

分数阶统一混沌系统动力学及其复杂度分析

严波¹ 贺少波²

(湖南文理学院计算机科学与技术学院 湖南常德 415000)¹

(中南大学物理与电子学院 长沙 410083)²

摘要 基于 Adomian 分解算法、Lyapunov 指数谱、分岔图和吸引子相图分析了分数阶统一混沌系统的复杂动力学特性,并揭示了系统状态随参数和微分阶数变化的规律以及系统走向混沌的道路。采用 C_0 算法和 SampEn 算法计算了分数阶统一混沌系统的复杂度。通过分析与最大 Lyapunov 指数谱的比较,发现复杂度的计算结果与最大 Lyapunov 指数谱结果在反应分数阶统一混沌系统的动力学特性方面具有较好的一致性,且 C_0 算法的分析结果优于 SampEn 算法的分析结果。最后,设计了基于统一混沌系统的伪随机序列发生器。测试结果表明,其可以通过全部 NIST 测试项目,这为分数阶统一混沌系统的实际应用奠定了实验基础。

关键词 统一混沌系统,分数阶微积分,Adomian 分解算法,复杂度,伪随机序列

中图分类号 TP0415 **文献标识码** A

Dynamics and Complexity Analysis of Fractional-order Unified Chaotic System

YAN Bo¹ HE Shao-bo²

(School of Computer Science and Technology, Hunan University of Arts and Science, Changde, Hunan 415000, China)¹

(School of Physics and Electronics, Central South University, Changsha 410083, China)²

Abstract Based on Adomian decomposition method (ADM), Lyapunov exponent spectrum, bifurcation diagram and attractor diagram, dynamics of the fractional-order unified chaotic system and the low of system state changing with its parameter and derivative order were analyzed, and the route from period state to chaos were observed. Moreover, complexity of fractional-order unified chaotic system was analyzed by means of C_0 algorithm and Sample entropy algorithm. Through comparative analysis with the maximum Lyapunov exponent spectrum, it shows that the complexity analysis results are well consistent with the results of the maximum Lyapunov exponent spectrum dynamics in reflecting the dynamics of the fractional-order unified chaotic system, and the results of C_0 algorithm is better than the results of Sample entropy algorithm. Finally, a pseudo random sequence generator was designed based on the fractional order unified chaotic system. The test results show that it can pass all NIST tests, which laid an experimental basis for the practical applications of the fractional order unified chaotic system.

Keywords Unified chaotic system, Fractional-order calculus, Adomian decomposition method, complexity, Pseudo-random sequence

分数阶微积分能够简洁、准确地描述具有历史记忆性和空间全域相关性等的力学与物理过程,是当前非线性领域的研究热点,并在量子力学、电磁振荡、系统控制、材料力学等领域有着广泛的应用^[1-3]。

分数阶混沌系统求解算法可分为数值求解法和解析法两类。这两类算法中用得比较多的有预估-校正算法^[6]、频域算法^[7]、Adomian 分解算法^[8]以及同伦摄动算法^[9]。分数阶非线性系统解析算法经过离散化可以得到离散迭代式,该离散迭代式的求解不需要占用大量的计算机内存,且计算精度高,因此,基于解析算法得到的数值解更具实用价值。作为解析法的代表,ADM 利用有限次离散迭代式可得到系统较为精确的数值解,且该算法计算精度高、收敛速度快,已被广泛应

用于分数阶混沌系统的求解^[10-12]。因此,本文采用了 ADM 求解分数阶混沌系统,并计算系统的 Lyapunov 指数谱,同时采用了分岔图和吸引子相图来分析分数阶混沌系统随参数和微分阶数变化的动力学特性。

复杂度是一种有效的混沌系统动力学与复杂性分析方法^[12-16]。文献^[15]采用 C_0 复杂度算法^[17]分析了 Logistic 映射、简化 Lorenz 系统和超混沌 Lorenz 系统的动力学特性。文献^[16]利用样本熵算法 (Sample entropy algorithm or SampEn algorithm)^[18]进行非线性动力学分析和混沌载波中嵌入的信号检测。其中, C_0 复杂度算法通过傅里叶变换 (FFT) 将时间序列分解成规则和不规则两部分,并去掉频率域信号的规则部分,留下非规则部分;再测度时间序列中非规

