

基于矩阵论的一致性控制算法收敛速度分析

黄鑫权 刘爱军 梁小虎 王 桁

陆军工程大学通信工程学院天基信息系统教研室 南京 210007

(huangxinquan1993@sina.com)



摘要 空中自组网(Flying Ad-Hoc Network, FANET)是支撑无人机集群系统(Unmanned Aerial Vehicle Swarm, UAV swarm)的关键技术,它由数量庞大且具有无线通信能力的小型无人机构成。FANET中的信标帧业务在实现集群一致性控制应用的过程中扮演着重要角色。然而,实际应用中FANET无线链路的不可靠性将会导致信标帧出现丢包现象,进而影响一致性控制算法的收敛速度(或收敛时间),即集群所有状态值趋于一致的快慢程度。从理论上分析一致性控制算法收敛性能与信标帧丢包率之间的解析关系,对一致性控制算法在未来FANET中的应用具有举足轻重的意义。针对上述研究背景,文中提出了一种基于随机有向图模型和矩阵论的收敛性能分析模型。该模型将每个周期内FANET中的信息流抽象为随机有向图,并采用指示矩阵来表示该随机有向图的拉普拉斯矩阵,有效地用矩阵多项式对一致性收敛过程进行建模。随后,基于矩阵运算和矩阵谱半径的相关知识,该模型给出了最终期望收敛值的解析表达式。利用该最终期望收敛值,所提模型定义了新的收敛速度量化方法。与现有收敛速度分析工作不同,文中通过评估所有节点的初始状态值收敛到期望收敛值的快慢来对收敛速度进行量化,而不是根据收敛到每个周期网络的平均状态值来进行量化。基于矩阵运算和矩阵谱半径相关知识,所提模型给出了该收敛速度与信标帧丢包率之间的耦合关系,并根据该耦合关系推导出了收敛时间的表达式。仿真结果表明,所提收敛性能分析模型能够准确地描述实际FANET中收敛速度随时间的变化情况。此外,该模型能够准确描述实际FANET中每条链路的平均丢包率、状态值初始分布以及无人机节点个数的变化趋势对收敛时间的影响。同时,相比现有收敛性能分析模型,所提模型得到的收敛性能曲线更接近实际FANET中的收敛性能曲线。

关键词:一致性控制算法;随机有向图;收敛速度;收敛时间;空中自组网

中图分类号 TN927

Matrix Theory Aided Convergence Analysis of Consensus Behavior in FANET with Beacon Loss

HUANG Xin-quan, LIU Ai-jun, LIANG Xiao-hu and WANG Heng

Department of Space-based Information System, College of Communication Engineering, Army Engineering University, Nanjing 210007, China

Abstract Flying Ad-Hoc Network(FANET) which is a field of wireless Ad-Hoc network formed by small unmanned aerial vehicles(UAVs), is critical in achieving UAV swarm system. Beacon mechanism in FANET plays the fundamental role in performing consensus behavior of UAV swarm. However, the wireless link failures of practical FANET will introduce beacon loss which will affect the convergence rate or convergence time, which describe how fast all UAV states reach the common value. To achieve optimal consensus behavior, it is important to know how beacon mechanism affects the consensus behavior. To solve above-mentioned problem, this paper has investigated the analytical relation between the convergence rate/time of consensus behavior and the beacon loss probability. In the analytical work, information flow topology at each period is modeled by random directed graph, and one indicator matrix weighted is designed to model the Laplacian matrix of the graph. Based on the knowledge of matrix theory and spectrum radius of a matrix, the analytical work in this paper firstly gives an analytical expression of expected consensus value of the consensus process. Utilizing the expected consensus value, a novel quantification of convergence rate based on the expected final consensus value is provided. Different from existing analytical work, the convergence rate is quantified based on the expected consensus value, rather than to the average value of all states at each period. Finally, utilizing the knowledge of matrix theory and spectrum radius of a matrix, the proposed analytical work analyzes the relation between the convergence rate/time and the beacon loss probability. Simulation results show that, the proposed analytical model can accurately capture the convergence rate along with time in practical FANETs. Moreover, the proposed model can accurately capture the effect of average link failure

到稿日期:2020-10-25 返修日期:2020-12-22 本文已加入开放科学计划(OSID),请扫描上方二维码获取补充信息。

基金项目:国家自然科学基金(61671476,61901516);江苏省自然科学基金(BK20180578);中国博士后科学基金(2019M651648)

This work was supported by the National Natural Science Foundation of China(61671476, 61901516), Natural Science Foundation of Jiangsu Province of China(BK20180578) and China Postdoctoral Science Foundation(2019M651648).

通信作者:刘爱军(liuaj.cn@163.com)

probability on each link, initial state distribution and the number of UAVs on the convergence time. Moreover, compared with existing analytical model, the proposed analytical model can capture the convergence performance in practical FANET more precisely.

Keywords Consensus control algorithm, Random directed graph, Convergence rate, Convergence time, Flying Ad-Hoc Network

1 引言

一致性控制算法可以帮助无人机集群实现多种一致性集群行为,如编队控制^[1]、姿态(无人机的飞行速度、飞行高度等)匹配^[2]、集结^[3]、数据融合^[4]。一致性控制算法的一个特点是,集群中的每个无人机仅通过局部信息交互的方式来更新自己的状态便可最终实现整个集群内所有无人机状态达到一致^[4-6]。例如,基于一致性控制算法,集群中的每个无人机仅仅根据一跳邻节点的飞行高度信息便可更新自身的飞行高度,最终使得集群中的所有无人机具有相同的飞行高度。

为了实现一致性协同控制应用,无人机集群搭建空中自组网,并在 FANET 中传输信标帧业务^[7]。信标帧是一类周期性单跳广播消息,它包含每个无人机的本地状态值。任意无线链路上信标帧的丢包现象将会影响一致性控制算法的收敛速度,其中收敛速度刻画了集群所有状态值趋于一致的快慢程度。从理论上分析一致性控制算法的收敛速度与信标帧丢包率之间的解析关系,对一致性控制算法在未来 FANET 中的应用具有举足轻重的意义。

在收敛速度的分析工作中面临着两大挑战。第一个挑战是如何在每个更新周期对 FANET 中的信息流拓扑进行建模。其中,信息流拓扑是对所有无线链路上信标帧传输情况(是否发生丢包)的描述。第二个挑战是如何量化一致性算法的收敛速度,使所定义的收敛速度能够尽可能真实地描述 FANET 网络环境下一致性控制算法的收敛趋势。在实际的 FANET 中,不同无线链路上信标帧丢包事件的发生是相互独立的。因此,对 FANET 的信息流拓扑进行建模的最好方法是使用随机有向图模型。

