基于对象的广义粗糙近似算子的拓扑性质

李妍妍, 秦克云

计算机科学 COMPUTER SCIENCE
http://www.jsjkx.com
DOI:10.11896/jsjkx.211100054

基于对象的广义粗糙近似算子的拓扑性质

李妍妍　　秦克云
西南交通大学数学学院　成都 611756
(18839150213@163.com)

摘　要　粗糙集理论是一种处理不确定性问题的数学工具。近似算子是粗糙集理论中的核心概念,基于等价关系的 Pawlak 近似算子可以推广为基于一般二元关系的广义粗糙近似算子。近似算子的拓扑结构是粗糙集理论的重点研究方向。文中主要研究基于对象的广义粗糙近似算子诱导拓扑的性质,证明了广义近似空间中所有可定义集形成拓扑的充分条件也是其必要条件,研究了该拓扑的正则、正规性等拓扑性质;给出了串行二元关系与其传递闭包可以生成相同拓扑的等价条件;讨论了该拓扑与任意二元关系下基于对象的广义粗糙近似算子所诱导拓扑之间的相互关系。

关键词:串行二元关系;基于对象的广义粗糙近似算子;拓扑
中图法分类号　TP182

Topological Properties of Generalized Rough Approximation Operators Based on Objects

LI Yanyan and QIN Keyun
College of Mathematics,Southwest Jiaotong University,Chengdu 611756,China

Abstract　Rough set theory is a mathematical tool to deal with uncertain problems. The core notion of rough set theory is approximation operators. Pawlak approximation operators based on equivalence relations cab be extended to generalized rough approximation operators based on arbitrary binary relations. The topological structures of approximation operators are important topics in rough set theory. This paper is devoted to the study of topological properties of object-based generalized rough approximation operators. It is proved that the sufficient condition for all definable subsets in a generalized approximation space to form a topology is also its necessary condition. The regularity and normality of this topology are studied. The equivalent conditions for the same topology generated by the serial binary relation and its transitive closure are given. The relationship between this topology and the topology induced by the object-based generalized rough approximation operator under any binary relation is discussed.

Keywords　Serial binary relation,Object-based generalized rough approximation operator,Topology

1　引言

1982 年,Pawlak 提出了粗糙集理论[1]。粗糙集理论是一种处理不确定性问题的数学工具,能够定量分析处理不精确、不一致以及不完整的信息与知识[2-3]。粗糙集理论通过等价关系构造近似算子,借助近似算子刻画不确定性和不完备性概念[4-5],进而分析处理不完整数据,进一步挖掘隐含的知识。目前,粗糙集理论已经成为一种重要的智能信息处理技术,并被成功应用于机器学习与知识发现、决策分析、模式识别与数据挖掘等领域[6-9]。

粗糙集理论与应用的核心基础概念是从近似空间中导出的一对近似算子,即上、下近似算子。为了推广粗糙集理论的应用范围,许多研究者将 Pawlak 粗糙集模型推广为多种形式的广义粗糙集模型,如基于一般二元关系的粗糙集模型、模糊粗糙集模型、变精度粗糙集模型等。对于基于等价关系的 Pawlak 粗糙集,Yao[4,10] 从基于对象的角度分析了 Pawlak 近似空间中近似算子的 3 种推广,并研究了它们的性质。Zhang 等[11] 从基于粒的角度推广了 Pawlak 近似空间中的近似算子,并研究了其基本性质。Liu 等[12] 从基于子系统的角度将 Pawlak 近似空间中基于子系统的近似算子推广为广义近似空间中基于子系统的近似算子,并给出了这类近似算子的性质,讨论了基于子系统的广义近似算子与基于对象、基于粒的广义近似算子之间的关系。

拓扑学[13] 是数学的一个重要分支,而拓扑结构与粗糙集理论有着非常紧密的联系。满足特定条件的拓扑可以诱导粗糙近似算子。Kondo[14] 提出了拓扑的(Comp)条件,证明了满足(Clop)条件的拓扑 T 可以诱导一个自反、对称二元关系,由它的下近似算子诱导的拓扑恰为拓扑 T。Qin 等[15] 证明了满足(Comp)条件的拓扑的内部算子与闭包算子分别是由自反、传递二元关系诱导的下近似算子与上近似算子。目前,

到稿日期:2021-11-04　返修日期:2022-04-01
基金项目:国家自然科学基金(61976130)
This work was supported by the National Natural Science Foundation of China(61976130).
通信作者:秦克云(keyunqin@263.net)