本文受国家自然科学基金理论物理专项(11747150),博士后创新人才支持计划(BX20180386),湖南文理学院博士科研启动基金(E07017001)资助。

严波(1986-),男,博士,讲师,主要研究方向为混沌算法、电磁场数值模拟仿真, E-mail: yankebo86@163.com; 贺少波(1987-),男,博士后,讲师,主要研究方向为分数阶混沌系统, E-mail: heshabo_123@163.com(通信作者)。

则部分能量所占比例。而 SampEn 算法直接对时间序列进行测度,计算时间序列在维数变化时产生新模式的概率。两种复杂度算法采取不同的数学原理,能从不同角度分析非线性序列的复杂性。复杂度算法只需要截取系统的任意一段序列,即能得到系统的复杂度测试结果。相比于动力学特性分析方法,如 Lyapunov 指数谱、分岔图、相图等,复杂度算法的计算代价较小,且结果同样具有实际应用价值。本文将采用 C_0 复杂度算法和 SampEn 算法来分析分数阶混沌系统的复杂性与安全性,这为分数阶混沌系统在实际应用中的参数选择提供了有力的依据。同时,本文将对对比研究不同复杂度算法分析混沌系统的复杂性时的效果差异以及复杂度算法分析结果与动力学特性分析结果在分析系统中的关系。

当前,基于计算机数值仿真以及 DSP/FPGA 数值电路实现技术的混沌系统已被广泛应用于信息安全领域,比如图像加密^[19]和保密通信^[20-21]。在这些安全加密应用中,混沌伪随机序列或者混沌扩频序列扮演着重要的角色,是信息安全的基础。国内已有很多学者研究过混沌伪随机序列发生器的设计^[22-24]。例如,简远鸣^[22]采用 32 位高性能浮点 TMS320-C6713 DSP 处理器,在 DSP 集成开发环境 CCS2.2 下,实现了 TD-ERCS 混沌系统及伪随机序列发生器,并为混沌伪随机序列发生器的硬件实现进行了有益的探索。丘嵘等^[23]基于 FPGA 设计了一种混沌伪随机序列发生器,实验证明了该设计可有效应用于以 FPGA 为平台的混沌通信和密码系统的设计。马英杰等^[24]将 Tent 实值序列转化为二进制序列,生成了 Tent 伪随机序列。使用可视化仿真工具 Simulink 对该序列发生器进行了数值仿真,证明了其正确性和可行性。然而,上述能完全通过美国国家标准协会与技术研究院(NIST)伪随机性测试标准的研究却并不多,且基于分数阶混沌系统的混沌伪随机序列的报道也很少。对此,本文选择分数阶统一混沌系统复杂度较高时的时间序列^[25-26],采用 DSP 数字电路实现技术设计相应的分数阶混沌伪随机序列发生器,并采用 NIST 测试标准对产生的伪随机序列进行随机性能测试,为分数阶统一混沌系统的实际应用奠定了理论基础。

本文采用 Adomian 分解算法求解分数阶统一混沌系统,分析了系统的动力学特性和复杂度,对比分析 C_0 复杂度算法、SampEn 算法与最大 Lyapunov 指数谱计算结果。最后,采用 NIST 测试标准测试设计的分数阶统一混沌系统伪随机序列发生器的随机性。

1 分数阶统一混沌系统模型

统一混沌系统的数学模型^[22-23]为:

$$\begin{aligned} D_t^\alpha x &= (25\alpha + 10)(y - x) \\ D_t^\alpha y &= (28 - 35\alpha)x - xz + (29\alpha - 1)y \\ D_t^\alpha z &= xy - \frac{8 + \alpha}{3}z \end{aligned} \quad (1)$$