然而,现有的大量研究工作在分析一致控制收敛速度时均采用随机无向图模型^[8-18]。此外,在这些研究工作中,收敛速度的量化均基于两个向量^[8,9,13,16-18]。其中一个向量中的每个元素均对应于网络中一个节点的状态值,而另一个向量中的所有元素均相等且等于所有节点状态值的平均值。这两个向量被视为多维空间中的两点,通过评估这两点之间的欧氏距离达到零的快慢程度来量化一致性算法的收敛速度。这种量化方法的合理性来源于随机无向图的对称性。当采用随机无向图对网络中的信息流拓扑进行建模时,任意一对邻节点发送给对方的信标帧都是假设同时丢失或者同时被成功接收。由于这种对称性,每个迭代周期所有状态值的平均值等于最终的收敛值。但是,在随机有向图的模型下,一对邻节点发送给对方的信标帧出现的丢包现象是相互独立的,这更符合实际 FANET 网络环境中的信息流拓扑。随机有向图的不对称性使得所有状态值的平均值随周期变化,并且不一定等于最终的收敛值。因此,现有收敛速度的量化定义有待进一步改善以反映实际 FANET 中的收敛趋势。

针对上述问题,本文基于矩阵论提出了一个新的收敛速度分析模型。该模型首先采用随机有向图对全连通 FANET

中的信息流拓扑进行建模。随机有向图模型采用矩阵多项式来表示一致性控制过程,并采用指示矩阵来刻画网络 FANET 中的信标帧丢包现象。基于该矩阵多项式,所提模型给出了最终期望收敛值的解析表达式。随后,不同于现有文献基于平均收敛值对收敛速度进行量化,所提模型通过评估所有节点的初始状态值收敛到该期望值的快慢来对收敛速度进行量化。最后,基于经典的矩阵运算和矩阵谱半径的相关知识,所提模型给出了收敛速度(收敛时间)与信标帧丢包率之间的解析表达式。仿真采用 802.11 DCF 中定义的载波感知多址接入/冲突避免(Carrier Sense Multiple Access with Collision Avoidance, CSMA/CA)协议,实现了 FANET 的一致性控制应用,进而比较了一致性控制应用收敛速度和收敛时间的仿真结果和理论结果。仿真结果表明,所提性能分析模型能够准确地描述实际 FANET 中一致性控制算法收敛速度随时间的变化情况。此外,所提模型能够准确描述实际 FANET 中每条链路的平均丢包率、状态值初始分布以及无人机节点个数对收敛时间的影响。相比 Anirban Das 提出的分析模型^[18],所提收敛性能分析模型所得到的收敛性能曲线更接近实际 FANET 中的收敛性能曲线。

本文第 2 节描述了系统模型;第 3 节阐述了图论基本知识,并确定了需要解决的问题;第 4 节对本文的主要工作进行了详细描述;第 5 节通过仿真对本文工作进行了评估;最后总结全文。

2 系统模型

考虑一个由 n 架无人机组成的无人机集群,集群中所有无人机的飞行高度各不相同。本文拟采用一致性控制算法使所有无人机的飞行高度达到一致。在该场景下,一致性控制算法所更新的状态值即每架无人机的飞行高度。需要指出的是,本文工作也可以用于其他一致性控制应用场景。

集群中的每架无人机装载了无线通信设备,并搭建了 FANET。每架无人机将时间划分为多个等长的周期,每架周期的时长为 T 。假设所有无人机的周期初始时刻同步,该同步可以通过机载 GPS 系统的 1PPS 信号来实现。每架无人机在周期的初始时刻生成一个包含自身飞行高度的信标帧,并将它广播给其一跳邻节点。对于某个无人机节点 i ($i=1, 2, \dots, n$ 表示该节点的 ID),如果邻节点 j 成功接收到了该信标帧,则称在节点 i 到节点 j 的无线链路上存在一条信息流。相反,如果邻节点 j 没有成功接收到该信标帧,则称该无线链路发生了丢包。当邻节点接收到节点 i 的信标帧时,节点 j 存储该信标帧中标识的关于节点 i 的飞行高度信息。如果之后一个周期内邻节点没有再次收到节点 i 的新的信标帧,那么节点 j 将删除关于节点 i 的信息。

假设初始时刻无人机 i 的飞行高度为 $h_i(0) = h_c + h_i^0$,其中 h_c 是一个正常数。 h_i^0 服从 $[0, a]$ 的均匀分布,其中 a 是一个大于 0 的常数。在每个周期的起始时刻,每架无人机根据

存储的邻节点飞行高度信息,采用一致性控制算法来更新飞行控制系统的控制输入,如图1所示。随后,无人机的飞控系统根据控制输入的值控制自身在随后一个周期内飞行高度的动态变化情况。在执行一致性控制算法一段时间之后,所有无人机的飞行高度将趋于一致^[19-21]。

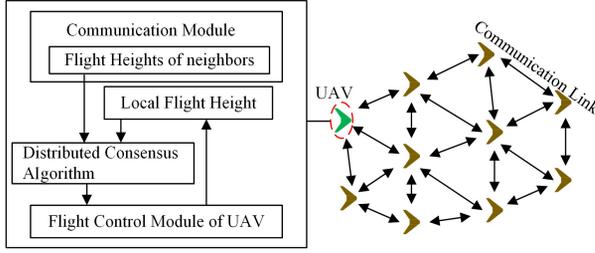


图1 无人机集群一致性控制应用

Fig. 1 Consensus control of UAV swarm

在第 $k(k=1,2,\dots)$ 个周期内,即在时间段 $[kT,(k+1)T]$ 内,无人机 i 的飞行高度与其周期初始时刻控制输入 $u_i(kT) \in \mathbf{R}$ 之间的关系如下:

$$h_i(t) = h_i(kT) + (t - kT)u_i(kT) \quad (1)$$

其中, $kT < t \leq (k+1)T$; $h_i(kT) \in \mathbf{R}$ 为无人机 i 在该周期起始时刻的飞行高度; $u_i(kT)$ 的值在整个周期内保持不变。在周期的起始时刻 kT ,无人机 i 采用式(2)的一致性控制算法来计算 $u_i(kT)$ 的值:

$$u_i(kT) = \sum_{j \in N_i(kT)} a_{ij} [h_j(kT) - h_i(kT)] \quad (2)$$

其中, $N_i(kT)$ 代表无人机 i 在 kT 时刻的邻节点集合。无人机 i 根据在上一个周期内(即时间段 $[(k-1)T, kT]$ 内)是否成功接收到信标帧来确定 $N_i(kT)$ 中的节点。 a_{ij} 是一个固定参数变量,本文将 a_{ij} 的值始终设置为1。