已经有许多学者对粗糙集模型中的拓扑结构进行了深入的研究[10-12,14-32]。Pawlak[2]首先考虑了粗糙集定义的拓扑。Yao[16]研究了自反、传递关系下的粗糙集模型,证明了其中的上、下近似算子恰为一个拓扑空间的闭包与内部算子。Qin等[15]证明了广义近似空间中满足自反、传递二元关系诱导的下近似集构成论域上的拓扑。Zhang等[17]研究了广义近似空间中基于一般二元关系的广义粗糙近似算子的性质,给出了基于对象的广义上、下近似算子成为闭包算子、内部算子的充要条件。Liu等[12]给出了自反、传递二元关系下基于对象的广义近似算子诱导的拓扑及一组拓扑基。Wu等[18]研究了一般二元关系以及对称二元关系下基于对象的广义近似算子诱导的拓扑的性质,并讨论了它与广义粗糙集之间的关系。Yu等[19]证明了自反二元关系 R 和 R 的传递闭包可以诱导同样的拓扑,且由 R 诱导的拓扑的内部算子和闭包算子分别是 R 的传递闭包诱导的下近似算子和上近似算子,此外,Yu等[19]证明了串行的二元关系可以诱导一个拓扑,但并未讨论此拓扑的性质。

因此,本文侧重于研究串行二元关系下基于对象的广义粗糙近似算子诱导拓扑的性质,证明了基于对象的广义近似空间中所有可定义的子集形成一个拓扑的充分条件也是其必要条件,研究了该拓扑的正则、正规性等拓扑性质,给出了串行二元关系与其传递闭包可以生成相同拓扑的等价条件,讨论了该拓扑与任意二元关系下基于对象的广义粗糙近似算子所诱导拓扑之间的相互关系。研究结果对于丰富和发展粗糙近似算子的基础理论具有积极意义,对数据分析和信息恢复的研究有一定的参考价值。

2 预备知识

本节回顾广义近似空间的相关理论知识及拓扑学中的一些概念。

假设 U 是所讨论的对象构成的集合,称为论域。R 是 U 上的一个二元关系,即 $R\subseteq U\times U$。称二元组 (U,R) 为一个广义近似空间。对于任意 $x\in U$,x 关于 R 的左、右邻域分别定义为 $l_R(x)=\{y\mid y\in U,(y,x)\in R\}$,$r_R(x)=\{y\mid y\in U,(x,y)\in R\}$。称 R 是 U 上的串行二元关系,若对任意 $x\in U$,存在 $y\in U$ 使得 $y\in r_R(x)$。称 R 是 U 上的传递二元关系,如果对于任意 $x,y\in U$,当 $y\in r_R(x)$ 时,有 $r_R(y)\subseteq r_R(x)$。称包含 R 的最小传递二元关系为 R 的传递闭包,记为 $t(R)$。

定义 1[4,11] 设 (U,R) 是广义近似空间。对于任意 $X\subseteq U$,X 关于 R 的基于对象的广义下、上近似算子分别定义为:

$\underline{R}(X)=\{x\mid r_R(x)\subseteq X\}$

$\overline{R}(X)=\{x\mid r_R(x)\cap X\neq\emptyset\}$

显然,如果 R 是 U 上的等价关系,那么 $r_R(x)=[x]_R$ 为 x 关于 R 的等价类,即广义近似空间中的上、下近似算子是Pawlak近似空间中上、下近似算子概念的推广。

定义 2[11] 设 (U,R) 是广义近似空间,$X\subseteq U$。则 X 为可定义集当且仅当 X 的上近似等于其下近似。

基于对象的广义粗糙近似算子具有如下基本性质。

命题 1[4,11] 设 (U,R) 是广义近似空间。对于任意 $X,Y\subseteq U$,有:

(1) $\overline{R}(\emptyset)=\emptyset$,$\underline{R}(U)=U$;

(2) $\underline{R}(X)=\sim\overline{R}(\sim X)$,$\overline{R}(X)=\sim\underline{R}(\sim X)$,其中 $\sim X$ 是 X 的补集;

(3) $\overline{R}(X\cap Y)\subseteq\overline{R}(X)\cap\overline{R}(Y)$,$\underline{R}(X\cup Y)\supseteq\underline{R}(X)\cup\underline{R}(Y)$;

(4) 对于任意 $X_i\subseteq U$,$i\in J$,有 $\overline{R}(\bigcup_{i\in J}X_i)=\bigcup_{i\in J}\overline{R}(X_i)$,$\underline{R}(\bigcap_{i\in J}X_i)=\bigcap_{i\in J}\underline{R}(X_i)$,其中 J 是任意给定的指标集;

