbf{b}_{0j} \mathbf{h}_3^T \mathbf{a}_{0j} - \mathbf{a}_{0j} \mathbf{h}_3^T \mathbf{b}_{0j}}{\mathbf{h}_3^T \mathbf{b}_{0j} \mathbf{h}_3^T \mathbf{a}_{0j}}$, 可得:

$$(\mathbf{h}_1^T \mathbf{g}_1)^2 + (\mathbf{h}_2^T \mathbf{g}_1)^2 = (\mathbf{h}_1^T \mathbf{g}_2)^2 + (\mathbf{h}_2^T \mathbf{g}_2)^2 \quad (20)$$

由于 $\mathbf{g}_1^T \mathbf{h}_3 = 0, \mathbf{g}_2^T \mathbf{h}_3 = 0$, 因此 $\mathbf{H}^{-1} \mathbf{g}_1$ 和 $\mathbf{H}^{-1} \mathbf{g}_2$ 是空间平面上的无穷远点, 即式(20)化为:

$$\mathbf{g}_1^T \mathbf{H}^{-T} \mathbf{H}^{-1} \mathbf{g}_1 = \mathbf{g}_2^T \mathbf{H}^{-T} \mathbf{H}^{-1} \mathbf{g}_2 \quad (21)$$

共线点的运动平面为世界坐标的 x_0y_0 平面, 那么无穷远平面到图像平面的单应矩阵为 $\mathbf{H} = \mathbf{K}(\mathbf{r}_1 \ \mathbf{r}_2 \ \mathbf{r}_3) = \mathbf{K}\mathbf{R}$, 因此像平面到无穷远平面的映射 $\mathbf{H}^{-1} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{K}^{-1}$, 即式(21)是关于无穷远平面上绝对二次曲线的像。式(21)化简后可以得到关于 $\mathbf{K}^{-T} \mathbf{K}^{-1}$ 的一个线性约束。

$$(\mathbf{g}_1 + \mathbf{g}_2) \mathbf{K}^{-T} \mathbf{K}^{-1} (\mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_2) = 0 \quad (22)$$

其中, $\mathbf{g}_1 + \mathbf{g}_2$ 与 $\mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_2$ 是两个相互垂直的无穷远点的像。证毕。

2.2 利用共线点求解多摄像机的外参数

在各个摄像机坐标系下(摄像机位于坐标系的原点, 即旋转矩阵为 \mathbf{I} , 平移向量为 $\mathbf{0}$), 针孔摄像机的投影模型为:

$$\begin{cases} s_1 \mathbf{a}_{ij} = \mathbf{K}_i (\mathbf{I} \ \mathbf{0}) \mathbf{A}_j \\ s_2 \mathbf{b}_{ij} = \mathbf{K}_i (\mathbf{I} \ \mathbf{0}) \mathbf{B}_j, i=1, 2, \dots, k, j=0, 1, 2, \dots, 6 \\ s_3 \mathbf{c}_{ij} = \mathbf{K}_i (\mathbf{I} \ \mathbf{0}) \mathbf{C}_j \end{cases} \quad (23)$$

已知图像点 $\mathbf{a}_{ij}, \mathbf{b}_{ij}, \mathbf{c}_{ij}$ 的坐标和 2.1 节中求得的各个摄像机的内参数 \mathbf{K}_i , 根据式(23)可以得到在第 i 个摄像机坐标系下 $\mathbf{A}_j, \mathbf{B}_j, \mathbf{C}_j$ 的空间坐标。