定义列向量 $\mathbf{h}(k) = [h_1(k), h_2(k), \dots, h_n(k)]^T$,其中, $(\cdot)^T$ 表示矩阵的转置。 $\mathbf{h}(k)$ 中第 i 个元素表示第 k 个周期起始时刻无人机 i 的飞行高度。此外,定义列向量 $\mathbf{u}(k) = [u_1(k), u_2(k), \dots, u_n(k)]^T$,其中第 i 个元素表示第 k 个周期起始时刻无人机 i 的控制输入。因此,集群中所有无人机的飞行高度随时间逐渐趋向一致可以描述为:对于任意 $\mathbf{h}(0)$,有 $\lim_{k \rightarrow \infty} h_1(k) = \lim_{k \rightarrow \infty} h_2(k) = \dots = \lim_{k \rightarrow \infty} h_n(k) = c$,或者 $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{h}(k) = c\mathbf{1}$,其中 c 是一个标量,且 $\mathbf{1} = [1, \dots, 1]^T$ 表示所有元素都为1的列向量。本文主要研究 $\mathbf{h}(0)$ 收敛到 $c\mathbf{1}$ 的快慢程度与每个无线链路上信标帧丢包率之间的关系。

3 基于矩阵论的收敛速度分析

本节首先采用随机有向图模型对FANET的信息流拓扑进行建模,并用一个链路矩阵和一个指示矩阵来表示图的拉普拉斯矩阵;然后给出了最终的期望一致值的解析形式;最后基于最终一致值的期望值,量化了一致性控制算法的收敛速度,并给出了该收敛速度与信标帧丢包率之间的解析关系式。为了简便起见,下文用 k 来表示 kT 。

3.1 一致性过程建模

我们将FANET第 k 个周期的信息流拓扑建模为节点 n 的随机有向图 $G(k) = G(V, \xi(k))$ 。在 $G(V, \xi)$ 中,顶点集 $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ 中的每一个顶点表示FANET中的每架无人机,

其中顶点 $v_i (i \in \{1, 2, \dots, n\})$ 表示无人机 i 。此外,有向边集合 $\xi \subseteq V \times V$ 用来描述该周期内FANET中的信标帧传输情况。节点 v_i 到 v_j 的一条有向边 $e_{ji} = (v_i, v_j) \in \xi$,表示无人机 j 成功接收到无人机 i 的信标帧。在随机有向图模型中,有向边 $e_{ij} \neq e_{ji}$ 。

本文将 $G(k)$ 的拉普拉斯矩阵 $\mathbf{L}(k)$ 表示为:

$$\mathbf{L}(k) = \mathbf{L}_c - \sum_{\xi} \delta_{(i,j)}(k) \mathbf{B}_{(i,j)} \quad (3)$$

其中, \mathbf{L}_c 是 n 阶有向图 $G_c(V, \xi_c)$ 的拉普拉斯矩阵,其节点集和边集分别为 V 和 ξ_c 。有向图 $G_c(V, \xi_c)$ 描述了FANET中的无线链路拓扑,直观上来讲,就是不存在任何信标帧丢包时网络中的信息流拓扑。本文称拉普拉斯矩阵 \mathbf{L}_c 为链路矩阵。本文假设所有无人机的位置分布和通信范围使得图 $G_c(V, \xi_c)$ 是平衡的,并具有生成有向树。关于平衡有向图和生成有向树的概念可以参考文献[14, 21-22]。

式(3)中的 $\mathbf{B}_{(i,j)}$ 是 n 阶平方矩阵,它的第 i 行第 i 列的元素值等于1,并且第 i 行第 j 列元素值等于-1,而其他元素值为0。此外, $\mathbf{B}_{(i,j)}$ 的权值项 $\delta_{(i,j)}(k)$ 是0~1之间的一个随机变量,它的概率分布如下:

$$\begin{cases} \Pr[\delta_{(i,j)}(k) = 1] = p \\ \Pr[\delta_{(i,j)}(k) = 0] = 1 - p \end{cases} \quad (4)$$

其中, $p(0 < p < 1)$ 是一个常数,表示每个无线链路上信标帧的丢包率。我们假设每条链路具有相同的信标帧传输性能(丢包率),并且该传输性能不随时间发生变化。本文将矩阵 $\mathbf{B}_{(i,j)}$ 称为指示矩阵。式(3)中的第二项对第 k 个周期内信标帧的传输情况进行了建模。如果 $\delta_{(i,j)}(k) = 1$,则 $G_c(V, \xi_c)$ 中无人机 j 到无人机 i 的有向边将被消除,这表示无人机 j 发送给无人机 i 的信标帧出现了丢包。

3.2 最终收敛值的期望值

基于式(2),我们将FANET中所有节点在 kT 时刻控制输入的值表示为如下方程组:

$$\begin{cases} u_1(kT) = -|N_1(kT)|h_1(kT) + a_{12}h_2(kT) + \\ \quad a_{13}h_3(kT) + \dots + a_{1n}h_n(kT) \\ u_2(kT) = a_{21}h_1(kT) - |N_2(kT)|h_2(kT) + \\ \quad a_{23}h_3(kT) + \dots + a_{2n}h_n(kT) \\ \vdots \\ u_n(kT) = a_{n1}h_1(kT) + a_{n2}h_2(kT) + a_{n3}h_3(kT) + \dots - \\ \quad |N_n(kT)|h_n(kT) \end{cases} \quad (5)$$

其中, $|\cdot|$ 表示返回数组 $N_n(kT)$ 中元素的个数。 a_{ij} 的具体定义如下:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{if } j \in N_i(kT) \\ 0, & \text{if } j \notin N_i(kT) \end{cases} \quad (6)$$

根据方程组的矩阵表达形式,式(5)可以改写为如下矩阵形式:

$$\mathbf{u}(k) = -\mathbf{L}(k)\mathbf{h}(k) \quad (7)$$

因此,式(1)可以改写成矩阵迭代的形式。

$$\mathbf{h}(k+1) = [\mathbf{I} - \mathbf{TL}(k)]\mathbf{h}(k) \quad (8)$$

其中, \mathbf{I} 是 n 阶单位矩阵。

将式(3)代入式(8),可以得到:

$$\begin{aligned} \mathbf{h}(k+1) &= \{ \mathbf{I} - T[\mathbf{L}_c - \sum_{\xi} \delta_{(i,j)}(k) \mathbf{B}_{(i,j)}] \} \mathbf{h}(k) \\ &= [\mathbf{I} - T\mathbf{L}_c + T \sum_{\xi} \delta_{(i,j)}(k) \mathbf{B}_{(i,j)}] \mathbf{h}(k) \end{aligned} \quad (9)$$

式(9)描述了 FANET 在一致性控制算法下状态值的收敛过程。因此,本文将基于式(9)展开剩余的工作。首先,我们给出了文献[23]中的两个定义。

定义 1 定义一个具有 n 个顶点的图 G ,且定义 n 阶非负平方矩阵 \mathbf{A} 。如果对于 \mathbf{A} 中任意一个非零元素 a_{ij} (第 i 行第 j 列元素),图 G 中从顶点 v_j 到 v_i 都存在一条有向边,则我们称图 G 为矩阵 \mathbf{A} 的关联图。