(5) 设 R,S 是 U 上的两个二元关系,若 $R\subseteq S$,则对于任意 $X\subseteq U$,$\underline{S}(X)\subseteq\underline{R}(X)$,$\overline{R}(X)\subseteq\overline{S}(X)$。

命题 2[11] 设 (U,R) 是广义近似空间,则下列条件等价:

(1) R 是串行二元关系;

(2) 对于任意 $X\subseteq U$,$\underline{R}(X)\subseteq\overline{R}(X)$;

(3) $\underline{R}(\emptyset)=\emptyset$;

(4) $\overline{R}(U)=U$。

命题 3[11] 设 (U,R) 是广义近似空间,则下列条件等价:

(1) R 是自反二元关系;

(2) 对于任意 $X\subseteq U$,$\underline{R}(X)\subseteq X$;

(3) 对于任意 $X\subseteq U$,$X\subseteq\overline{R}(X)$。

拓扑学是数学的一个重要分支,与粗糙集理论有着紧密的联系。下文介绍拓扑学的一些基本概念。

定义 3[13] 设 U 是非空集,$P(U)$ 是 U 的幂集,$\tau\subseteq P(U)$。如果 τ 满足以下条件:

(1) $\emptyset,U\in\tau$;

(2) 若 $X,Y\in\tau$,则 $X\cap Y\in\tau$;

(3) 若 $X_i\in\tau$,$i\in J$,则 $\bigcup_{i\in J}X_i\in\tau$。

则称 τ 是 U 上的一个拓扑,称 U 或者 (U,τ) 为拓扑空间,称 τ 中的成员为这个拓扑空间的开集。开集的补集称为闭集。

定义 4[13] 设 (U,τ) 为拓扑空间,则:

(1) 若对于任意 $X\subseteq U$,X 都是开集,则称拓扑 τ 是离散的;

(2) 若任意 $X\subseteq U$ 是开集当且仅当 $X\subseteq U$ 是闭集,则称拓扑空间 (U,τ) 为伪离散拓扑空间;

(3) 若拓扑空间 (U,τ) 中任意多个开集的交仍是开集,则称该拓扑空间为Alexandrov空间。

定义 5[13] 设 (U,τ) 是拓扑空间。

(1) 若对于任意的闭集 F,$x\notin F$,存在不相交的开集 V_1,V_2 使得 $x\in V_1$,$F\subseteq V_2$ 成立,则称拓扑 τ 是正则的。

(2) 若对于任意不相交的闭集 F_1,F_2,存在不相交的开集 V_1,V_2 使得 $F_1\subseteq V_1$,$F_2\subseteq V_2$ 成立,则称拓扑 τ 是正规的。

(3) 若对于任意 $x,y\in U$,$x\neq y$,存在 x 的邻域 V_x 以及 y 的邻域 V_y 使得 $y\notin V_x$ 且 $x\notin V_y$ 成立,则称拓扑 τ 是 T_1 的。

(4) 若对于任意 $x,y\in U$,$x\neq y$,x 与 y 都有不相交的邻域,则称拓扑 τ 是 T_2 的。

(5) 称正则的 T_1 空间是 T_3 空间;正规的 T_1 空间是 T_4 空间。

3 基于对象的广义近似算子诱导的拓扑

设 U 是论域,R 是 U 上的二元关系。Yu等[19]证明了串行二元关系可以诱导一个拓扑 $\tau_1^R=\{X\subseteq U;\underline{R}(X)=\overline{R}(X)\}$,

但是并未讨论其拓扑性质。本节进一步讨论了τ_1^R的一些拓扑性质。

命题 4[19] 设(U,R)为广义近似空间，R是U上的串行二元关系，则$\tau_1^R=\{X\subseteq U;\underline{R}(X)=\overline{R}(X)\}$是$U$上的一个拓扑。

上述命题说明了串行二元关系是τ_1^R成为拓扑的一个充分条件，定理 1 说明此条件也是必要的。

定理 1 设(U,R)为广义近似空间，则$\tau_1^R=\{X\subseteq U;\underline{R}(X)=\overline{R}(X)\}$是$U$上的一个拓扑当且仅当$R$是$U$上的串行二元关系。

证明：（充分性）由命题 4 显然得证。

（必要性）若$\tau_1^R=\{X\subseteq U;\underline{R}(X)=\overline{R}(X)\}$是$U$上的一个拓扑，则由拓扑的定义知，$U\in\tau_1^R$，于是$\underline{R}(U)=\overline{R}(U)$。由$\underline{R}(U)=U$知，$\overline{R}(U)=U$，因此由命题 2 可知，$R$是$U$上的串行二元关系。