其中, $\alpha \in (0, 1]$ 。式(1)代表一簇混沌系统。当 $\alpha \in (0, 0.8)$ 时,该系统属于广义 Lorenz 系统;当 $\alpha = 0.8$ 时,该系统属于广义 Lü 系统;当 $\alpha \in (0.8, 1]$ 时,该系统属于广义 Chen 系统。统一混沌系统具备一系列优良的性质,为混沌动力学等研究提供了良好的模型。文献[12]给出了 Adomian 分解算法求解混沌系统的具体细节和推导过程,这里不再赘述。在实际计算中,由于 Adomian 算法收敛较快,通常采用有限项就可

得到比较精确的数值解,而本文在求解统一混沌系统方程时,只取推导结果的前 4 项。

2 分数阶统一混沌系统动力学特性分析

分数阶统一混沌系统具有参数 α 和分数阶阶数 q ,本节将分析该系统随参数 α 和阶数 q 变化的动力学特性。

2.1 固定 $q=0.95$, α 变化的动力学特性

根据分数阶统一混沌系统的特性, α 的取值范围为 $(0, 1]$,其变化步长取值为 0.0006,相应的 Lyapunov 指数谱图及分岔图如图 1 所示。由图 1 可知,除了区间 $\alpha \in [0.58, 0.62]$ 表现为明显的周期态之外,系统基本处于混沌状态,此结论分岔图与 Lyapunov 指数谱图计算结果一致。通过进一步观测图 1(b)发现,在 $\alpha = 0.3822, 0.48, 0.6$ 和 0.9384 时,系统也表现为周期状态。选取 $\alpha = 0.38, 0.48, 0.6$ 的周期吸引子和 $\alpha = 0.8$ 时的混沌吸引子相图如图 2 所示,从吸引子相图的形态可以看出,吸引子相图结果与动力学特性分析结果一致,且当参数 α 变化时,分数阶统一混沌系统具有丰富的动力学特性。

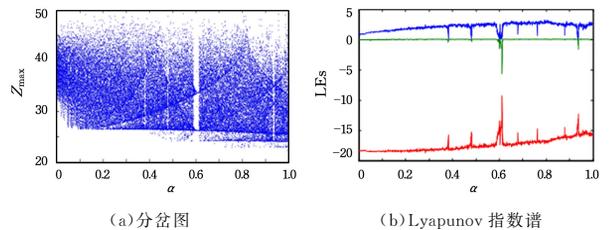


图 1 $q=0.95$ 时,系统随参数 α 变化的动力学特性

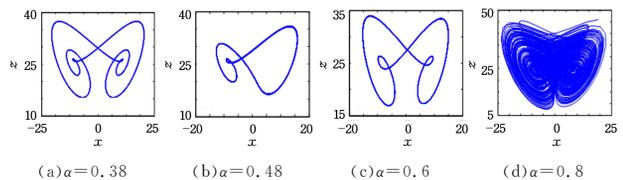


图 2 $q=0.95$ 时,系统随参数 α 变化吸引子相图

2.2 固定 $\alpha=0.9$, q 变化的动力学特性

选取 $\alpha = 0.9$ 时,研究 q 变化的动力学特性。分数阶统一混沌系统随阶数 q 变化的 Lyapunov 指数谱图和分岔图如图 3 所示。其中, q 的变化范围为 $[0.7, 1]$,变化步长值为 0.001。从图 3 可以看出,在区间 $q \in [0.703, 0.711]$ 内,系统处于发散状态;区间 $q \in [0.732, 0.751]$ 内,系统处于周期状态;其他情况下,系统几乎都处于混沌态。从图 3(b)可以看出,分数阶统一系统的复杂性随着阶数 q 的增大呈减小的趋势,且当 $q = 0.721, 0.75, 0.782, 0.815$ 和 0.892 时,系统也为周期态。选取 $q = 0.75, 0.782, 0.892$ 的周期吸引子和 $q = 0.85$ 时的混沌吸引子相图如图 4 所示,从吸引子相图的形态可以看出,吸引子相图结果与动力学特性分析结果一致,且 Lyapunov 指数谱图比分岔图在反应系统状态时细节性更强,且更精确。