定义 2 考虑 n 个顶点,则由这 n 个顶点在时刻索引 k 之后的 M 个时刻索引所有图的联合图定义为 $G_M = \{G(j) \mid j = k+1, \dots, k+M\}$ 。其中,对于任意 $k+1 \leq j \leq k+M$,如果图 G_M 中节点 v_1 到 v_2 有一条有向边,则联合图 G_M 相应节点之间也存在一条有向边。

基于上述两个定义和文献[21]的相关知识,我们给出定理 1,并对定理 1 进行证明。

定理 1 定义 \mathbf{L}_c 的最大对角元素为 d ,则当 $T < 1/d$ 且 $0 < p < 1$ 时,对于任何初始状态值 $\mathbf{h}(0)$, $\mathbf{h}(k)$ 中的元素将在有限的迭代次数内实现一致。

证明:对于任意时刻索引 $k(k=1,2,\dots)$,根据式(3)易得 $\mathbf{L}(k)$ 中的最大对角元素不会超过 \mathbf{L}_c 的最大对角元素 d 。因此,如果 $T < 1/d$,则矩阵 $\mathbf{I} - T\mathbf{L}(k)$ 是一个非负矩阵。由于我们限定 \mathbf{L}_c 为平衡图,因此根据几何图论相关知识易得 $\mathbf{L}_c \mathbf{1} = 0$ 。此外,根据上文中 $\mathbf{B}_{(i,j)}$ 的定义,我们可以得到 $\mathbf{B}_{(i,j)} \mathbf{1} = 0$ 。综上所述,我们可以得到 $[\mathbf{I} - T\mathbf{L}(k)] \mathbf{1} = \mathbf{1}$,因此矩阵 $\mathbf{I} - T\mathbf{L}(k)$ 是一个随机矩阵。如果在连续几个时刻索引下,所有 $\mathbf{I} - T\mathbf{L}(k)$ 矩阵所对应的图的联合图存在生成树,则可以直接根据文献[23]证明定理 1 的收敛性。

根据定义 1,通过观察矩阵 $\mathbf{I} - T\mathbf{L}(k)$ 和矩阵 $\mathbf{L}(k)$ 的形式,我们可以得到矩阵 $\mathbf{I} - T\mathbf{L}(k)$ 和矩阵 $\mathbf{L}(k)$ 具有相同的关联图。因此,我们只需要证明 $\mathbf{L}(k)$ 的关联图在连续几个时刻索引内的联合图具有生成树。

考虑一个时间段 $[k, k+M]$,定义有向图集合 $G_M = \{G(j) \mid j = k, k+1, \dots, k+M\}$ 。其中,每个图元素 $G(j)$ 的拉普拉斯矩阵为式(3)中定义的 $\mathbf{L}(j)$ 。定义 $G_U = \bigcup_{j=k}^{k+M} G(j)$ 为集合 G_M 中所有图的联合图。定义集合 G_M 中所有图的拉普拉斯矩阵的合矩阵为 $\mathbf{L}_U = \bigcup_k^{\mathbf{L}} \mathbf{L}(j)$,其中 \mathbf{L}_U 中第 i 行第 j 列元素为所有拉普拉斯矩阵 $\{\mathbf{L}(j) \mid j = k, k+1, \dots, k+M\}$ 第 i 行第 j 列元素的或运算。根据 G_U 和 \mathbf{L}_U 的定义,我们可以得到 \mathbf{L}_U 是 G_U 的拉普拉斯矩阵。

在图 $G_c(V, \xi)$ 中,如果从顶点 v_j 到顶点 v_i 存在一条有向边,则相应的联合图 G_U 中这两点之间也存在有向边。因此,对于所有的 $j \in \{k, k+1, \dots, k+M\}$,如果存在 j 使得 $\delta_{(i,j)}(j) = 1$,则在联合图 G_U 中,从顶点 v_j 到顶点 v_i 存在有向边。根据式(4),可以求出发生上述事件的概率为 $p^{(M+1)}$ 。当 M 趋于无穷时,该概率值趋向于 0。综上所述,当 M 足够大时,图 $G_c(V, \xi)$ 和图 G_U 相同,且 \mathbf{L}_U 和 \mathbf{L}_c 相同。由于我们限定 $G_c(V, \xi)$ 具有生成树,因此 G_U 也有生成树。证毕。

定理 1 给出了一致性控制算法实现收敛的充要条件,但是没有说明该收敛值与初始状态 $\mathbf{h}(0)$ 之间的关系。直观上可以看出,由于式(9)中 $\delta_{(i,j)}$ 具有随机性,集群中所有无人机飞行高度的最终收敛值应该是个随机变量。因此,本节研究在给定初始状态 $\mathbf{h}(0)$ 下最终收敛值的分布,为 3.3 小节分析收敛速度做准备。本节给出了引理 1,并给出了相应的证明过程。

引理 1 对于给定初始状态 $\mathbf{h}(0)$,式(9)经过多次迭代后得到的最终收敛值的期望值为 $\frac{\mathbf{1}\mathbf{1}^T}{n} \mathbf{h}(0)$ 。

证明:这个准则可以用数学形式表示为 $E[\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{h}(t)] = \frac{\mathbf{1}\mathbf{1}^T}{n} \mathbf{h}(0)$,即 $E\left[\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{h}(t) - \frac{\mathbf{1}\mathbf{1}^T}{n} \mathbf{h}(0)\right] = 0$ 。 $E[\cdot]$ 表示对括号内的数学表达式求期望值,而 $\mathbf{0}$ 表示元素全为 0 的列向量。根据式(9),我们将 $\mathbf{h}(k)$ 表示为包含 $\mathbf{h}(0)$ 的矩阵多项式,如式(10)所示:

$$\mathbf{h}(k) = \prod_{t=1}^k [\mathbf{I} - T\mathbf{L}_c + T \sum_{\xi} \delta_{(i,j)}(t) \mathbf{B}_{(i,j)}] \mathbf{h}(0) \quad (10)$$

其中, t 是一个正整数。因此,我们只需要证明:

$$E\left\{ \prod_{k=1}^{\infty} [\mathbf{I} - T\mathbf{L}_c + T \sum_{\xi} \delta_{(i,j)}(k) \mathbf{B}_{(i,j)}] - \frac{\mathbf{1}\mathbf{1}^T}{n} \right\} \mathbf{h}(0) = \mathbf{0} \quad (11)$$