定理 1 表明，U上所有可定义的子集形成拓扑的充要条件是U上二元关系是串行的。由于自反二元关系一定是串行二元关系，于是有以下推论。

推论 1 设(U,R)为广义近似空间。若R是U上的自反二元关系，则$\tau_1^R=\{X\subseteq U;\underline{R}(X)=\overline{R}(X)\}$是$U$上的一个拓扑。

推论 1 表明：自反二元关系是τ_1^R形成拓扑的一个充分条件。下面给出例子说明此条件是非必要的。

例 1 设论域$U=\{1,2,3,4\}$，二元关系$R=\{(1,1),(2,2),(3,2),(3,3),(3,4),(4,1)\}$。显然，$r_R(1)=\{1\}$，$r_R(2)=\{2\}$，$r_R(3)=\{2,3,4\}$，$r_R(4)=\{1\}$，容易计算得到$\tau_1^R=\{X\subseteq U;\underline{R}(X)=\overline{R}(X)\}=\{\varnothing,U,\{1\},\{2,3,4\}\}$，显然它是$U$上的一个拓扑，但$R$不是自反的。

命题 5[18,27] 设R,S是U上的任意两个二元关系，则对于任意$X\subseteq U$，有：

(1)$\underline{R\cup S}(X)=\underline{R}(X)\cap\underline{S}(X)$，$\overline{R\cup S}(X)=\overline{R}(X)\cup\overline{S}(X)$；

(2)$\overline{R}(X)\cap\overline{S}(X)\supseteq\overline{R\cap S}(X)$，$\underline{R}(X)\cup\underline{S}(X)\subseteq\underline{R\cap S}(X)$；

(3)$\underline{R\circ S}(X)=\underline{S}(\underline{R}(X))$，$\overline{R\circ S}(X)=\overline{S}(\overline{R}(X))$。

引理 1 若R,S是U上的串行二元关系，则$R\circ S$和$R\cup S$都是串行二元关系。

证明：只需证明对于任意$X\subseteq U$，$\underline{R\circ S}(X)\subseteq\overline{R\circ S}(X)$。由$R$串行可知，对于任意$X\subseteq U$，$\underline{R}(X)\subseteq\overline{R}(X)$，于是由$\underline{S}$的单调性及$S$串行可知，$\underline{S}(\underline{R}(X))\subseteq\underline{S}(\overline{R}(X))\subseteq\overline{S}(\overline{R}(X))$，即$\underline{R\circ S}(X)\subseteq\overline{R\circ S}(X)$成立。

由R,S串行可知，对于任意$X\subseteq U$，$\underline{R}(X)\subseteq\overline{R}(X)$，$\underline{S}(X)\subseteq\overline{S}(X)$，于是$\underline{R}(X)\cap\underline{S}(X)\subseteq\overline{R}(X)\cup\overline{S}(X)$，即$\underline{R\cup S}(X)\subseteq\overline{R\cup S}(X)$成立，故$R\cup S$是串行二元关系。

下面举例说明当R,S是U上的串行二元关系时，$R\cap S$不一定是串行二元关系。

例 2 设$U=\{1,2,3,4\}$是论域，$R=\{(1,1),(2,2),(3,2),(3,3),(3,4),(4,1)\}$，$S=\{(1,1),(2,2),(3,2),(3,4),(4,3),(4,4)\}$是$U$上的两个二元关系。可以看出，$R,S$是串行的，但$R\cap S=\{(1,1),(2,2),(3,2),(3,4)\}$不是串行的。

显然，当R是U上的串行二元关系时，$\tau_1^{t(R)}=\{X\subseteq U;\underline{t(R)}(X)=\overline{t(R)}(X)\}$和$\tau_1^{t(R\cup I)}=\{X\subseteq U;\underline{t(R\cup I)}(X)=\overline{t(R\cup I)}(X)\}$都是$U$上的拓扑，其中$I=\{(x,x);x\in U\}$是$U$上的恒等二元关系。

定理 2 设(U,R)是广义近似空间，则τ_1^R是U上的一个开闭拓扑。

证明：只需证明对于任意$X\in\tau_1^R$，有$\sim X\in\tau_1^R$。设任意$X\in\tau_1^R$，则$\underline{R}(X)=\overline{R}(X)$。由$\underline{R}(X)=\sim\overline{R}(\sim X)$，$\overline{R}(X)=\sim\underline{R}(\sim X)$知，$\underline{R}(\sim X)=\overline{R}(\sim X)$，故有$\sim X\in\tau_1^R$，结论得证。