命题 4 在针孔成像中, 根据共线点的一次运动, 即可建立空间坐标系。

证明: 令位于世界坐标系原点的摄像机 0 为基准摄像机, 把基准摄像机和另外的摄像机组成一个摄像机组 $(0, i)$ 。如图 2 所示, 在基准摄像机坐标系下, 标定物上 3 个共线点初始位置的齐次坐标表示为 $\mathbf{A}_0, \mathbf{B}_0, \mathbf{C}_0$, 标定物上共线三点在第一次运动后的坐标分别为 $\mathbf{A}_1, \mathbf{B}_1, \mathbf{C}_1$ 。选取基准摄像机坐标系下的三点 $\mathbf{A}_0, \mathbf{B}_1, \mathbf{C}_0$, 这 3 个点不共线。令点 \mathbf{A}_0 到点 \mathbf{C}_0 的单位方向矢量为 \mathbf{n}_{00} , 点 \mathbf{A}_0 到点 \mathbf{B}_1 的单位方向矢量为 \mathbf{n}_{01} , $\mathbf{n}_{001} = \mathbf{n}_{00} \times \mathbf{n}_{01}$, 即获得一组在基准摄像机下的单位矢量 $(\mathbf{n}_{00}, \mathbf{n}_{01}, \mathbf{n}_{001})$ 。同理, 在第 i 个摄像机坐标系下的单位矢量为 $(\mathbf{n}_{i0}, \mathbf{n}_{i1}, \mathbf{n}_{i01})$ 。证毕。

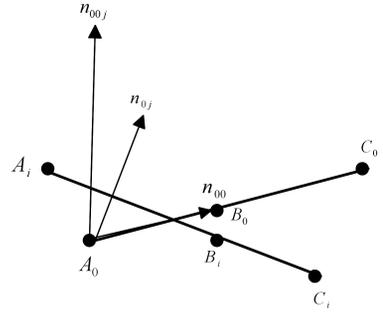


图 2 非共线三点坐标架的建立

命题 5 通过命题 4 建立的坐标系, 根据坐标系的旋转和平移, 即可得到摄像机的旋转矩阵和平移向量。

证明: 根据摄像机组 $(0, i)$ 建立的单位方向矢量, 设基准摄像机到摄像机 i 的旋转矩阵表示为 \mathbf{R}_{0i} , 平移矩阵表示为 \mathbf{T}_{0i} , 则单位方向矢量与旋转矩阵之间的关系表示为:

$$(\mathbf{n}_{00} \ \mathbf{n}_{01} \ \mathbf{n}_{001})^{-1} \mathbf{R}_{0i} = (\mathbf{n}_{i0} \ \mathbf{n}_{i1} \ \mathbf{n}_{i01})^{-1} \quad (24)$$

由于 $\mathbf{A}_0, \mathbf{B}_j, \mathbf{C}_0$ 3 点不共线, 因此 $(\mathbf{n}_{00} \ \mathbf{n}_{0j} \ \mathbf{n}_{00j})$ 和 $(\mathbf{n}_{i0} \ \mathbf{n}_{ij} \ \mathbf{n}_{i0j})$ 是满秩的。旋转矩阵 \mathbf{R}_{0i} 可以由两个摄像机之间建立的单位方向向量得到:

$$\mathbf{R}_{0i} = (\mathbf{n}_{00} \ \mathbf{n}_{01} \ \mathbf{n}_{001}) (\mathbf{n}_{i0} \ \mathbf{n}_{i1} \ \mathbf{n}_{i01})^{-1} \quad (25)$$

已知共线点的空间坐标和旋转矩阵 \mathbf{R}_{0i} , 可以得到:

$$\mathbf{T}_{0i} = \mathbf{A}_{0j} - \mathbf{R}_{0i} \mathbf{A}_{ij} \quad (26)$$

由命题可以得到每一个摄像机相对于基准摄像机 0 的旋转矩阵 \mathbf{R}_{0i} 和平移向量 \mathbf{T}_{0i} 。又因为基准摄像机 0 位于世界坐标系原点, 所以第 i 个摄像机的外参数在世界坐标系下也就是 \mathbf{R}_i 和 \mathbf{T}_i 。证毕。