由于 $\delta_{(i,j)}(k)$ 的值与 k 无关,因此式(11)左边的表达式可以进一步简化,如式(12)所示:

$$\begin{aligned} E\left\{ \prod_{k=1}^{\infty} [\mathbf{I} - T\mathbf{L}_c + T \sum_{\xi} \delta_{(i,j)}(k) \mathbf{B}_{(i,j)}] - \frac{\mathbf{1}\mathbf{1}^T}{n} \right\} \mathbf{h}(0) \\ = \left\{ \prod_{k=1}^{\infty} E[\mathbf{I} - T\mathbf{L}_c + T \sum_{\xi} \delta_{(i,j)}(k) \mathbf{B}_{(i,j)}] - \frac{\mathbf{1}\mathbf{1}^T}{n} \right\} \mathbf{h}(0) \\ = \left\{ \prod_{k=1}^{\infty} [\mathbf{I} - T\mathbf{L}_c + T \sum_{\xi} E[\delta_{(i,j)}(k)] \mathbf{B}_{(i,j)}] - \frac{\mathbf{1}\mathbf{1}^T}{n} \right\} \mathbf{h}(0) \\ = \left\{ \prod_{k=1}^{\infty} [\mathbf{I} - T\mathbf{L}_c + pT \sum_{\xi} \mathbf{B}_{(i,j)}] - \frac{\mathbf{1}\mathbf{1}^T}{n} \right\} \mathbf{h}(0) \end{aligned} \quad (12)$$

其中,第一个和第二个等式可以根据数理统计的基本性质得到。而第三个等式是根据 $E[\delta_{(i,j)}(k)] = p$ 化简得来的,其中 $E[\delta_{(i,j)}(k)] = p$ 可以从式(4)中推导得出。此外,根据 3.1 节 $\mathbf{B}_{(i,j)}$ 的定义,易得 $\sum \mathbf{B}_{(i,j)} = \mathbf{L}_c$ 。因此,式(12)可以进一步简写为:

$$\begin{aligned} E\left\{ \prod_{k=1}^{\infty} [\mathbf{I} - T\mathbf{L}_c + T \sum_{\xi} \delta_{(i,j)}(k) \mathbf{B}_{(i,j)}] - \frac{\mathbf{1}\mathbf{1}^T}{n} \right\} \mathbf{h}(0) \\ = \lim_{k \rightarrow \infty} \left\{ [\mathbf{I} - (T - pT)\mathbf{L}_c]^k - \frac{\mathbf{1}\mathbf{1}^T}{n} \right\} \mathbf{h}(0) \end{aligned} \quad (13)$$

由于我们假设 \mathbf{L}_c 所对应的有向图是平衡图,根据代数图论中平衡图的相关知识,可以推断出如下两个等式:

$$\begin{cases} [\mathbf{I} - (T - pT)\mathbf{L}_c] \mathbf{1} = \mathbf{1} \\ \mathbf{1}^T [\mathbf{I} - (T - pT)\mathbf{L}_c] = \mathbf{1}^T \end{cases} \quad (14)$$

随后,根据式(14)和文献[22]中的结论,式(13)可以进一步改写为:

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \left\{ [\mathbf{I} - (T - pT)\mathbf{L}_c]^k - \frac{\mathbf{1}\mathbf{1}^T}{n} \right\} \mathbf{h}(0) \\ = \lim_{k \rightarrow \infty} \left[\mathbf{I} - (T - pT)\mathbf{L}_c - \frac{\mathbf{1}\mathbf{1}^T}{n} \right]^k \mathbf{h}(0) \end{aligned} \quad (15)$$

由于假设 \mathbf{L}_c 对应的有向图存在生成树,根据代数图论的知识,我们可以得出:如果 $0 < p < 1$,那么 $\rho\left[\mathbf{I} - (T - pT)\mathbf{L}_c - \frac{\mathbf{1}\mathbf{1}^T}{n}\right] < 1$,其中 $\rho(\cdot)$ 表示矩阵的谱半径。

由矩阵极限值^[24]的知识可知,若迭代矩阵的谱半径小于1,则其对任意初始向量都收敛。因此,易得式(15)的极限值等于0,且该引理得证。

3.3 收敛速度分析

基于3.2节的内容,首先将最终一致收敛值表示为包含 $\mathbf{h}(0)$ 的多项式。对于给定初始条件 $\mathbf{h}(0)$,我们用集合 $\{c\}$ 来表示 $\mathbf{h}(\infty)$ 的所有可能值,其中 c 是一个一维随机变量,其统计特性使得集合 $\{c\}$ 满足引理1。 $\mathbf{h}(0)$ 的平均值表示为 $\bar{h}=1/n[h_1(0)+h_2(0)+\dots+h_n(0)]$ 。定义一个随机标量 $\psi=c/\bar{h}$,则根据引理1, ψ 的期望值为1。我们将集合 $\{c\}$ 表示为包含 ψ 的形式,即 $\{(\psi/n)11^T\mathbf{h}(0)\}$ 。

为了使收敛速度的解析表达式能够正确反映FANET中的实际收敛情况,我们需要合理地定义收敛速度。由于实际应用中的收敛过程是一个随机过程,因此本文提出式(16)来量化收敛速度 \bar{r} :

$$\bar{r} = \sup \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{\left\| E \left[\mathbf{h}(k) - \psi \frac{11^T}{n} \mathbf{h}(0) \right] \right\|_2}{\left\| E \left[\mathbf{h}(0) - \psi \frac{11^T}{n} \mathbf{h}(0) \right] \right\|_2} \right)^{\frac{1}{k}} \quad (16)$$

基于式(16)的定义,我们将推导出收敛速度和信标帧丢包率之间的解析关系式。类似于式(12)和式(13),对于任意 $k>0$,有:

$$\begin{aligned} & E \left[\mathbf{h}(k) - \psi \frac{11^T}{n} \mathbf{h}(0) \right] \\ &= \left\{ [\mathbf{I} - (T - pT)\mathbf{L}_c]^k - E(\psi) \frac{11^T}{n} \right\} \mathbf{h}(0) \\ &= \left\{ [\mathbf{I} - (T - pT)\mathbf{L}_c]^k - \frac{11^T}{n} \right\} \mathbf{h}(0) \end{aligned} \quad (17)$$

此外,根据代数图论的基本知识,我们可以得到 $\mathbf{L}_c \mathbf{1} = 0$ 。因此可以推断出 $[\mathbf{I} - (T - pT)\mathbf{L}_c]11^T/n = 11^T/n$,则式(17)可以进一步改写为:

$$\begin{aligned} & \left\{ [\mathbf{I} - (T - pT)\mathbf{L}_c]^k - \frac{11^T}{n} \right\} \mathbf{h}(0) \\ &= \left\{ [\mathbf{I} - (T - pT)\mathbf{L}_c]^k - \frac{11^T}{n} \right\} \left[\mathbf{h}(0) - \frac{11^T}{n} \mathbf{h}(0) \right] \\ &= \left[\mathbf{I} - (T - pT)\mathbf{L}_c - \frac{11^T}{n} \right]^k \left[\mathbf{h}(0) - E(\psi) \frac{11^T}{n} \mathbf{h}(0) \right] \\ &= \left[\mathbf{I} - (T - pT)\mathbf{L}_c - \frac{11^T}{n} \right]^k E \left[\mathbf{h}(0) - \psi \frac{11^T}{n} \mathbf{h}(0) \right] \end{aligned} \quad (18)$$

