第 46 卷 第 11A 期 2019 年 11 月 计 算 机 科 学 COMPUTER SCIENCE Vol. 46 No. 11A Nov. 2019

一类同步自动机及损耗函数分析

陈雪萍 何 勇 肖芬芳

(湖南科技大学计算机科学与工程学院 湖南 湘潭 411201)

摘 要 文中给定整数 $n>1$,对任意整数定义了自动机 $C_{n,i}$,确定了自动机的簇 $\{C_{n,i} \mid 0 \leqslant i < n\}$ 中的同步自动机及它们的最短同步字。此外,根据自动机的转移损耗函数和字的权重平均损耗函数,分析了该类同步自动机在一些经典应用中的优势。

关键词 同步自动机,自动机 $C_{n,i}$,最短同步字,转移损耗函数,权重平均损耗

中图法分类号 TP301.1 **文献标识码** A

Synchronization of a Certain Family of Automata and Consumption Function Analysis

CHEN Xue-ping HE Yong XIAO Fen-fang

(School of Computer Science and Engineering, Hunan University of Science and Technology, Xiangtan, Hunan 411201, China)

Abstract Let n be an integer greater than 1. After introducing the automaton $C_{n,i}$ for each integer $i<n$, the synchronizing ones in the family $\{C_{n,i} \mid 0 \leqslant i \leqslant n\}$ of automata as well as their shortest synchronizing words are determined. Moreover, in aids of the so called transition consumption functions of automata and the weighted average consumptions of words, the advantages of such synchronizing automata in some typical applications are analyzed.

Keywords Synchronizing automaton, Automaton $C_{n,i}$, Shortest synchronizing word, Transition consumption function, Weighted average consumption

1 引言

自动机 $\boldsymbol{A}=(Q,A,\xi)$是一个三元组,其中 Q 为状态集,A 为输入字母表,ξ 是一个从 A 到 Q 的转移幺半群 $\boldsymbol{T}(Q)$的状态转移函数。显然,只有 ξ 可以从字母表 A 上的自由幺半群 A^* 扩展到 $\boldsymbol{T}(Q)$上的幺半群的同态,那么很容易定义对任意字 $w \in A^*$ 在状态转移函数 ξ 下的像,且 w 在任意状态 $q \in Q$ 上的作用记为 qw。如果自动机 $\boldsymbol{A}$ 存在一个循环置换字母,就称 $\boldsymbol{A}$ 为循环自动机。对于未解释的其他术语和符号,读者可以参考 Howie[1]。

对于自动机 $\boldsymbol{A}=(Q,A,\xi)$,如果存在某个字 $w \in A^*$ 使得所有状态都能在 w 的作用下转移到同一状态,即 $|Qw|=1$,称 $\boldsymbol{A}$ 为同步自动机,w 为 $\boldsymbol{A}$ 的同步字。同步自动机的研究起源于Černy[2],对于任意整数 $n>1$,他构造了一个 n-状态的自动机 C_n,并证明了 C_n 有一个长度为$(n-1)^2$ 的最短同步字。同年,Hennie 在研究电子设备的故障检测问题时发现了同步自动机[3]。Natarajan[4]也发现了同步自动机及其在机器人方面的应用[4]。Eppstein 重新定义了同步自动机 C_n,并且提出了时间复杂度为 $O(|Q|^3+|Q|^2|A|)$的判定自动机 $\boldsymbol{A}=(Q,A,\xi)$的同步性算法[5]。目前,同步自动机已广泛应用于基于模型的反应系统测试,工业自动化中的零件处理问题以及 DNA 计算。Volkov 对同步自动机的应用进行了精彩的调查与研究[6]。