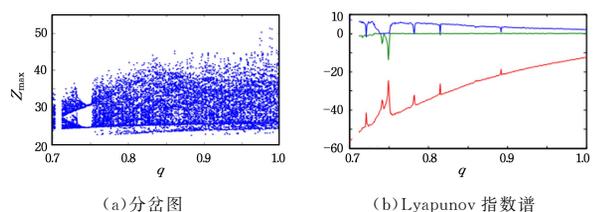
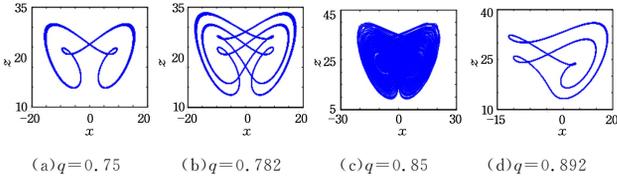
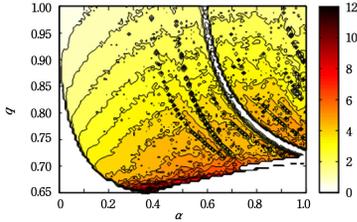


图 3 $\alpha=0.9$ 时,系统随阶数 q 变化的动力学特性

图 4 $\alpha=0.9$ 时,系统随参数 q 变化的吸引子相图

2.3 q 与 α 同时变化时的最大 Lyapunov 指数混沌特性

当 q 与 α 同时变化时,分数阶统一混沌系统大于零的最大 Lyapunov 指数混沌,如图 5 所示,其中, q 的变化范围为 $[0.65, 1]$,步长值为 0.001 ; α 的取值范围为 $(0, 1]$,步长值为 0.01 。由图 5 可以看出,在计算区间内,大部分区域都处于混沌态。当 $\alpha \in [0.2, 0.8]$ 且 $q \in [0.65, 0.7]$ 时,系统存在一个最大 Lyapunov 指数值较大的区间,而在这个区间内,系统复杂度相对其他区间更高,更有利于实际混沌应用。

图 5 系统 $q-\alpha$ 参数平面最大 Lyapunov 指数混沌图

3 复杂度分析

复杂度是衡量混沌序列信号随机性的重要指标,也是分析混沌系统动力学特性的重要参数^[12-16]。本节采用了 C_0 复杂度和样本熵 SampEn 复杂度算法分析统一系统的复杂度特性,并将两种算法的结果进行了比较。

3.1 C_0 复杂度算法

C_0 复杂度^[17]主要的计算思想是将时间序列分解成规则和不规则两部分,其测度值为序列中非规则部分所占的比例。算法的计算步骤如下。

第 1 步 对给定长度为 N 的时间序列 $\{x(i), i=0, 1, 2, \dots, N-1\}$ 进行离散傅里叶变换:

$$X(k) = \text{里} \sum_{i=0}^{N-1} x(i) e^{-\frac{2\pi i k}{N}} = \sum_{i=0}^{N-1} x(i) W_N^{ik} \quad (2)$$

其中, $k=0, 1, \dots, N-1$ 。

第 2 步 设 $\{X(k), k=0, 1, 2, \dots, N-1\}$ 的均方值为:

$$G_N = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X(k)|^2 \quad (3)$$

引入参数 r ,保留超过均方值 r 倍的频谱,而将其余部分置为零,即:

$$\tilde{X}(k) = \begin{cases} X(k), & \text{if } |X(k)|^2 > rG_N \\ 0, & \text{if } |X(k)|^2 \leq rG_N \end{cases} \quad (4)$$

第 3 步 对 $\tilde{X}(k)$ 作傅里叶逆变:

$$\tilde{X}(i) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) e^{\frac{2\pi i k}{N}} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) W_N^{-ik} \quad (5)$$

其中, $i=0, 1, \dots, N-1$ 。

第 4 步 定义 C_0 复杂度为:

$$C_0(r) = \sum_{i=0}^{N-1} |x(i) - \tilde{X}(i)|^2 / \sum_{i=0}^{N-1} |x(i)|^2 \quad (6)$$