其中,对于第二个等式,我们使用了与式(17)相同的等效变换。在获得式(18)之后,可以直接得到:

$$\begin{aligned} & E \left[\mathbf{h}(k) - \psi \frac{11^T}{n} \mathbf{h}(0) \right] \\ &= \left[\mathbf{I} - (T - pT)\mathbf{L}_c - \frac{11^T}{n} \right]^k E \left[\mathbf{h}(0) - \psi \frac{11^T}{n} \mathbf{h}(0) \right] \end{aligned} \quad (19)$$

进而,根据式(19)和矩阵谱半径的相关知识^[22],可以得到:

$$\begin{aligned} & \sup \left(\frac{\left\| E \left[\mathbf{h}(k) - \psi \frac{11^T}{n} \mathbf{h}(0) \right] \right\|_2}{\left\| E \left[\mathbf{h}(0) - \psi \frac{11^T}{n} \mathbf{h}(0) \right] \right\|_2} \right) \\ &= \rho \left(\left[\mathbf{I} - (T - pT)\mathbf{L}_c - \frac{11^T}{n} \right]^k \right) \end{aligned}$$

$$= \left(\rho \left[\mathbf{I} - (T - pT)\mathbf{L}_c - \frac{11^T}{n} \right] \right)^k \quad (20)$$

其中, $\rho(\cdot)$ 表示矩阵的谱半径,即矩阵特征值的最大模值。最后,通过将式(20)带入式(16)中,式(16)中的收敛速度可以表示为:

$$\begin{aligned} \bar{r} &= \sup \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{\left\| E \left[\mathbf{h}(k) - \psi \frac{11^T}{n} \mathbf{h}(0) \right] \right\|_2}{\left\| E \left[\mathbf{h}(0) - \psi \frac{11^T}{n} \mathbf{h}(0) \right] \right\|_2} \right)^{\frac{1}{k}} \\ &= \rho \left[\mathbf{I} - (T - pT)\mathbf{L}_c - \frac{11^T}{n} \right] \end{aligned} \quad (21)$$

从式(21)可以看出,当 T 和 \mathbf{L}_c 保持不变时,收敛速度 \bar{r} 主要决定于信标帧丢包率 p 。

为了进一步验证上述收敛速度表达式的正确性,我们进一步求解收敛时间的表达式,即所有无人机状态值达到最终一致性所需的周期数。基于收敛速度的定义,我们将收敛时间 τ 定义为:

$$\tau = \min_k \left(\left\| E \left[\mathbf{h}(0) - \psi \frac{11^T}{n} \mathbf{h}(0) \right] \right\|_2 \bar{r}^k < \delta \right) \quad (22)$$

其中, δ 是一个十分小的正实数,用于表示所有状态值最终趋于一致。求解式(22)的右式,将式(22)进一步改写为:

$$\tau = \log_{\bar{r}} \left(\delta / \left\| E \left[\mathbf{h}(0) - \psi \frac{11^T}{n} \mathbf{h}(0) \right] \right\|_2 \right) \quad (23)$$

式(23)的基本单位是一个周期,对于以秒为基本单位的收敛时间 τ_s ,可以用周期长度 T 乘以式(23)得到。

$$\tau_s = T \log_{\bar{r}} \left(\delta / \left\| E \left[\mathbf{h}(0) - \psi \frac{11^T}{n} \mathbf{h}(0) \right] \right\|_2 \right) \quad (24)$$

4 性能评估

4.1 仿真场景

本文采用NS-2网络仿真软件和Matlab仿真软件验证所提分析模型的正确性,首先在Matlab仿真软件中生成50个无人机节点,这些节点在仿真初始时刻位于坐标(0 m, 0 m)处。仿真开始时,每个无人机节点采用文献[25]中的蜂拥控制算法自主飞往目标区域并形成一個稳定且连通的网络拓扑结构。其中,每个节点将目标坐标(380 m, 60 m)处视为蜂拥控制算法中的虚拟领导者的位置坐标。蜂拥控制算法的参数如表1所列,参数的含义可参考文献[25]。图2给出了在蜂拥控制算法下,集群结构达到稳定时无人机的位置分布,其中黑色空心圆表示无人机节点。

表1 蜂拥控制算法参数

Table 1 Parameters of flocking algorithm	
Parameters	Values
Weighting coefficient c_1^{nei}	0.1
Weighting coefficient c_2^{nei}	$2\sqrt{c_1^{nei}}$
Weighting coefficient c_1^{obs}	20
Weighting coefficient c_2^{obs}	$2\sqrt{c_1^{obs}}$
Weighting coefficient c_1^{leader}	0.2
Weighting coefficient c_2^{leader}	$2\sqrt{c_1^{leader}}$
Desired inter-UAV distance/m	7
Constant value b	5
Constant value e	0.1
Constant value h	0.2
Constant value a	5

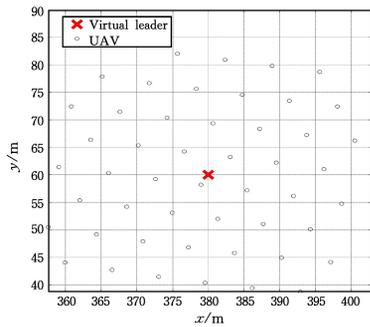


图2 无人机初始位置分布示意图

Fig. 2 UAVs' geographic distribution

随后,我们将无人机达到稳定时的位置坐标输入到 NS-2 仿真软件的拓扑描述文件中。在 NS-2 仿真器中,在每个节点的功能描述文件中加载 802.11 DCF 中的 CSMA/CA 模块。CSMA/CA 协议的仿真参数如表 2 所列,其中 T_{slot} 是其退避机制中单个时隙的时长。在本文的仿真中,假设 FANET 中的信标帧的丢包仅仅是由于信道接入时的信号冲突造成的。

表2 CSMA/CA 协议仿真参数

Table 2 Parameters at MAC layer of CSMA/CA protocols

Parameters	Values
Beacon size/Byte	300
$T_{slot}/\mu s$	28
Simulation time/s	300
Transmission rate/(Mb/s)	5
DIFS/ μs	128