同步自动机理论研究的核心问题之一是最短同步字问题,特别是Černy 提出的猜想:任意状态的同步自动机都有长度不超过$(n-1)^2$ 的同步字。称这个猜想为Černy 猜想。已证实了循环自动机[7-8]、欧拉自动机[9]、非周期自动机[10]、素数阶的单簇自动机[11]、广义单演自动机[12]和有界偏序自动机[13]等满足Černy 猜想,尽管对Černy 猜想的研究已取得一些进展,但它仍未能彻底解决。Černy 猜想现在是自动机的组合理论领域存留时间最长的公开问题。研究同步自动机的最短同步字也具有实际意义,因为最短同步字通常意味着更短的输入指令和更少的操作步数。一般而言,寻找同步自动机的最短同步字是一项艰难的工作,现已证明同步自动机的最短同步字长度是一个 NP-完全问题[14-17]。此外,Martyugin 已经证明即使对于循环同步自动机,其最短同步字也是一个 NP-难问题[18]。因此,对于任意整数,构建 n-状态同步自动机的非空簇是有意义的,且该类自动机的最短同步字是确定的。

本文第 2 节主要介绍了对于 n-状态同步自动机的一个簇 C_n 所取得的研究成果。一般根据实际应用的需求,人们需要考虑同步自动机的性能,例如损耗和效率等问题。第 3 节通过使用一种模型来描述同步自动机的性能和分析簇 C_n 中各成员的优点。

2 同步自动机的簇

在下文中提到的整数 $n>1$,Z_n 表示小于 n 的非负整数

本文受国家自然科学基金(61572013),湖南省科技计划项目(2013FJ4047),湖南省研究生科研创新基金(CX2017B637)资助。

陈雪萍(1993-),女,硕士生,CCF 会员,主要研究方向为自动机理论,E-mail:1771400880@qq.com;**何 勇**(1970-),男,博士,教授,CCF 会员,主要研究方向为形式语言与自动机理论,E-mail:yonghe@hnust.cn(通信作者)。

集，$\overline{Z_n}$表示在 Z_n 中与互素的整数集，即：

$$Z_n=\{0,1,\cdots,n-1\}$$

$$\overline{Z_n}=\{k\in Z_n \mid (k,n)=1\}$$

其中，$\bar{m}$表示整数 m 模 n 的余数。如果存在$\{\bar{m}_k\}_{k\in Z_n}=Z_n$，则称整数集$\{m_k\}_{k\in Z_n}$为余数系统。引理 1 和引理 2 中给出了余数系统的基本属性。

引理 1 给定一个整数集$\{m_k\}_{k\in Z_n}$和一个整数 h，则$\{h+m_k\}_{k\in Z_n}$是一个余数系统当且仅当$\{m_k\}_{k\in Z_n}$是一个余数系统。

引理 2 给定一个整数集$\{m_k\}_{k\in Z_n}$和一个整数 h，则$\{hm_k\}_{k\in Z_n}$是一个余数系统当且仅当 $h\in\overline{Z_n}$ 且$\{m_k\}_{k\in Z_n}$是一个余数系统。

在文献[1,4]中提及的自动机 C_n 是一个三元组$(Z_n,\{a,b\},\xi)$，其状态转移函数定义如下：

对于任意 $k\in Z_n$，有：

$$kb=\overline{k+1},ka=\begin{cases}k, & k\neq n-1\\ 0, & k=n-1\end{cases}$$

对任意 $i\in Z_n$，构建一个自动机 $C_{n,i}=(Z_n,\{a,b\},\xi)$，其状态转移函数如下：

对于任意 $k\in Z_n$，有：

$$kb=\overline{k+1},ka=\begin{cases}k! & k\neq i\\ 0, & k=i\end{cases}$$

很显然，$C_{n,i}$是循环自动机且 $C_n=C_{n,n-1}$，方便起见，令 $w_i=(ab^i)^{n-2}a=a(b^ia)^{n-2}$。自动机 $C_{n,i}$的同步性描述如下。

定理 1 自动机 $C_{n,i}$是同步的当且仅当 $i\in\overline{Z_n}$。此外，如果存在这种情形，则字 w_i 是同步自动机 $C_{n,i}$的唯一最短同步字。