2.3 算法步骤

由 3 个共线点与图像点之间的关系, 通过共线点在 $n(n \geq 6)$ 次保持在同一个平面内的运动得到关于 $\mathbf{K}^{-T} \mathbf{K}^{-1}$ 的 6 个线性约束, 可得到摄像机的内参数 \mathbf{K} 。在各摄像机坐标系下, 用摄像机的投影计算标定物体的空间坐标, 把基准摄像机和另外的摄像机组成一个摄像机组 $(0, i)$, 根据标定物体在摄像机组中运动前后的坐标, 得到物体运动前后的单位矢量, 获得平面法向量, 通过单位矢量和法向量构造的坐标系求出摄像机的外参数, 从而得到所有摄像机的外参数 \mathbf{R}_i 和 \mathbf{T}_i , 为了使旋转矩阵的结果更精确, 可以将标定物移动 $n(n \geq 2)$ 次, 就可以得到 n 个关于式(25)的方程, 表示为 $\mathbf{R}_{0i} = \mathbf{N}_{3n \times 3} \bar{\mathbf{N}}_{3n \times 3}^{-1}$, 其中 n 是形如式(25)的等式数目。

具体步骤如下:

第 1 步 读入共线点的图片, 提取共线点在 $n(n \geq 6)$ 幅图像中的像素坐标。

第 2 步 根据共线点像点的初始值和一次移动后的像点的坐标, 通过式(18)获得单应矩阵的分量 \mathbf{h}_3 , 然后计算出正交消失点 $\mathbf{g}_1 + \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_2$ 。

第 3 步 已知正交消失点的像, 对 ω 进行 Cholesky 分解再求逆获得内参数矩阵 \mathbf{K} 。同理, 可计算出全部摄像机的内参数。

第 4 步 由式(23), 求出共线点在各个摄像机下的空间坐标 $\mathbf{A}_j, \mathbf{B}_j, \mathbf{C}_j$ 。

第 5 步 由式(25)和式(26)可计算出摄像机的旋转矩阵 \mathbf{R}_i 和平移向量 \mathbf{T}_i 。

为了进一步提高标定的精确性, 需要使用非线性优化技

术对摄像机的标定结果进行优化。对于第 i 个摄像机和标定物的第 j 次运动,在每个位置上可以建立标定板平面特征点到图像平面特征点的一一对应关系,则非线性优化的目标代价函数为:

$$\sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^6 \| \mathbf{m}_{ij} - \bar{\mathbf{m}}(\mathbf{K}_i, \mathbf{R}_i, \mathbf{T}_i, \mathbf{M}_j) \| \quad (27)$$

其中, $\mathbf{M}_j = \{A_j, B_j, C_j\}$ 表示共线点第 j 次移动的坐标, $\mathbf{m}_{ij} = \{a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}\}$ 表示 M_j 在图像平面上实际成像的坐标, $\bar{\mathbf{m}}(\mathbf{K}_i, \mathbf{R}_i, \mathbf{T}_i, \mathbf{M}_j)$ 表示由摄像机模型计算得到的 M_j 在图像中的成像坐标。选择使代价函数最小时所对应的各摄像机的内外参数值作为摄像机优化后的标定结果。

3 实验结果

3.1 模拟数据实验

为了检验本文所提出的标定方法的准确性和可行性,在本节进行了模拟数据实验和真实图像实验。对所提出的标定方法在 Matlab7.0 软件中进行模拟。假设模拟数据实验中两个摄像机的内参数已知。图像的分辨率分别为 600×400 和 650×460 , 标定物为 $y=x$ 直线上的 3 个共线点, 标定物经过 6 次旋转平移后变成了 6 组不同的共线点。

为了验证该算法的稳定性和有效性,在图像数据中加入了均值为 0、均方差为 $0.0 \sim 3.0$ (像素) 的不同水平的高斯随机噪声,在每种噪声水平下分别做 50 次独立实验,然后分别取其平均值,求其绝对误差,实验结果(见表 1)验证了该算法具有一定的稳定性和有效性。