此外,每架无人机节点的功能性描述文件在应用层模块添加了一个代理子模块,用于周期性生成信标帧。其中,信标帧的生成频率和控制输入的更新频率均为 10Hz。在 NS-2 仿真中,每个节点有一个控制模块,定义了一个“飞行高度”变量,每架无人机根据公式 $h_i(0) = h_c + h_i^0$ 随机选择“飞行高度”变量的初始值,其中 $h_c = 5m$,而 h_i^0 服从一致分布 $U(-a, a)$ 。为了使飞行高度重新保持一致,集群中所有无人机根据 MAC 模块输入的信息和一致性控制算法(2)更新该“飞行高度”变量。在运行 NS-2 模拟器之后,软件会生成一个跟踪文件。我们使用 AWK 工具统计跟踪文件的信息,得到信标帧丢包率的统计结果和网络中所有节点不同时刻“飞行高度”变量的值。

4.2 收敛速度评估

定义 $d_c(k)$ 等于 $\|h(k) - c\|$,其中 c 表示每次 NS-2 仿真运行中得到的最终收敛值,而 $\|\cdot\|$ 表示求模值运算。收敛速度的物理意义即每个周期 $d_c(k)$ 缩短的程度。我们考虑两种 $d_c(k)$ 的生成方式,即基于仿真结果和基于所提收敛速度解析公式(21)获得。根据 NS-2 的跟踪文件,我们可以得到每个周期的 $h(k)$ 值和最终的收敛值 c ,通过记录的值计算不同周期时的 $d_c(k)$ 值,便可得到基于仿真结果的 $d_c(k)$ 。为了获得基于式(21)所求出的 $d_c(k)$,首先需要获得平均信标帧丢包率。表 3 列出了不同 CSMA/CA 参数下,信标帧丢包率的仿真统计值,其中 CW 表示竞争窗口的初始值。本节中的参数取值如下: $a=2$,节点通信半径等于 8m 且竞争窗口初

始值等于 28。通过表 3,得到信标帧丢包率等于 0.0697。随后,根据已知参数值 $T=0.1, p=0.0697, n=50$,我们可以容易得出式(21)中的收敛速度为 $\bar{r}=0.9710$ 。通过公式 $d_c(k) = d_c(k-1)\bar{r}^{\frac{1}{T}}$ 和已知的 $d_c(0)$,我们可以计算得到 $d_c(k)$ 的理论值随时间变化的情况。

表3 不同 CSMA/CA 参数下丢包率的仿真统计值

Table 3 Simulation statistics of packet loss rate under different

CSMA/CA parameters

Radio range=8 m	
CW=8	0.2395
CW=12	0.1597
CW=16	0.1198
CW=20	0.0960
CW=24	0.0802
CW=28	0.0697

图 3 给出了 $d_c(k)$ 仿真值和理论值随时间的变化情况对比。从图中可以看出,基于式(21)得到的 $d_c(k)$ 理论值随时间的变化情况,能够近似地描述 $d_c(k)$ 仿真值随时间变化的趋势,验证了所提收敛速度分析模型的有效性。由于式(16)中的定义是最小上界的形式,因此 $d_c(k)$ 的理论值总是小于其仿真值。

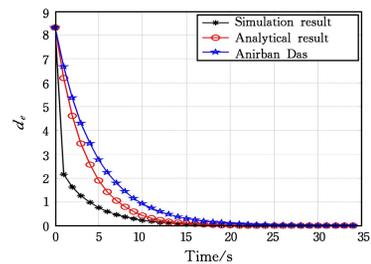


图3 收敛速度的理论结果与仿真结果

Fig. 3 Theoretical result and simulation result of convergence rate

此外,图 3 还给出了基于 Das 等^[18]提出的收敛速度分析模型的 $d_c(k)$ 的理论值。可以看出,相比 Anirban Das 等提出的分析模型,本文所提性能分析模型所生成的 $d_c(k)$ 曲线更靠近仿真所得到的 $d_c(k)$ 曲线。这是因为文献[18]中的模型的收敛速度是基于随机无向图分析的,不能用于存在独立信标消息丢失现象的实际 FANET。

4.3 收敛时间评估

本节验证式(24)收敛时间解析表达式的正确性。在图 4 所示的仿真中,我们同样设置 $a=2$,通信半径等于 8m。

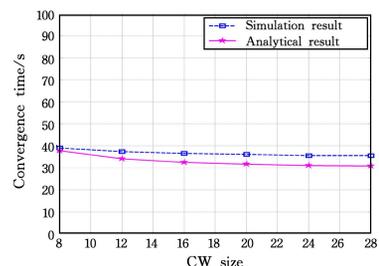


图4 不同丢包率对收敛时间的影响

Fig. 4 Influence of different packet loss rate on convergence time

我们分别取竞争窗口初始值为 8,12,16,20,24,28,来得到不同的信标帧丢包率(见表 3)。图 4 中,收敛时间的仿真

结果和理论结果均随着 CW 值的增加而减少。此外,基于式(24)计算得到的收敛时间理论值曲线几乎与收敛时间的仿真曲线重合。图 4 验证了式(24)的有效性,同时也间接反映了式(21)的有效性。然而,由于式(21)和式(24)没有考虑信标帧的传输时延,因此收敛时间的理论结果和仿真结果还是存在一定的误差。

图 5 给出了不同 α 值对收敛时间影响的仿真结果。从图 5 可以看出,随着 α 值的增加,收敛时间增加。这是由于初始飞行高度的方差变大,使得所有无人机收敛到一致值需要更长的时间。此外,从图 5 还可以看出,基于式(24)的收敛时间的理论结果和仿真结果之间的最大误差不超过 10%,验证了式(24)的有效性,同时也间接反映了式(21)的有效性。

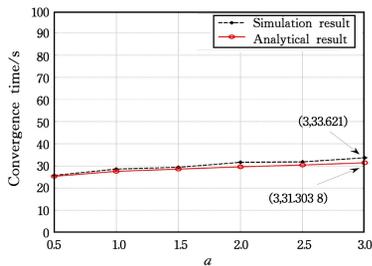


图 5 不同 α 值对收敛时间的影响

Fig. 5 Convergence time under different values of α

图 6 给出了 FANET 中无人机节点的个数分别为 10, 20, 30, 40, 50 时对收敛时间的影响。从图 6 可以看出,随着无人机节点个数的增加,收敛时间也相应地增加。基于式(24)的收敛时间的理论结果和仿真结果之间的最大误差不超过 10%,验证了式(24)的有效性,同时也间接反映了式(21)的有效性。