证明：假设 $n\geqslant 3$，用 3 个步骤完成证明。

第一步 如果 $i\in\overline{Z_n}$，则自动机 $C_{n,i}$是同步的。假设 $i\in\overline{Z_n}$，根据引理 2，有：

$$\{m_k i\}_{k\in Z_n}=Z_n \tag{1}$$

对于任意的非负整数 k，有：

$$0a(b^ia)^k=0=ia(b^ia)^k \tag{2}$$

故，存在以下等式：

$$\begin{aligned}(\overline{0\cdot i})w_i&=0a(b^ia)^{n-2}\\&=0\\&=ia(b^ia)^{n-2}\\&=(\overline{1\cdot i})w_i\end{aligned} \tag{3}$$

对任意 $m\geqslant 2$ 且 $m\in Z_n$，可以肯定$\bar{m}$和$\overline{m+1}$与 1 是互不相同的，所以$\overline{mi}$和$\overline{(m+1)i}$与 i 是互不相同的，因此：

$$(\overline{mi})ab^i=(\overline{mi})b^i=\overline{(m+1)i}$$

然后根据式(2)，有：

$$w_i=(ab^i)^{n-m}a(b^ia)^{m-2}$$

即：

$$\begin{aligned}(\overline{m\cdot i})w_i&=\overline{mi}(ab^i)^{n-m}a(b^ia)^{m-2}\\&=0a(b^ia)^{m-2}\\&=0\end{aligned} \tag{4}$$

结合式(1)，式(3)和式(4)的结果，有：

$$Z_nw_i=\{m_ki\}_{k\in Z_n}w_i=0$$

因此，$C_{n,i}$的确是一个同步自动机，且 w_i 是 $C_{n,i}$的一个同步字。

第二步 如果 $C_{n,i}$是同步的，则 $i\in\overline{Z_n}$。令 $C_{n,i}$是一个同步自动机，且 u 是 $C_{n,i}$的任意一个最短同步字，且 $u\notin a^*\cup b^*$，因此，有：

$$u=b^{t_1}a^{s_1}b^{t_2}a^{s_2}\cdots b^{t_g}a^{s_g}\ (2\leqslant g,0\leqslant t_1,s_g,1\leqslant s_1,t_2,s_2,\cdots,s_{g-1},t_g)$$

此外，对任意整数 $k\geqslant 1$ 和 $m\in Z_n$，存在 $ma^k=ma$ 和 $mb^k=mb^{\bar{k}}$，所以 u 的形式为：

$$u=b^{t_1}ab^{t_2}a\cdots b^{t_{g-1}}ab^{t_g}a^{s_g}\ (2\leqslant g,0\leqslant t_1,0\leqslant s_g\leqslant 1,1\leqslant t_2,t_3,\cdots,t_g\leqslant n-1)$$

由于 b 在 Z_n 上是一个置换字母，如果 $t_1\neq 0$，则

$$\begin{aligned}|Z_nab^{t_2}a\cdots b^{t_{g-1}}ab^{t_g}a^{s_g}|&=|(Z_nb^{t_1})ab^{t_2}a\cdots b^{t_{g-1}}ab^{t_g}a^{s_g}|\\&=|Z_nu|=1\end{aligned}$$

因此，对自动机 $C_{n,t}$而言，字 $ab^{t_2}a\cdots b^{t_{g-1}}ab^{t_g}a^{s_g}$ 是比字 u 的长度更短的一个同步字；如果 $s_g=0$，则：

$$\begin{aligned}|Z_nb^{t_1}ab^{t_2}a\cdots b^{t_{g-1}}a|&=|(Z_nb^{t_1}ab^{t_2}a\cdots b^{t_{g-1}}a)b^{t_g}|\\&=|Z_nu|=1\end{aligned}$$