基于 FFT 的 C_0 复杂度算法,将信号变换域的规则部分去掉,留下非规则部分,序列中非规则部分能量所占比例越

大,即对应时域信号越接近随机序列,则复杂度越大。根据文献^[10],文中参数 $r=10$ 。

3.2 样本熵算法

样本熵(Sample Entropy, SampEn)^[18]是时间序列在维数变化时产生新模式的概率的度量方法,时间序列的复杂性越大,概率越大,熵值也越大。算法的计算步骤如下。

第 1 步 设给定长度为 N 的时间序列为 $\{x(i), i=0, 1, 2, \dots, N-1\}$, m 为选定的模式维数, r 为选定的相似容限值,则 m 维向量可以表示为:

$$X(i) = [x(i), x(i+1), \dots, x(i+m-1)], \quad i=0, 1, 2, \dots, N-m \quad (7)$$

第 2 步 定义 $X(i)$ 与 $X(j)$ 之间的距离 $d[X(i), X(j)]$ 为两者对应元素中差值最大的一个,即:

$$d[X(i), X(j)] = \text{Max}_{k=0 \rightarrow m-1} \{|X(i+k) - X(j+k)|\} \quad (8)$$

第 3 步 对每一个 i 和 j 值, $i=0, 1, 2, \dots, N-m, j=0, 1, 2, \dots, N-m$, 且 $i \neq j$, 统计 $d[X(i), X(j)] < r$ 的个数以及此值与距离总数 $N-m$ 的比值,记作 $B_i^m(r)$, 则有:

$$B_i^m(r) = \frac{1}{N-m} \{d[X(i), X(j)] < r \text{ 的个数}\} \quad (9)$$

第 4 步 求 $B_i^m(r)$ 的平均值,其表达式为:

$$B^m(r) = \frac{1}{N-m+1} \sum_{i=0}^{N-m} B_i^m(r) \quad (10)$$

第 5 步 将维数加 1 为 $m+1$,重复第 1 步至第 4 步,求得 $B^{m+1}(r)$ 。

第 6 步 最终得到 SampEn 的计算公式为:

$$\text{SampEn}(m, r) = -\ln \frac{B^{m+1}(r)}{B^m(r)} \quad (11)$$

样本熵的值与 m 和 r 的取值有关,通常 m 的取值范围在 $2 \sim 10$ 之间, r 取原始时间序列标准差(SD)的 $0.1 \sim 0.25$ 倍。本文在对时间序列进行研究时,取 $m=2, r=0.25\text{SD}$ 。

3.3 分数阶统一混沌系统 C_0 和 SampEn 复杂度分析

为了将复杂度计算结果与第 2 节动力学特性分析结果做比较,统一系统 C_0 和 SampEn 复杂度计算参数以及测度的时间序列均与第 2 节一致。此时, $q=0.95, \alpha \in (0, 1]$ 和 $\alpha=0.9, q \in [0.7, 1]$ 的 C_0 复杂度和 SampEn 复杂度计算结果如图 6 所示; $\alpha \in (0, 1]$ 且 $q \in [0.65, 1]$ 同时在区间内变化时的 C_0 复杂度和 SampEn 复杂度混沌图如图 7 所示。

为了便于比较分析不同复杂度算法与最大 Lyapunov 指数谱(Les-max)的结果差异,这里将最大 Lyapunov 指数谱曲线(绿色线)也放到了图 6 中,因为最大 Lyapunov 指数谱值远远大于复杂度算法值,我们将最大 Lyapunov 指数谱值的刻度标注在图 6 边框的右端,复杂度值的刻度标注在图 6 边框的左端。由图 6(a)可知,当 $q=0.95, \alpha \in (0, 1]$ 时, C_0 复杂度曲线和 SampEn 复杂度曲线近似于两条平行线,且两条曲线的变化方式吻合度较高,都与最大 Lyapunov 指数谱曲线具有较高的正相关性,都能正确反应统一混沌系统的动力学特性。然而,当 $\alpha=0.9, q \in [0.7, 1]$ 时(见图 6(b)), C_0 复杂度与 SampEn 复杂度的结果差异较大, C_0 复杂度在系统为混沌状态时的较大值与系统为周期状态时的较小值之间的差异大,且 C_0 复杂度值与最大 Lyapunov 指数谱值的变化趋势的吻合度要明显高于 SampEn 复杂度值。