定理 3 设(U,R)是广义近似空间，则：

(1)(U,τ_1^R)是U上的一个伪离散拓扑空间；

(2)(U,τ_1^R)是U上的 Alexandrov 拓扑空间。

证明：由拓扑定义及定理 2 显然得证。

定理 4 设(U,R)是广义近似空间，则τ_1^R是正则、正规的。

证明：设F是论域U中的任意闭集，$x\notin F$。由τ_1^R是一个开闭拓扑知，F是U中的开集。于是，存在不相交的开集F和$\sim F$使得$x\in\sim F$，$F\subseteq F$成立。故拓扑τ_1^R是正则的。

设F,G是论域U中任意的两个不相交的闭集。显然，F,G也是U中两个不相交的开集且使得$F\subseteq F$，$G\subseteq G$成立，故τ_1^R是正规的。

命题 6[13] 设(U,τ)是一个拓扑空间，则τ是T_1空间当且仅当τ中的任意单点集都是闭集。

引理 2 设τ是一个开闭拓扑，则τ是离散的当且仅当τ是T_1的。

证明：（必要性）离散的拓扑空间显然是T_1的。

（充分性）由命题 6 知，τ中的任意单点集都是闭集。又因τ是一个开闭拓扑，则τ中的任意单点集都是开集。于是对任意$X\subseteq U$，$X=\bigcup_{x\in X}\{x\}$是开集。故τ是离散拓扑。

定理 5 设τ_1^R是U上的一个拓扑，则下列条件等价：

(1)拓扑τ_1^R是T_1的；

(2)拓扑τ_1^R是T_2的；

(3)拓扑τ_1^R是T_3的；

(4)拓扑τ_1^R是T_4的；

(5)拓扑τ_1^R是离散的。

证明：显然(5)⇒(4)⇒(3)⇒(2)⇒(1)成立，而由引理 2 知，(5)⇔(1)成立，结论得证。

命题 7[34] 设R是有限论域U上的二元关系。若$R\circ R^{-1}=R^{-1}\circ R=I$，则对于任意$X\subseteq U$，有$\underline{R}(X)=\overline{R}(X)$。

定理 6 设R是有限论域U上的二元关系。若$R\circ R^{-1}=R^{-1}\circ R=I$，则$(U,\tau_1^R)$是离散拓扑空间。

证明：由命题 7 显然可证。

定理 7 设(U,τ_1^R)是一个拓扑空间。若$R\subseteq I$，则τ_1^R是离散的。

证明：设任意$X\subseteq U$，由$R\subseteq I$及R串行知，$X\subseteq\underline{R}(X)\subseteq\overline{R}(X)\subseteq X$，于是有$\underline{R}(X)=X=\overline{R}(X)$，即$X\in\tau_1^R$，$X$是开集，结论得证。

定理 8 设R是U上的串行二元关系，S是U上的任意二元关系。若$R\subseteq S$，则$\tau_1^S\subseteq\tau_1^R$。

证明：由R串行及$R\subseteq S$知，对任意$X\subseteq U$，有$\underline{S}(X)\subseteq$

$\underline{R}(X)\subseteq\overline{R}(X)\subseteq\overline{S}(X)$，则 S 是串行的。

设任意 $X\in\tau_1^S$，则$\underline{S}(X)=\overline{S}(X)$。由 $R\subseteq S$ 及命题 1(5)知，$\underline{S}(X)\subseteq\underline{R}(X)$，$\overline{R}(X)\subseteq\overline{S}(X)$，于是有$\overline{R}(X)\subseteq\underline{R}(X)$。又由 R 串行可知，$\underline{R}(X)\subseteq\overline{R}(X)$。因此$\underline{R}(X)=\overline{R}(X)$，故 $X\in\tau_1^R$，$\tau_1^S\subseteq\tau_1^R$。

推论 2 若 R,S 是 U 上的串行二元关系，则$\tau_1^{R\cup S}\subseteq\tau_1^R\cup\tau_1^S$。

上述推论中，$\tau_1^{R\cup S}=\tau_1^R\cup\tau_1^S$并不总是恒成立，下面举例说明。

例 3 设论域U及论域U上的两个二元关系同例 2，则 $R,S,R\cup S$ 是 U 上的串行二元关系，且容易得到：$\tau_1^R=\{\emptyset,U,\{1\},\{2,3,4\}\}=\tau_1^S$，$\tau_1^{R\cup S}=\{\emptyset,\mathrm{U}\}$。显然$\tau_1^R\cap\tau_1^S=\tau_1^{R\cup S}$不成立。