因此，对自动机 $C_{n,t}$而言，字 $b^{t_1}ab^{t_2}a\cdots b^{t_{g-1}}a$ 是比字 u 的长度更短的一个同步字，故 $t_1=0$，$s_g=0$ 且 u 的形式为：

$$u=b^{t_1}ab^{t_2}a\cdots b^{t_{g-1}}ab^{t_g}a^{s_g}\ (2\leqslant g,0=t_1,1\leqslant t_2,t_3,\cdots,t_g\leqslant n-1) \tag{5}$$

对任意 $m\in Z_n$ 和非负整数 $k\leqslant g$，令：

$$\mu_k^m=\begin{cases}1, & k>0\text{ 且 }mb^{t_1}ab^{t_2}a\cdots b^{t_k}=i\\ 0, & k<0\text{ 或 }mb^{t_1}ab^{t_2}a\cdots b^{t_k}\neq i\end{cases}$$

同时定义一个非负整数 d_m，即：

$$d_m=\sum_{k=0}^{g}\mu_k^m \tag{6}$$

接下来，令：

$$q_k^m=\begin{cases}m, & k=0\\ mb^{t_1}ab^{t_2}a\cdots b^{t_k}a, & k\neq 0\end{cases}$$

显然，对任意 $k<g$ 有：

$$\begin{aligned}q_{k+1}^m&=mb^{t_1}ab^{t_2}a\cdots b^tab^{t_{k+1}}a\\&=(mb^{t_1}ab^{t_2}a\cdots b^tab^{t_{k+1}})a\\&=\overline{(mb^{t_1}ab^{t_2}a\cdots b^tab^{t_{k+1}})-\mu_{k+1}^m i}\\&=\overline{(mb^{t_1}ab^{t_2}a\cdots b^ta)+t_{k+1}-\mu_{k+1}^m i}\\&=\overline{q_k^m+t_{k+1}-\mu_{k+1}^m i}\end{aligned}$$

通过数学归纳得到等式 $0=mu=\overline{m+\sum_{k=1}^{g}t_k-d_mi}$，故 $\overline{m+\sum_{k=1}^{g}t_k}=\overline{d_mi}$。

因此，由引理 1 和引理 2 可知，当 $i\in\overline{Z_n}$时，$\{d_mi\}_{m\in Z_n}$是一个余数系统。

第三步 当 $C_{n,i}$是一个同步自动机时，w_i 是 $C_{n,i}$的唯一最短同步字。令 $C_{n,i}$是一个同步自动机，根据第一步证明的当 $i\in\overline{Z_n}$时，w_i 是 $C_{n,i}$的一个同步字，且 $C_{n,i}$的任意一个同步字的形式如式(5)所示。对非负整数 $d_m(m\in Z_n)$的定义如式(6)所示，整数集$\{d_mi\}_{m\in Z_n}$是一个余数系统。令

$$d=\max\{d_m\}_{m\in Z_n}$$

可以确定 $d\leqslant g$。然后根据引理 2 可知，$\{d_m\}_{m\in Z_n}$也是一个余数系统，因此 $n-1\leqslant d$。故

$$n-1\leqslant d\leqslant g \tag{7}$$

假设 $m_0\in Z_n$ 使得 $d_{m_0}=d$，则存在 d 个整数 $g_1,g_2,\cdots,g_d$，且 $0<g_1<g_2<\cdots<g_d<g$ 使得$\{g_1,g_2,\cdots g_d\}=\{k\mid \mu_k^{m_0}=i,1\leqslant k\leqslant g\}$。对任意 $r=1,2,\cdots,d-1$，有：

$$\begin{aligned}i&=m_0b^{t_1}ab^{t_2}a\cdots b^{t_r}ab^{t_{g_r+1}}ab^{t_{g_r+2}}a\cdots b^{t_{g_{r+1}}}\\&=(m_0b^{t_1}ab^{t_2}a\cdots b^{t_r})ab^{t_{g_r+1}}ab^{t_{g_r+2}}a\cdots b^{t_{g_{r+1}}}\\&=iab^{t_{g_{r+1}}}ab^{t_{g_{r+2}}}a\cdots b^{t_{g_{r+1}}}\\&=0b^{t_{g_{r+1}}}ab^{t_{g_{r+2}}}a\cdots b^{t_{g_{r+1}}}\\&=\overline{t_{g_r+1}+t_{g_r+2}+\cdots+t_{g_{r+1}}}\end{aligned}$$