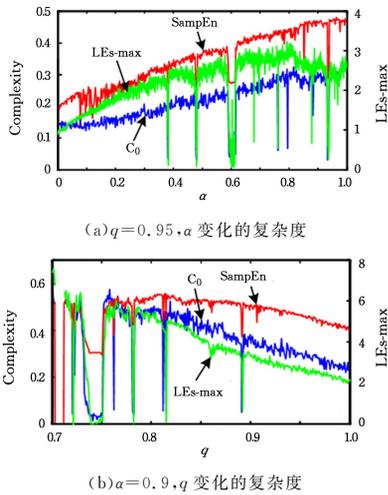


图6 分数阶统一混沌系统 C_0 复杂度(蓝色线)和 SampEn 复杂度(红色线)(电子版为彩色)

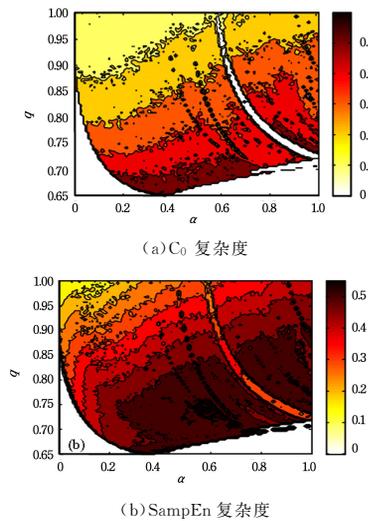


图7 分数阶统一混沌系统 $q\alpha$ 参数平面复杂度混沌图

由图7可知,系统 C_0 复杂度和 SampEn 复杂度混沌区域的变化规律类似于图5所示的结果,且数值的层次变化更加分明,更能反映统一系统的动力学特性。通过比较图7(a)与图7(b),发现 C_0 算法的高复杂度区域与低复杂度区域边界较为明显,而 SampEn 复杂度约80%的值都位于0.3至0.5之间,跨度很小,故 C_0 复杂度相比于 SampEn 复杂度,在分析时间序列的动力学特性方面效果更优。

4 伪随机序列发生器设计

根据第3节复杂度的分析结果,选择复杂度较高的时间序列在 DSP 开发板上设计分数阶混沌伪随机序列发生器,为分数阶统一混沌系统的实际应用奠定了基础。首先,在 DSP 开发板上实现了分数阶统一混沌系统,然后,设计了基于分数阶统一混沌系统的 DSP 混沌伪随机序列发生器,具体步骤如下。

第1步 令迭代次数 $n=1$, $\alpha=0.85$, $q=0.9$, 系统初值 $x_0=[1, 2, 3]$, 将迭代最大次数设为 $M=0.125 \times 10^8 + 10^4$, 迭代1000次求解分数阶统一混沌系统。令 $n=1001$, $x_0(n)=[x(n), y(n), z(n)]$ 。

第2步 迭代1次求解分数阶统一混沌系统,得到系统的数值解,令 $data=x(n+1)$, 并进行如下运算^[11]:

$$data = \text{round}(|data| \times 10^{11}) \quad (12)$$

即 $data$ 可以由一个64位的二进制数 $DB_{63} - DB_0$ 表示。

第3步 令 $data_1 = DB_7 - DB_0$, 然后将 $data_1$ 经串 MAX3232 (RS-232 transceiver) 传入计算机中, 保存在 txt 文档中, 以供测试使用。

第4步 设 $n=n+1$, $x_0(n)=[x(n), y(n), z(n)]$ 。

第5步 重复第2步到第4步, 直到 $n>M$ 。

算法结束后, 在计算机上得到了一个0与1的伪随机序列 txt 文件。

本文采用 NIST 测试标准进行序列的随机性测试, 该方法由美国国家标准与技术研究院负责推广与维护, 是当前公认伪随机序列随机性衡量标准。为了方便对序列的随机性进行测试, 美国国家标准与技术研究院还推出了 SP800-22^[27] 标准的统计测试软件包 (Statistical Test Suite, STS-2.1.2), 这是当前序列伪随机性能测试最权威的工具, 已被用于检验高级加密标准算法 (如 AES) 的伪随机特性。