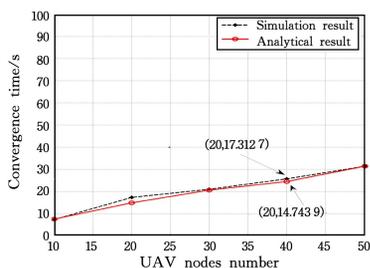


图 6 不同无人机节点个数对收敛时间的影响

Fig. 6 Convergence time under different number of UAVs nodes

4.4 仿真结果讨论

在 NS-2 仿真中,加入了实际的通信协议(CSMA/CA 协议)和一致性控制算法,来模拟实际 FANET 中的一致性应用收敛过程。在实际 FANET 中,一对邻节点发送给对方的信标帧出现丢包现象是相互独立的,这使得该网络的最终收敛值是一个随机变量。而本文正是利用了该随机变量的期望值来量化收敛速度,因此相比现有的基于平均状态值的量化方法(见图 3),本文所提理论收敛性能更接近实际的收敛性能。在量化之后,所提模型利用了指示矩阵和链路矩阵来描述一致性应用,将一致性应用问题转化为矩阵迭代的问题,并利用矩阵理论精确求解出所量化的收敛性能的解析表达式。因此,所提理论的收敛性能,无论是在收敛速度还是在收敛时间上,均能很好地拟合实际的 FANET 在不同条件下的收敛性

能(见图 3—图 6)。

结束语 信标帧在实现一致性控制算法的过程中扮演着重要角色。从理论上分析一致性控制算法的收敛速度与信标帧丢包率之间的解析关系,该模型对一致性控制算法在未来 FANET 中的应用具有举足轻重的意义。本文基于随机有向图模型和矩阵论的相关知识,提出了一种一致性控制算法收敛速度分析模型。该模型将每个周期内 FANET 中的信息流抽象为随机有向图,通过采用指示矩阵来表示该随机有向图的拉普拉斯矩阵,有效地用矩阵多项式对一致性收敛过程进行建模。随后,基于矩阵运算和矩阵谱半径的相关知识,该模型给出了最终期望收敛值的解析表达式,并量化了收敛速度与信标帧丢包率之间的关系。此外,基于该关系,该模型进一步推导出了收敛时间的表达式。通过对收敛速度(收敛时间)的理论结果和仿真结果进行比较,验证了所提性能分析模型的有效性和准确性。然而,该性能分析模型中没有考虑信标帧的传输时延。在未来的工作中,可以通过在拉普拉斯矩阵中加入时延矩阵来进一步分析一致性控制算法的收敛速度。

参考文献

- [1] KURIKI Y, NAMERIKAWA T. Consensus-based cooperative formation control with collision avoidance for a multi-UAV system[C]//Proc. American Control Conf. (ACC'14). 2014; 2077-2082.
- [2] REN W, BEARD R W, ATKINS E M. Information consensus in multivehicle cooperative control[J]. IEEE Control Systems Magazine, 2007, 27(2): 71-82.
- [3] XU W, DUAN F Y, ZHANG Q J, et al. A new fast consensus algorithm applied in rendezvous of multi-UAV[C]//Proc. Chinese Control and Decision Conf. (CCDC'15). 2015; 55-60.
- [4] SEMNANI S H, BASIR O A. Semi-flocking algorithm for motion control of mobile sensors in large-scale surveillance systems [J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2015, 45(1): 129-137.
- [5] GARIN F, SCHENATO L. A survey on distributed estimation and control applications using linear consensus algorithms[M]. Networked Control Systems. Springer, 2010; 75-107.
- [6] LIU Q, WANG Z, HE X, et al. On Kalman-consensus filtering with random link failures over sensor networks[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2018, 63(8): 2701-2708.
- [7] BEKMEZCI I, SAHINGOZ O K, TEMEL C. Flying ad-hoc networks (FANETs): A survey[J]. Ad-Hoc Networks, 2013, 11(3): 1254-1270.
- [8] FAGNANI F, ZAMPIERI S. Average consensus with packet drop communication[J]. SIAM Journal on Control and Optimization, 2009, 48(1): 102-133.
- [9] ZHOU J, WANG Q. Characterizing convergence speed for consensus seeking over dynamically switching directed random networks[C]//Proc. American Control Conference. 2009; 629-634.
- [10] HATANO Y, MESBAHI M. Agreement over random networks [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2005, 50(11): 1867-1872.
- [11] HALE M T, EGERSTEDT M. Convergence rate estimates for

- consensus over random graphs[C] // Proc. American Control Conf. (ACC'17), 2017;1024-1029.
- [12] PATTERSON S, BAMIEH B, EL ABBADI A. Convergence rates of distributed average consensus with stochastic link failures[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2010, 55(4):880-892.
- [13] SU L. On the Convergence Rate of Average Consensus and Distributed optimization over Unreliable Networks[C] // 2018 52nd Asilomar Conference on Signals, Systems, and Computers. 2018; 43-47.
- [14] SABER R O, MURRAY R M. Consensus protocols for networks of dynamic agents[C] // Proc. American Control Conference. 2003;951-956.
- [15] CHEN Y, QI D, ZHANG J, et al. Study on Distributed Dynamic Average Consensus Algorithm[C] // 2019 7th International Conference on Information, Communication and Networks(ICICN). 2019;225-229.
- [16] YI J, CHAI L, ZHANG J. Average Consensus by Graph Filtering: New Approach, Explicit Convergence Rate, and Optimal Design[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2020, 65(1):191-206.
- [17] ASADI M M, KHOSRAVI M, AGHDAM A G, et al. Expected Convergence Rate to Consensus in Asymmetric Networks; Analysis and Distributed Estimation[J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Systems, 2020, 50(3):972-987.
- [18] DAS A, YI Y, PATTERSON S, et al. Convergence Rate of Consensus in a Network of Networks[C] // 2018 IEEE Conference on Decision and Control(CDC). 2018;459-465.
- [19] DONG X, YU B, SHI Z, et al. Time-varying formation control for unmanned aerial vehicles; Theories and applications[J]. IEEE Transactions on Control Systems Technology, 2015, 23(1):340-348.
- [20] XIAO L, BOYD S, LALL S. A scheme for robust distributed sensor fusion based on average consensus[C] // Proc. Fourth International Symposium on Information Processing in Sensor Networks. 2005;63-70.
- [21] REN W, BEARD R W, ATKINS E M. A survey of consensus problems in multi-agent coordination[C] // Proc. American Control Conference. 2005;1859-1864.
- [22] XIAO L, BOYD S. Fast linear iterations for distributed averaging[J]. Systems & Control Letters, 2004, 53(1):65-78.
- [23] REN W, BEARD R W. Consensus seeking in multiagent systems under dynamically changing interaction topologies[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2005, 50(5):655-661.
- [24] BHATIA R. Matrix analysis[M]. Springer Science & Business Media, 2013.
- [25] OLFATI-SABER R. Flocking for multi-agent dynamic systems: Algorithms and theory[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2006, 51(3):401-420.



HUANG Xin-quan, born in 1993, post-graduate. His main research interests include multi-agent systems and flying ad-hoc network.



LIU Ai-jun, born in 1970, professor. His main research interests include satellite communication system theory, signal processing, channel coding and information theory.