即：

$$\sum_{s=g_r+1}^{g_{r+1}}t_s=t_{g_r+1+t_{s_r+2}}+\cdots+t_{g_{r+1}}\geqslant i$$

因此：

$$|u|=g+\sum_{k=1}^{g}t_k\geqslant g+t_1+\sum_{r=1}^{g_1}\sum_{s=g_r+1}^{g_{r+1}}t_s\geqslant g+t_1+(d-1)i \tag{8}$$

由于 w_i 和 u 分别是 $C_{n,i}$ 的一个同步字和一个最短同步字，因此：

$$|u|\leqslant|w_i| \tag{9}$$

观察可以得到 $t_1=0$ 且

$$|w_i|=(i+1)(n-2)+1=(n-1)+[(n-1)-1]i$$

根据式(7)和式(8)，当

$$\begin{cases}g_1=1\\g=n-1=d\\g_r+1=g_{r+1},r=1,2,\cdots,d-1\\\sum\limits_{s=g_r+1}^{g_{r+1}}t_s=i,,r=1,2,\cdots,d-1\end{cases}$$

或 $u=w_i$ 时，不等式(9)完全成立。即 $C_{n,i}$ 的任意一个最短同步字 u 必须与 w_i 相一致，且 w_i 是 $C_{n,i}$ 的唯一最短同步字。

注记 1　自动机 $C_{n,i}$ 中所有的同步自动机集用 $\boldsymbol{C}_n$ 表示。根据定理 3 可知，$\boldsymbol{C}_n=\{C_{n,i}\mid i\in\overline{Z_n}\}$，它是 n-状态同步自动机的一个非空簇。根据定理 3 探讨 $\boldsymbol{C}_n$ 具有的几点属性：

(1)对任意 $i\in Z_n$，借助于欧几里得的 GCD 算法，验证了是否存在 $C_{n,i}\in\boldsymbol{C}_n$。

(2)集合 $\boldsymbol{C}_n$ 的基数恰好是 n 的欧几里得函数。此外，当 $n>2$ 时，$\boldsymbol{C}_n$ 至少包含两个元素 $C_{n,1}$ 和 $C_{n,n-1}$。

(3)字 w_1 是 $\boldsymbol{C}_n$ 中某个自动机的最短同步字。

3　分析同步自动机的应用优势

给定一个非空自动机 $\boldsymbol{A}=(Q,A,\xi)$，将在集合 $Q\times A$ 上的实值函数称为 $\boldsymbol{A}$ 的转移损耗函数。令 $\zeta:(q,x)\mapsto\zeta_x^q$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个转移损耗函数。字 w 在状态 q 上的作用定义如下：

$$\zeta_w^q=\begin{cases}0, & w\text{ 是个空字}\\\zeta_u^q+\zeta_x^{qu}, & w=ux(u\in A^*\text{ 且 }x\in A)\end{cases}$$

假设 $w=x_1x_2\cdots x_{|w|}$ 且 $x_1x_2\cdots x_{|w|}\in A$，以及 w 作用于 q 的路径如下：

$$q=q_0\xrightarrow{x_1}q_1\xrightarrow{x_2}\cdots q_{m-1}\xrightarrow{x_{|w|}}q_{|w|}=qw$$