每测试完一组数据后, 都会产生一个 p -value 值, 若 p -value 值大于 0.0001, 且各次测试的通过率位于置信区间:

$$\left[(1-\beta) - 3\sqrt{\frac{\beta(1-\beta)}{n}}, (1-\beta) + 3\sqrt{\frac{\beta(1-\beta)}{n}} \right] \quad (13)$$

其中, n 为样本数量, β 为显著水平, 则可认为被测序列通过了 NIST 测试, 且具有良好的随机性。

文中每一组测试序列的长度为 10^6 位, 100 组数据被用于测试。假设显著水平 $\beta=0.01$, 对于大部分测试, 通过率的置信空间应为 $[0.96015, 1]$ 。测试结果如表1所列, 其中对于测试多次的项, 只显示最低结果。由表1可知, 所有的 p -value 值都大于 0.0001, 且通过率都位于置信区间内。所以, 本文得到的分数阶混沌伪随机序列具有良好的伪随机性。

表1 NIST 伪随机测试结果

测试名称及次数	p -value	通过率/%	是否成功
Frequency (1)	0.042808	98	✓
B. Frequency (1)	0.051942	100	✓
C. Sums (2)	0.137282	97	✓
Runs (1)	0.494392	98	✓
Longest Run (1)	0.699313	98	✓
Rank (1)	0.637119	99	✓
FFT (1)	0.401199	97	✓
N. O. Temp (148)	0.003447	96	✓
O. Temp (1)	0.289667	97	✓
Universal (1)	0.779188	97	✓
App. Entropy (1)	0.249284	99	✓
R. Excur. (8)	0.242986	96.7	✓
R. Excur. V. (18)	0.008366	98.4	✓
Serial (2)	0.191687	97	✓
L. Complexity (1)	0.474986	100	✓

结束语 本文采用 Adomian 算法求解了分数阶统一混沌系统, 并基于分岔图、Lyapunov 指数谱、吸引子、 C_0 复杂度算法和 SampEn 算法分析了系统的复杂动力学特性, 得到以下结论。

1) 通过分析参数(和分数阶阶数 q 变化时的分岔图、Lyapunov 指数谱和吸引子形态图, 发现了统一混沌系统丰富的动力学特性, 且 Lyapunov 指数谱图比分岔图更能反映系统状态的细节性。

2) 复杂度分析算法为分数阶统一混沌系统的实际应用提供了一种有力的分析手段。相比于 SampEn 复杂度算法, C_0 复杂度算法分析时间序列的动力学特性的效果更优。