表 1 在不同噪声水平下摄像机 0 和 1 的标定结果

	Noise level	f_u	f_v	s	u_0	v_0
Camera0	0	500	400	0	300	200
Camera1		550	420	0	325	230
Camera0	0.5	501.3	402.1	-2.1	299.4	201.1
Camera1		550.9	420.3	-1.9	326.2	231.9
Camera0	1	499.7	203.0	-0.8	302.1	198.0
Camera1		552.1	422.1	-1.7	324.3	233.4
Camera0	1.5	503.3	403.1	-2.5	303.7	203.3
Camera1		552.8	423.4	-3.0	323.9	234.8
Camera0	2	503.7	403.2	-2.3	302.6	202.9
Camera1		551.0	425.4	-1.9	326.1	235.6
Camera0	2.5	504.2	404.1	-1.7	303.3	205.8
Camera1		554.4	425.6	-2.3	328.5	235.1
Camera0	3	505.6	406.2	-3.2	306.8	207.6
Camera1		557.2	425.0	-2.8	330.2	238.0

3.2 真实图像实验

本文采用两个摄像机拍摄的真实图像来验证算法的有效性,图 3 是用两个不同摄像机在不同位置拍摄的真实图像。

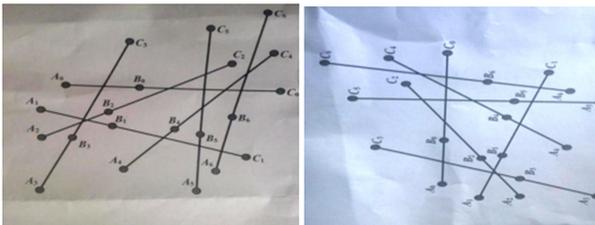


图 3 摄像机 0 和 1 的真实实验图像

在 matlab 中读入真实实验图片,在真实实验中,首先提取图片中的共线点的图像坐标,由 3 个共线点与图像点之间的单应矩阵得到对内参数的线性约束,求解出摄像机的内参

数(见表 2)。在多个摄像机中选取一个摄像机作为基准摄像机,其他摄像机依次进行排序。在各摄像机坐标系下,用摄像机的投影计算标定物体的空间坐标,把基准摄像机和另外的摄像机组成一个摄像机组,根据标定物体在摄像机组中运动前后的坐标,得到物体运动前后的单位矢量,进而获得平面法向量,通过单位矢量和法向量建立的坐标架求出摄像机的外参数,从而得到所有摄像机的外参数(见表 3)。

表 2 真实图像摄像机内参数实验结果

	f_u	f_v	s	u_0	v_0
Camera0	1598.3	1403.1	0.8	812.5	687.9
Camera1	1389.2	1301.2	1.0	689.4	655.6

表 3 真实图像摄像机外参数实验结果

parameter	Rotation matrix R_{01}	Translation vector T_{01}
Method in this paper	$\begin{pmatrix} 0.6235 & 0.3927 & -0.8129 \\ -0.4911 & 0.8412 & 0.2017 \\ 0.6362 & 0.2974 & 0.6231 \end{pmatrix}$	(571.8 -126.4 304.9)

结束语 本文在已有研究的基础上,对多摄像内外参数问题进行了研究。本文提出了一种基于共线点的多摄像机的标定方法,能将所有摄像机的内外参数标定。首先由共线的空间点与图像点之间的单应矩阵得到对内参数的线性约束,从而得到摄像机的内参数;然后根据标定物在摄像机组中运动前后的坐标,求出摄像机的外参数;最后实验结果表明了该方法的有效性。本文也存在一些不足,首先在多摄像机标定中求解内参数时只讨论了二维的情况,没有讨论在三维空间的情况,在以后的工作和学习中还要对这种情况进行深入的研究,其次在求解摄像机外参数时,考虑的是保证每个摄像机能够捕捉到平面,没有考虑覆盖、遮挡等信息,这是下一步研究的重点。