则

$$\zeta_w^q=\sum_{k=0}^{m-1}\zeta_{x_{k+1}}^{q_k}$$

字 w 的平均损耗定义为：

$$\zeta_w=\frac{1}{|Q|}\sum_{q\in Q}\zeta_w^q$$

如果 $\boldsymbol{A}$ 的状态集 Q 被赋予概率分布函数 $\eta:q\mapsto\eta_q$，则字 $w\in A^*$ 的加权平均损耗定义为：

$$\overline{\zeta_w}=\sum_{q\in Q}(\eta_q\cdot\zeta_w^q)$$

显然，当 $\boldsymbol{A}$ 均匀分布时，$\zeta_w=\overline{\zeta_w}$。

定理 2　对任意 $i\in\overline{Z_n}$，自动机的转移损耗函数定义如下：

$$\zeta_x^m=\begin{cases}s, & x=b\\r, & m\neq i\text{ 且 }x=a\\t, & m=i\text{ 且 }x=a\end{cases} \tag{10}$$

其中，r,s,t 是非负实参，则：

$$\zeta_{w_i}=\begin{cases}|w_i|r, & r=s=t\\\dfrac{1}{2}[(2n-4)is+(n-1)t], & r=0\end{cases} \tag{11}$$

此外，如果将三元组 (r,s,t) 替换为三元组 $(1,1,1)$，$(0,1,1)$ 和 $(0,1,n-i)$ 中的某一个，则：

$$\zeta_{w_i}=\min\{\zeta i_{w_i}\}_{i\in\overline{Z_n}} \tag{12}$$

证明：如果 $r=s=t$，显然有：

$$\zeta_{w_i}=|w_i|r$$

首先考虑 $r=0$ 的情形。由于 $1,i\in\overline{Z_n}$ 且 $\{m\}_{m\in Z_n}=Z_n$，根据引理 1 和引理 2 可知，$\{i-m\}_{m\in Z_n}$ 和 $\{mi\}_{m\in Z_n}$ 是余数系统。对任意 $m\in Z_n$，存在唯一 $c_m\in Z_n$ 使得 $\overline{mi}=\overline{i-c_m}$，因此 $\overline{mi+c_m}=i$。

对任意不同于 $n-1$ 的 $m\in Z_n$，一般而言，可以得到：

$$\begin{aligned}\zeta_{w_i}^{c_m}&=\zeta_{(ab^i)^ma(b^ia)^{n-2-m}}^{c_m}\\&=\zeta_{(ab^i)^m}^{c_m}+\zeta_a^{c_m(ab^i)^m}+\zeta_{(b^ia)^{n-2-m}}^{c_m(ab^i)^ma}\\&=\zeta_{(ab^i)^m}^{c_m}+\zeta_a^i+\zeta_{(b^ia)^{n-2-m}}^0\\&=mis+t+(n-2-m)(is+t)\\&=(n-2)is+(n-1-m)t\end{aligned}$$

此外，可以确定的是 $c_{n-1}(ab^i)^m=\overline{mi+c_{n-1}}\neq i$，因此：

$$\begin{aligned}\zeta_{w_i}^{c_{n-1}}&=\sum_{m=0}^{n-3}(\zeta_a^{c_{n-1}(ab^i)^m}+\zeta_{b^i}^{c_{n-1}(ab^i)^ma})+\zeta_a^{c_{n-1}(ab^i)^{n-2}}\\&=\sum_{m=0}^{n-3}(0+\zeta_{b^i}^{c_{n-1}(ab^i)^ma})+0\\&=(n-2)is\\&=(n-2)is+[(n-1)-(n-1)]t\end{aligned}$$

故，对任意的 $m\in Z_n$，有：

$$\zeta_{w_i}^{c_m}=(n-2)is+(n-1-m)t$$

由于 $Z_n=\{c_m\}_{m\in Z_n}$，而

$$\begin{aligned}\zeta_{w_i}&=\frac{1}{n}\sum_{m\in Z_n}\zeta_{w_i}^m\\&=\frac{1}{n}\sum_{m\in Z_n}\zeta_{w_i}^{c_m}\\&=\frac{1}{n}\sum_{m\in Z_n}[(n-2)is+(n-1-m)t]\\&=\frac{1}{n}[n(n-2)is+\sum_{m\in Z_n}(mt)]\\&=\frac{1}{n}[n(n-2)is+\frac{n(n-1)t}{2}]\\&=\frac{(2n-4)is+(n-1)t}{2}\end{aligned}$$