定理 9 设 R,S 是 U 上的两个二元关系，若 $R\cap S$ 是串行关系，则$\tau_1^{R\cap S}\supseteq\tau_1^R\cap\tau_1^S$。

证明：设任意 $X\in\tau_1^R\cap\tau_1^S$，则有$\underline{R}(X)=\overline{R}(X)$且$\underline{S}(X)=\overline{S}(X)$成立，于是有$\overline{R\cap S}(X)\subseteq\overline{R}(X)\cap\overline{S}(X)=\underline{R}(X)\cap\underline{S}(X)=\underline{R\cup S}(X)\subseteq\overline{R\cup S}(X)=\underline{R}(X)\cup\underline{S}(X)\subseteq\underline{R\cap S}(X)$成立，即$\overline{R\cap S}(X)\subseteq\underline{R\cap S}(X)$成立。由 $R\cap S$ 串行可知，$\underline{R\cap S}(X)\subseteq\overline{R\cap S}(X)$，因此$\underline{R\cap S}(X)=\overline{R\cap S}(X)$成立，即 $X\in\tau_1^{R\cap S}$。

定理 10 设(U,R)是广义近似空间，R 是 U 上的串行二元关系，则$\tau_1^R=\tau_1^{t(R)}$当且仅当 $R=t(R)$。

证明：(充分性)显然成立。

(必要性)设任意 $X\in\tau_1^{t(R)}=\tau_1^R$，则有$\underline{t(R)}(X)=\overline{t(R)}(X)$且$\underline{R}(X)=\overline{R}(X)$成立。又由 $R\subseteq t(R)$及命题 1(5)知，$\underline{t(R)}(X)\subseteq\underline{R}(X)$，于是有$\overline{t(R)}(X)\subseteq\overline{R}(X)$，从而必有 $t(R)\subseteq R$。否则，存在$(x,y)\in t(R)$使得$(x,y)\notin R$，则 $y\in r_{t(R)}(x)$使得$y\notin r_R(x)$，即 $x\in\overline{t(R)}(\{y\})$，$x\notin\overline{R}(\{y\})$，矛盾。因此 $R=t(R)$，结论得证。

推论 3 设(U,R)是广义近似空间，R 是 U 上的串行二元关系，则$\tau_1^R=\tau_1^{t(R)}$当且仅当 R 是 U 上的传递二元关系。

定理 11 设(U,R)是广义近似空间，R 是 U 上的串行二元关系，则$\tau_1^{t(R\cup I)}=\tau_1^{t(R)}$当且仅当 $t(R)=t(R\cup I)$。

证明：(充分性)显然成立。

(必要性)设任意 $X\in\tau_1^{t(R\cup I)}=\tau_1^{t(R)}$，则有$\underline{t(R\cup I)}(X)=\overline{t(R)\cup I}(X)$和$\underline{t(R)}(X)=\overline{t(R)}(X)$成立。又由 $t(R)\subseteq t(R)\cup I=t(R\cup I)$及命题 1(5)知，$\underline{t(R)\cup I}(X)\subseteq\underline{t(R)}(X)$，于是有$\overline{t(R)\cup I}(X)\subseteq\overline{t(R)}(X)$，从而必有 $t(R)\cup I\subseteq t(R)$。因此 $t(R)=t(R)\cup I=t(R\cup I)$，结论得证。

推论 4 设(U,R)是广义近似空间，R 是 U 上的串行二元关系，则$\tau_1^{t(R\cup I)}=\tau_1^{t(R)}$当且仅当 $I\subseteq t(R)$。

推论 5 设(U,R)是广义近似空间。若 R 是 U 上的自反二元关系，则$\tau_1^{t(R\cup I)}=\tau_1^{t(R)}$。

下面举例说明自反关系是$\tau_1^{t(R\cup I)}=\tau_1^{t(R)}$成立的非必要条件。

例 4 设论域$U=\{1,2,3\}$，二元关系 $R=\{(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,3)\}$，则容易得到：$t(R\cup I)=\{(1,1),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,3)\}$，$\tau_1^{t(R\cup I)}=\tau_1^{t(R)}=\{\emptyset,U\}$。显然，$R$不是 U 上的自反二元关系。

推论 6 设(U,R)是广义近似空间。若 R 是 U 上的自反、传递二元关系，则$\tau_1^{t(R\cup I)}=\tau_1^R=\tau_1^{t(R)}$。

4 基于对象的广义近似算子诱导的拓扑间的关系

设(U,R)为广义近似空间。Wu 等[18]证明了任意二元关系可以诱导一个拓扑$\tau_2^R=\{X\subseteq U;X\subseteq\underline{R}(X)\}$，并深入研究了拓扑$\tau_2^R$的拓扑性质。本节主要讨论$\tau_1^R$与$\tau_2^R$间的关系。