参考文献

- [1] 贾云得. 机器视觉[M]. 北京: 科学出版社, 2000.
- [2] SONKA M, HLAVAC V, BOYLE R. 图像处理, 分析与机器视觉(第二版)[M]. 艾海舟, 等译. 北京: 人民邮电出版社, 2003.
- [3] SNYDER W E, QI H. 机器视觉教程[M]. 林学刚, 等译. 北京: 机械工业出版社, 2005.
- [4] 马颂德. 计算机视觉[M]. 北京: 科学出版社, 1999.
- [5] 吴福朝. 计算机视觉中的数学方法[M]. 北京: 高等教育出版社, 2008.
- [6] AZIZ Y, KARARA H. Direct Linear Transformation from Comparator Coordinates into Object Space Coordinates [C]// ASP Symposium on Close-Range Photogrammetric. 1971; 1-18.
- [7] FAIG W. Calibration of Close-range Photogrammetric Systems: Mathematical Formulation [J]. Photogrammetric Engineering and Remote Sensing, 1975, 41: 1479-1486.
- [8] ZHANG Z Y. Flexible Camera Calibration by Viewing a Plane from Unknown Orientation [C]// International Conference on Computer Vision (ICCV). 1999: 666-673.
- [9] STURM P, MAYBANK S J. On Plane-Based Camera Calibration: A General Algorithm, Singularities Applications [C]// International Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR). 1999: 432-437.
- [10] ZHANG Z Y. Camera Calibration with One-dimensional Objects [J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intel-

- ligence (PAMI), 2004, 26(7): 892-899.
- [11] WU F C, HU Z Y, ZHU J. Camera Calibration with Moving One-dimensional Objects [J]. *Pattern*, 2012, 12(7): 465-484.
- [12] WANG L, WU F C, HU Z Y. Multi-Camera Calibration with One-dimensional Objects under General Motions [C]// *International Conference on Computer Vision (ICCV)*. 2007: 1-7.
- [13] SUN Q, XU D. Coverage performance analysis of multi-camera networks based on observing reliability model [C] // *Optik*. 2014: 2220-2224.
- [14] FAUGERAS O D, LUONG Q T, MAYBANK S. Camera Self-Calibration: Theory and Experiments [C]// *European Conference on Computer Vision (ECCV)*. 1992: 321-334.
- [15] MAYBANK S J, FAUGERAS O D. A Theory of Self-Calibration of a Moving Camera [J]. *International Journal of Computer Vision (IJCV)*, 1992, 8(2): 123-152.
- [16] HEYDEN A, ASTROM K. Euclidean Reconstruction from Image Sequences with Varying and Unknown Focal Length and Principal Point [C]// *International Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR)*. 1997: 438-443.
- [17] POLLEFEYS M, KOCH R, GOOL L V. Self-Calibration and Metric Reconstruction in Spite of Varying and Unknown Internal Camera Parameters [C]// *International Conference on Computer Vision (ICCV)*. 1998: 90-95.
- [18] UESHIBA T, TOMITA F. Plane-Based Calibration Algorithm for Multi-Camera Systems via Factorization of Homography Matrices [C]// *International Conference on Computer Vision (ICCV)*. 2003: 996-973.
- [19] AGRAWAL M, DAVIS L. Camera Calibration using Spheres: A Semi-definite Programming Approach [C]// *International Conference on Computer Vision (ICCV)*. 2003: 782-791.
- [20] VAISH V, WILBURN B, LEVOY M. Using Plane+Parallax for Calibrating Dense Camera Arrays [C]// *International Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR)*. 2004: 2-9.
- [21] SINHA S, POLLEFEYS M, MCMILLAN L. Camera Network Calibration from Dynamic Silhouettes [C]// *International Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR)*. 2004: 195-202.
- [22] WANG B, SUN F M. 1-D Camera Calibration Revisited [J]. *Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics*, 2014, 26(3): 452-456.
- [23] SUN Q, XU D. self-calibration of multi-camera networks without feature correspondence between different cameras [J]. *Optic*, 2014, 125: 3331-3336.
- [24] LIU Z, LI F, ZHANG G. An external parameter calibration method for multiple cameras based on laser rangefinder [J]. *Measurement*, 2014, 47: 954-962.
- [25] ZOU J C, TIAN N N. An easy and high-precision camera calibration method based on planar five point [J]. *Optics and Precision Engineering*, 2017, 25: 786-791.