因此，当 $r=0$ 时，式(11)成立。

令 $i(i\geqslant1)$ 是 $\overline{Z_n}$ 的任意一个元素。如果 $(r,s,t)=(1,1,1)$，则 $\zeta_{w_i}=|w_i|\geqslant|w_1|=\zeta_{w_1}$；如果 $(r,s,t)=(0,1,1)$，则 $\zeta_{w_i}=\dfrac{(2n-4)is+(n-1)t}{2}\geqslant\dfrac{3n-5}{2}=\zeta_{w_1}$。

当 $(r,s,t)=(0,1,n-1)$ 时，如果 $n=2$，则 $\overline{Z_n}=\{1\}$；如果 $n=3$，则 $\overline{Z_n}=\{1,2\}$ 且 $\zeta_{w_1}=3=\zeta_{w_2}$；如果 $n\geqslant3$，则

$$\zeta_{w_i}=\frac{(2n-4)i+(n-1)(n-i)}{2}$$

$$=\frac{(n-3)i+n(n-1)}{2}$$
$$\geqslant\frac{(n-3)+n(n-1)}{2}$$
$$=\zeta_{w_1}$$

因此,如果三元组(r,s,t)可被$(1,1,1)$,$(0,1,1)$和$(0,1,n-i)$这 3 个三元组中的某一代替,则等式(12)总是成立的。

注记 2 重置电子装置的研究。假设某个电子设备 $\boldsymbol{D}$ 具有 n-状态,且设备 $\boldsymbol{D}$ 的状态是由 Z_n 的元素标记的,特别地,记 0 为初始状态。有时,当设备 $\boldsymbol{D}$ 处于未知状态时,需要将其重置为状态 0,对于该想法,一个可考虑的重置方案是采取 $i\in\bar{Z}_n$ 且设计两个输入 a 和 b,它根据自动机 $C_{n,i}$ 转换设备 $\boldsymbol{D}$ 的状态。因此,根据定理 1,无论何时,设备 $\boldsymbol{D}$ 都可以在序列 w_i 的作用下重置到状态 0。

令 $C_{n,i}$ 的转移损耗函数 $\zeta:(m,x)\mapsto\zeta_x^m$ 根据等式(10)定义,令 m 是设备 $\boldsymbol{D}$ 的任意一个状态,且 $m=q_0\xrightarrow{x_1}q_1\xrightarrow{x_2}\cdots q_{m-1}\xrightarrow{x_{|w_i|}}q_{|w_i|}=0$,是 w_i 作用于 m 的路径。如果$(r,s,t)=(1,1,1)$,则 $\zeta_{w_i}^m$ 是重置序列的长度,即 $\zeta_{w_i}^m=|w_i|$。

如果$(r,s,t)=(0,1,1)$,则 $\zeta_{w_i}^m$ 恰好是状态 m 的重置过程中状态被改变的次数,即 $\zeta_{w_i}^m=|\{k\,|\,q_k\neq q_{k+1},0\leqslant k\leqslant|w_i|-1\}|$。

对任意状态 $m\in Z_n$,令 η_m是状态 m 在任意一个字 w 的作用下转置到状态 0 的概率,因此就产生了集合 Z_n 上的一个概率分布函数 $\eta:m\mapsto\eta_m$,所以将 η_m看作是由重置序列 w_i 作用于状态m 的概率是合理的。如果 Z_n是不均匀分布的,根据注记 1 和定理 5 可知,在一般情况下,$C_{n,1}$是 $\boldsymbol{C}_n$ 中重置算法最好的一个,它意味着在重置过程中状态被改变的最短重置序列和最少的平均时间。通过构造实例说明,当 Z_n 不均匀分布时,其情况可能不同于一般情况。