3) 分数阶统一混沌系统可以产生具有实际应用价值的伪随机序列,为分数阶统一混沌系统的实际应用奠定了理论基础。

参 考 文 献

- [1] KARAYER H, DEMIRHAN D, BÜYÜK F. Conformable fractional Nikiforov-Uvarov method[J]. *Communications in Theoretical Physics*, 2016, 66(7): 12-18.
- [2] FENG Q H, MENG F W. Oscillation results for a fractional order dynamic equation on time scales with conformable fractional derivative[J]. *Advances in Difference Equations*, 2018.
- [3] SOORKI M N, TAVAZOEI M S. Adaptive robust control of fractional-order swarm systems in the presence of model uncertainties and external disturbances[J]. *IET Control Theory & Applications*, 2018, 12(7): 961-969.
- [4] HE S B, SUN K H, WANG H H. Solution and dynamics analysis of a fractional-order hyper-chaotic system[J]. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 2016, 39(11): 2965-2973.
- [5] HE S B, SUN K H, MEI X Y, et al. Numerical analysis of a fractional-order chaotic system based on conformable fractional-order derivative [J]. *European Physical Journal Plus*, 2017, 132(1): 36.
- [6] 孙克辉, 杨静利, 丘水生. 分数阶混沌系统的仿真方法研究[J]. *系统仿真学报*, 2011, 23(11): 2361-2365.
- [7] PAN I, DAS S. Frequency domain design of fractional order PID controller for AVR system using chaotic multi-objective optimization[J]. *International Journal of Electrical Power & Energy Systems*, 2013, 51(10): 106-118.
- [8] WANG H H, SUN K H, HE S B. Characteristic analysis and DSP realization of fractional-order simplified Lorenz system based on Adomian decomposition method [J]. *International Journal of Bifurcation & Chaos*, 2015, 25(6): 1550085.
- [9] ODIBAT Z, MOMANI S. Modified homotopy perturbation method: Application to quadratic Riccati differential equation of fractional order[J]. *Chaos Solitons & Fractals*, 2008, 36(1): 167-174.
- [10] LIU C X, HUANG L L. Adomian decomposition method for detection of chaos in the Rucklige system[J]. *U. P. B. Scientific Bulletin*, 2015, 77(3): 299-306.
- [11] HE S B, SUN K H, WANG H H. Complexity analysis and DSP implementation of the fractional-order Lorenz hyperchaotic system[J]. *Entropy*, 2015, 17(12): 8299-8311.
- [12] 贺少波, 孙克辉, 王会海. 分数阶混沌系统的 Adomian 分解法求解及其复杂性分析[J]. *物理学报*, 2014, 63(3): 50-57.
- [13] 陈小军, 李赞, 白宝明, 等. 一种基于模糊熵的混沌伪随机序列复杂度分析方法[J]. *电子与信息学报*, 2011, 33(5): 1198-1203.
- [14] 孙克辉, 贺少波, 何毅, 等. 混沌伪随机序列的谱熵复杂性分析[J]. *物理学报*, 2013, 62(1): 27-34.
- [15] 孙克辉, 贺少波, 朱从旭, 等. 基于 C_0 算法的混沌系统复杂度特性分析[J]. *电子学报*, 2013, 41(9): 1765-1771.
- [16] LI N Q, PAN W, YAN L S, et al. Analysis of nonlinear dynamics and detecting messages embedded in chaotic carriers using sample entropy algorithm [J]. *Journal of the Optical Society of America B*, 2011, 28(8): 2018-2024.
- [17] 沈恩华, 蔡志杰, 顾凡及. C_0 复杂度的数学基础[J]. *应用数学和力学*, 2005, 26(9): 1083-1090.
- [18] RICHMAN J S, MOORMAN J R. Physiological time-series analysis using approximate entropy and sample entropy [J]. *American Journal of Physiology Heart & Circulatory Physiology*, 2000, 278(6): 2039-2049.
- [19] XU Y, WANG H, LI Y, et al. Image encryption based on synchronization of fractional chaotic systems[J]. *Communications in Nonlinear Science & Numerical Simulation*, 2014, 19(10): 3735-3744.
- [20] MARTÍNEZ-GUERRA R, GARCÍA J J M, PRIETO S M D. Secure communications via synchronization of Liouvillian chaotic systems[J]. *Journal of the Franklin Institute*, 2016, 353(17): 4384-4399.
- [21] 薛薇, 许进康, 贾红艳. 一个分数阶超混沌系统同步及其保密通信研究[J]. *系统仿真学报*, 2016, 28(8): 1915-1928.
- [22] 简远鸣. TD-ERCS 混沌伪随机序列发生器的 DSP 实现[D]. 长沙: 中南大学, 2008.
- [23] 丘嵘, 王春雷. 一个新的伪随机序列发生器的设计与实现[J]. *杭州电子科技大学学报*, 2012, 32(3): 5-8.
- [24] 马英杰, 于航如. Tent 混沌伪随机序列发生器设计与实现[J]. *北京电子科技学院学报*, 2015(4): 61-64.
- [25] 陈关荣, 吕金虎. Lorenz 系统族的动力学分析、控制与同步[M]. 北京: 科学出版社, 2003.
- [26] SHEN Z, LI J. Chaos control for a unified chaotic system using output feedback controllers[J]. *Mathematics & Computers in Simulation*, 2016, 132: 208-219.
- [27] LIU L, MIAO S, HU H, et al. Pseudorandom bit generator based on non-stationary logistic maps[J]. *IET Information Security*, 2016, 10(2): 87-94.