(上接第 254 页)

较好, 适合于大尺度智能驾驶场景的三维场景重建。

参 考 文 献

- [1] 谢志萍, 雷莉萍. 智能网联汽车环境感知技术的发展和研究现状 [J]. *成都工业学院学报*, 2016, 19(4): 87-92.
- [2] 李克强, 戴一凡, 李升波, 等. 智能网联汽车 (ICV) 技术的发展现状及趋势 [J]. *汽车安全与节能学报*, 2017, 8(1): 1-14.
- [3] ZHANG X Y, GAO H B, GUO M, et al. A study on key technologies of unmanned driving [J]. *CAA Transactions on Intelligence Technology*, 2016, 1(1): 4-13.
- [4] 陈辉, 马世伟, Andreas Nuechter. 基于激光扫描和 SFM 的非同步点云三维重构方法 [J]. *仪器仪表学报*, 2016, 37(5): 1148-1157.
- [5] 徐超, 李乔. 基于计算机视觉的三维重建技术综述 [J]. *数字技术与应用*, 2017, 1(34): 54-56.
- [6] 孙宇阳. 基于单幅图像的三维重建技术综述 [J]. *北方工业大学学报*, 2011, 23(1): 9-13.
- [7] 黄鹏程, 江剑宇, 杨波. 双目立体视觉的研究现状及进展 [J]. *光学仪器*, 2018, 40(4): 81-86.
- [8] BAYKANT B, ALAGO Z. Obtaining Depth Maps From Color Images By Region Based Stereo Matching Algorithms [J]. *Onu-Bilim Algorithm And Systems Labs*, 2008, 8(4): 122-134.
- [9] 何人杰. 双目立体视觉区域局部匹配算法的改进及其实现 [J]. *现代电子技术*, 2009, 32(12): 68-70.
- [10] 肖志涛, 卢晓方, 耿磊, 等. 基于极线校正的亚像素相位立体匹配方法 [J]. *红外与激光工程*, 2014, 43(S1): 225-230.
- [11] YU L, ZHANG D R, HOLDEN E J. A fast and fully automatic registration approach based on point features for multi-source remote-sensing images [J]. *Computers and Geosciences*, 2007, 34(7): 838-848.
- [12] HARRIS C, STEPHENS M J. A combined corner and edge detector [C] // *Proceedings of Fourth Alvey Vision Conference*. Manchester, England: IEEE, 1998: 147-151.
- [13] LOWE D G. Distinctive Image Features from Scale-Invariant Keypoints [J]. *International Journal of Computer Vision*, 2004, 60(2): 92-109.
- [14] BAY H, ESS A, TUYTELAARS T, et al. Speeded-Up Robust Features (SURF) [J]. *Computer Vision and Image Understanding*, 2007, 110(3): 346-359.
- [15] RUBLEE E, RABAU D V, KONOLIGE K, et al. ORB: an efficient alternative to SIFT or SURF [C] // *IEEE International Conference on Computer Vision*. 2011: 2564-2571.
- [16] MUJAM, LOWE D G. Fast approximate nearest neighbors with automatic algorithm configuration [C] // *Proceedings of IEEE Conference on Computer Vision Theory and Applications*. Lisbon, Portugal: IEEE Computer Society, 2009: 331-340.
- [17] CANDÈS E J, ROMBERG J K, TAO T. Stable signal recovery from incomplete and inaccurate measurements [J]. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 2006, 59(8): 1-15.
- [18] 吕耀文, 康凯. 基于双目视觉的三维重建和拼接技术研究 [J]. *光电技术*, 2016, 36(4): 237-241.
- [19] 汪神岳, 刘强, 王超然, 等. 基于双目立体相机的室外场景三维重建系统设计 [J]. *计算机测量与控*, 2017, 25(11): 137-140.
- [20] 谢增广. 平面点集 Delaunay 三角剖分的分治算法 [J]. *计算机工程与设计*, 2012, 33(7): 2652-2658.
- [21] 姜翰青, 王博胜, 章国锋, 等. 面向复杂三维场景的高质量纹理映射 [J]. *计算机学报*, 2015, 38(12): 2349-2360.