注记 3 一个对象 $\boldsymbol{O}$ 存在 n 种可能的方向,这些方向通过 Z_n 的元素标记,特殊地,这些状态在圆上沿顺时针方向均匀分布。如果需将 $\boldsymbol{O}$ 转换至给定规则中的方向 0 且与初始状态无关时,可采取 $i\in\bar{Z}_n$ 且设计两个机制 a 和 b,由 $C_{n,i}\in\boldsymbol{C}_n$ 控制 $\boldsymbol{O}$ 的方向转换。因此,无论何时,$\boldsymbol{O}$ 都可以在序列 w_i 的作用下定向到方向 0。

参 考 文 献

[1] HOWIE J M. Automata and Languages [M]. Clarendon Press, Oxford,1991.

[2] ČERN J. Poznam k akhomogeny meksperimentom s konechnymiau to matami [J]. Matematicko-fyzikalny Casopis SAV, 1964,14(3):208-215.

[3] HENNIE F C. Fault detecting experiments for sequential circuits[C]// Proceedings of the Symposium on Switching Circuit Theory andLogical Design. New Jersey:USA,1964:95-110.

[4] NATARAJAN B. Some paradigms for the automated design of part feeders [J]. International Journal of Robotics Research, 1989,8(6):89-109.

[5] EPPSTEIN D. Reset sequences for monotonic automata[M]. Society for Industrial and Applied Mathematics, Comput, 1990: 19500-19510.

[6] VOLKOV M V. Synchronizing automata and the Černy conjecture [C]// International Conference on Language and Automata Theory and Applications. Berlin:Springer,2008,5196:11-27.

[7] DUBUC L. Les automates circulairesbiaisésvérifient la conjecture dečerný[J]. RAIRO Informatiquethéoriqueet Applications, 1996,30(6):495-505.

[8] DUBUC L. Sur les automates circulaireset la conjecture černý [J]. RAIRO Informatiquethéoriqueet Applications, 1998, 32(1/2/3):21-34.

[9] KARI J. Synchronizing finite automata on Eulerian digraphs [C]// International Symposium on Mathematical Foundations of Computer Science. Springer-Verlag,2001,259:223-232.

[10] TRAHTMAN A N. The Černý Conjecture foraperiodic automata[C]// Discrete Mathematics Theory Computer Science,2007, 9(2):3-10.

[11] STEINBERG B. The Černý conjecture for one-cluster automata with prime length cycle[J]. Theoretical Computer Science, 2011,412(9):5487-5491.

[12] ANANICHEV D S, VOLKOV M V. Synchronizing generalized monotonic automata[J]. Theoretical Computer Science, 2005, 330:3-13.

[13] CUI Z H, HE Y, SUN S Y. Synchronizing bounded partially ordered automata[J]. Chinese Journal of Computers,2017,1-13.

[14] PNATARAJAN B. Some paradigms for the automated design of part feeders[J]. International Journal of Robotics Research, 1989,8(6):89-109.

[15] LEE D, YANNAKAKIS M. Principles and methods of testing finite state machines-A survey[J]. Proceedings of the IEEE, 1996,84(8):1090-1123.

[16] BENENSON Y, PAZ-ELIZUR T, ADAR R, et al. Programmable and autonomouscomputing machine made of biomolecules, Nature,2001,414(1):430-434.

[17] BENENSON Y, ADAR R, PAZ-ELIZUR T. DNA molecule provides acomputing machine with both data and fuel [J]. Proceedings of theNational Academy of Science of the USA, 2003, 100(5):2191-2196.

[18] MARTYUGIN P. Complexity of problemsconcerning reset words for cyclic and Eulerian automata [J]. Theoretical Computer Science,2012,450(7):3-9.