任意二元关系诱导的拓扑τ_2^R有如下结论。

命题 8[18] 设 R,S 是 U 上的任意二元关系，则：

(1)$\tau_2^{t(R)}=\tau_2^R=\tau_2^{t(R\cup I)}=\tau_2^{t(R)\cup I}$；

(2)若 $R\subseteq S$，则$\tau_2^S\subseteq\tau_2^R$；

(3)$\tau_2^R\cup\tau_2^S\subseteq\tau_2^{R\cap S}$。

定理 12 设(U,R)是广义近似空间，若 R 是自反二元关系，则$\tau_1^R\subseteq\tau_2^R$。

证明：设任意 $X\in\tau_1^R$，则有$\underline{R}(X)=\overline{R}(X)$。由 R 是自反的可知 $X\subseteq\overline{R}(X)=\underline{R}(X)$，即 $X\in\tau_2^R$。

推论 7 设(U,R)是广义近似空间，R 是 U 上的串行二元关系，则$\tau_1^{t(R\cup I)}=\tau_1^{t(R)\cup I}\subseteq\tau_2^{t(R)\cup I}=\tau_2^{t(R\cup I)}=\tau_2^{t(R)}=\tau_2^R$。

证明：由 $t(R\cup I)=t(R)\cup I$ 自反及定理 12 与命题 8(2)可证。

推论 8 设(U,R)是广义近似空间。若 R 是 U 上的自反、传递二元关系，则$\tau_1^{t(R\cup I)}=\tau_1^R=\tau_1^{t(R)}\subseteq\tau_2^{t(R\cup I)}=\tau_2^{t(R)}=\tau_2^R$。

定理 13 若 R,S 是 U 上的串行二元关系，则$\tau_1^{t(R\cup I)}\cup\tau_1^{t(S\cup I)}\subseteq\tau_2^{R\cap S}$。

证明：由 R,S 串行可知，$\tau_1^{t(R\cup I)}\subseteq\tau_2^R$，$\tau_1^{t(S\cup I)}\subseteq\tau_2^S$，再由命题 8(3)可知，$\tau_1^{t(R\cup I)}\cup\tau_1^{t(S\cup I)}\subseteq\tau_2^R\cup\tau_2^S\subseteq\tau_2^{R\cap S}$，结论得证。

上述定理中，$\tau_1^{t(R\cup I)}\cup\tau_1^{t(S\cup I)}=\tau_2^{R\cap S}$并不总是恒成立的，下面举例说明。

例 5 设论域U及论域U上的两个二元关系同例 2，则容易得到：$\tau_1^{t(R\cup I)}=\{\emptyset,U\}$，$\tau_1^{t(S\cup I)}=\{\emptyset,U,\{1\},\{2,3,4\}\}$，$\tau_2^{R\cap S}=\{X\subseteq U;X\subseteq\underline{R\cap S}(X)\}=\{\emptyset,U,\{1\},\{2\},\{4\},\{1,2\},\{1,4\},\{2,4\},\{1,2,4\},\{2,3,4\}\}$。因此$\tau_1^{t(R\cup I)}\cup\tau_1^{t(S\cup I)}\neq\tau_2^{R\cap S}$。

推论 9 若 R,S 是 U 上的自反、传递二元关系，则$\tau_1^R\cup\tau_1^S\subseteq\tau_2^{R\cap S}$。

结束语 本文主要证明了广义近似空间中所有可定义的子集形成拓扑的充分条件也是必要条件，证明了该拓扑是既开又闭的，研究了该拓扑的正则、正规性等拓扑性质；给出了串行二元关系与其传递闭包可以生成相同拓扑的充要条件；讨论了该拓扑与已有拓扑之间的关系。在后续研究工作中，将进一步探讨该拓扑空间的拓扑基及其拓扑性质，进而考虑将串行二元关系下基于对象的广义近似算子的拓扑研究方法应用于信息系统的属性约简。同时，将进一步探讨不同分离公理的等价条件，考虑将其应用于不同信息环境下的数据分析、信息恢复。

参 考 文 献

[1] PAWLAK Z. Rough sets[J]. International Journal of Computer &

Information Sciences，1982，11：341-356.

[2] PAWLAK Z. Rough Sets：Theoretical Aspects of Reasoning about Data [M]. Kluwer Academic Publishers，Dordrecht & Boston，1991.

[3] POLKOWSKI L. Rough Sets[M]. Heidelberg：Springer，Physica-Verlag，2002.

[4] YAO Y Y. Constructive and algebraic methods of the theory of rough sets [J]. Information Sciences，1998，109(1)：21-47.

[5] MI J S，ZHANG W X. An axiomatic characterization of a fuzzy generalization of rough sets [J]. Information Sciences，2003，160(1)：235-249.

[6] PAWLAK Z. Rough set approach to Knowledge-based decision [J]. European Journal of Operational Research，1997，99：48-57.

[7] POMEROL J C. Artificial intelligence and human decision making [J]. European Journal of Operational Research，1997，99(1)：3-25.

[8] WANG G Y. Rough set theory and knowledge acquisition [M]. Xi'an：Xi'an Jiaotong University Press，2001.

[9] LIANG J Y，WANG J H，QIAN Y H. A new measure of uncertainty based on knowledge granulation for rough sets [J]. Information Sciences，2008，179(4)：458-470.

[10] YAO Y Y. Relational interpretations of neighborhood operators and rough set approximation operators[J]. Information Sciences，1998，111(1)：239-259.

[11] ZHANG W X，WU W Z，LIANG J Y，et al. Rough set theory and method [M]. Beijing：Science Press，2001.

[12] LIU G L，ZHU K. The relationship among three types of rough approximation pairs [J]. Knowledge-Based Systems，2014，60：28-34.

[13] KELLY J L. General Topology [M]. Graduate Texts in Mathematics. New York：Springer-Verlag，1955：0072-5285.

[14] KONDO M. On the structure of generalizeed rough sets [J]. Information Science，2006，176(5)：589-600.

[15] QIN K Y，YANG J L，ZHENG P. Generalized rough sets based on reflexive and transitive relations [J]. Information Sciences，2008，178(21)：4138-4141.

[16] YAO Y Y. Two views of the theory of rough sets in finite universes [J]. International Journal of Approximate Reasoning，1996，15：291-317.

[17] ZHANG Y L，LI J J，LI C Q. Topological structure of relation-based generalized rough sets [J]. Fundamenta Informaticae，2016，147(4)：477-491.

[18] WU H S，LIU G L. The relationships between topologies and generalized rough sets [J]. International Journal of Approximate Reasoning，2020，119：313-324.

[19] YU H，ZHAN W R. On the topological properties of generalized rough sets [J]. Information Sciences，2014，263：141-152.

[20] ZHANG H P，YAO O Y，WANG Z D. Note on "generalized rough sets based on reflexive and transitive relations" [J]. Information Sciences，2009，179(4)：471-473.

[21] YANG L Y，XU L S. Topological properties of generalized approximation spaces [J]. Information Sciences，2011，181(17)：3570-3580.

[22] LIU G L. The Axiomization of the Rough Sets Upper Approximation Operations [J]. Fundamenta Informaticae，2006，69：331-342.

[23] GALTON A. A generalized topological view of motion in discrete space [J]. Theoretical Computer Science，2003，305：111-134.

[24] ALLAM A，BAKEIR M，TABL E. Some methods for generating topologies by relations[J]. Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society，2008，31(1)：35-45.

[25] LI Z W，XIE T S，LI Q G. Topological structure of generalized rough sets[J]. Computers and Mathematics with Applications，2012，63：1066-1071.

[26] PEI Z，PEI D W，ZHENG L. Topology vs generalized rough sets [J]. International Journal of Approximate Reasoning，2011，52：231-239.

[27] LIU G L. A comparison of two types of generalized rough sets [C]// IEEE International Conference on Granular Computing. IEEE Computer Society，2012：423-426.

[28] GRABOWSKI A. Topological interpretation of rough sets [J]. Formalized Mathematics，2014，22(1)：89-97.

[29] ZHAO Z G. On some types of covering rough sets from topological points of view [J]. International Journal of Approximate Reasoning，2016，68：1-14.

[30] ZHANG Y L，LI C Q. Topological properties of a pair of relation-based approximation operators [J]. Filomat，2017，31(19)：6175-6183.

[31] LIU G L，ZHENG H，ZOU J Y. Relations arising from coverings and their topological structures [J]. International Journal of Approximate Reasoning，2017，80：348-358.

[32] QIU J，LI L，MA Z M，et al. A note on the relationships between generalized rough sets and topologies [J]. International Journal of Approximate Reasoning，2021，130：292-296.

LI Yanyan，born in 1995，postgraduate. Her main research interests include rough set theory and formal concept analysis.

QIN Keyun，born in 1962，Ph.D，professor，Ph.D supervisor. His main research interests include rough set theory，formal concept analysis and fuzzy logic.

（责任编辑：柯颖）