

多星座卫星导航系统定位方程直接解算算法的研究

汪文雯 张 可 黄 彬

(电子科技大学电子科学技术研究院 成都 611731)

摘 要 在导航定位系统中,传统的最小二乘定位解算算法需要通过线性迭代求解,计算量大且迭代过程不稳定,影响导航定位的实时性以及稳定性。针对此问题,利用多卫星导航系统可获得多颗可见卫星的特点,提出了“3+2+2”和“3+3+2”的直接解算算法,以及当 3 个星座系统可见卫星数目达到 9 颗及以上时将导航定位的非线性伪距方程组直接转化为线性方程组的直接解算算法。3 种方法均不需要预先假设接收机的初始位置坐标,避免了线性迭代过程,减小了计算量。通过仿真对提出的直接解算算法进行了验证,结果表明所提算法均能够有效实现多星座导航系统定位解算。

关键词 导航定位,多星座,直接解算算法,最小二乘算法

中图分类号 TN967.1

文献标识码 A

DOI 10.11896/j.issn.1002-137X.2015.12.043

Research on Position Equation Direct Solving Method in Multi-constellation Satellite Navigation System

WANG Wen-wen ZHANG Ke HUANG Bin

(Research Institute of Electronic Science and Technology, University of Electronic Science and Technology of China, Chengdu 611731, China)

Abstract In the navigation positioning system, the traditional least squares method requires linear iteration for solution, which brings great computation and affection to real-time performance and stability. Aiming at this problem, and considering the feature that there are more visible satellites in multi-constellation satellite navigation system, two direct solving methods which use “3+2+2” and “3+3+2” satellites were put forward. Also, when there are more than 9 visible satellites in triple system, the method of converting nonlinear equations into linear equations was proposed. The proposed three methods do not require assuming the initial position coordinate of receiver, thus linear iteration can be avoided and computation load is reduced. Simulation results show that the proposed methods are effective and reliable for position solving in multi-constellation satellite navigation system.

Keywords Navigation positioning, Multi-constellation, Direct solving method, Least squares method

1 引言

近年来随着 GNSS 卫星导航技术应用范围的不断扩大,对卫星导航技术的要求也越来越高。多星座导航定位系统相对于单星座而言,在可用卫星数、定位连续性与可靠性、定位精度以及完好性等方面都有明显的优势^[1-3],因此多星座导航系统定位是发展的必然趋势。

卫星导航定位的基本任务就是给出接收机准确可靠的卫星位置、速度和时间信息。用户利用这些信息完成导航、测绘、授时等任务。接收机定位解算的精度、稳定性、实时性及可靠性直接决定了用户任务能否完成,因此稳定可靠的定位解算算法对接收机而言至关重要^[4-6]。

传统单星座定位系统通常采用最小二乘算法进行定位解算,需要预先假设用户位置,并且利用泰勒展开将观测方程进行线性化,最后还需要经过线性迭代来达到定位精度要求,计算量大且迭代过程不稳定^[7-9]。目前对于单星座, Bancroft 等人提出了一类可以不经过泰勒展开的线性化而直接对非线性的伪距观测方程组进行求解的方法^[10],张强等人也提出了双

星座中的直接解算方法^[11],此类方法均不需要预先估计用户接收机的位置,避免了线性迭代,减小了计算量,保证了定位过程的稳定可靠。

对于多星座导航卫星定位解算,传统的最小二乘算法仍然适用,但是为了减小计算量,提高导航定位的稳定性和可靠性,多星座导航卫星定位解算的直接解算算法的研究也是有必要的。由于多星座导航系统的伪距观测方程组不同于单星座以及双星座,因此适用于单星座或者双星座的导航定位直接解算算法将不再适用于多星座。

在多星座组合导航定位中,需要同时接收多个导航星座系统的导航电文信息,而各系统之间存在时钟偏差,未知参数的个数会增加^[12,13],因而所需参与定位解算的卫星数目也随之增加。例如在 GPS/GLONASS/COMPASS 定位系统中,未知参数共有 6 个,分别为接收机的三维位置以及接收机到 GPS、GLONASS 和 COMPASS 系统的钟差,则至少需要 6 颗卫星来实现定位解算。采用“2+2+2”组合进行定位解算时,根据直接解算算法,最终可化为 3 个系统钟差的三元二次方程组,该求解过程比较复杂,计算量较大,故本文不做描述。

到稿日期:2014-12-02 返修日期:2015-03-24 本文受航空科学基金(20110580002)资助。

汪文雯(1989—),硕士生,主要研究方向为多星座卫星导航定位解算,E-mail:wwwangxyst@126.com;张 可(1979—),男,博士,副研究员,CCF 高级会员,主要研究方向为计算机应用技术;黄 彬(1990—),硕士生,主要研究方向为卫星导航信号体制及复用技术。

本文充分考虑多星座中可见星数目较多的有利条件,以 GPS/GLONASS/COMPASS 系统组合为例,推导出“3+2+2”(参与定位解算的 3 个星座的卫星数目分别为 3,2,2)、“3+3+2”以及卫星数目大于等于 9 颗时的直接解算方法。通过仿真将该算法与传统的最小二乘算法进行比较,仿真结果表明:本文提出的多星座直接解算算法能有效适用于 3 星座 7 颗及以上可见星的定位解算,能够得到可靠稳定的定位结果;避免了传统最小二乘算法的线性迭代运算,且无需预先假设用户位置初始值,大大减小了计算量,有效解决了多星座导航定位直接解算的问题。

2 多星座导航定位系统直接解算算法

本文以 GPS/GLONASS/COMPASS 系统组合为例,假设某一时刻同时可以观测到 n_1 颗 GPS 卫星、 n_2 颗 GLONASS 卫星以及 n_3 颗 COMPASS 卫星(其中 n_1, n_2, n_3 均大于等于 2),令 $N=n_1+n_2+n_3$,得到伪距观测方程如下^[9]:

$$\begin{cases} \|X-X_i\|+b_1=\rho_i, & i=1,\dots,n_1 \\ \|X-X_i\|+b_2=\rho_i, & i=n_1+1,\dots,n_1+n_2 \\ \|X-X_i\|+b_3=\rho_i, & i=n_1+n_2+1,\dots,N \end{cases} \quad (1)$$

式中, $X=(x,y,z)^T$ 表示用户接收机在时元 t 的位置; $X_i=(x_i,y_i,z_i)^T$ 表示第 i 颗卫星在时元 t 的在轨位置; b_1, b_2, b_3 分别表示用户接收机与 GPS、GLONASS 以及 COMPASS 系统钟差引起的距离偏差; ρ_i 表示第 i 颗卫星的伪距观测值。其中待求参数为 X_i 以及 b_1, b_2, b_3 。

将式(1)稍作变形,可得到如下形式:

$$X^T X - 2X_i^T X + X_i^T X_i = \rho_i^2 - 2b_1 \rho_i + b_1^2 \quad (2)$$

$$i=1,\dots,n_1$$

$$X^T X - 2X_i^T X + X_i^T X_i = \rho_i^2 - 2b_2 \rho_i + b_2^2 \quad (3)$$

$$i=n_1+1,\dots,n_1+n_2$$

$$X^T X - 2X_i^T X + X_i^T X_i = \rho_i^2 - 2b_3 \rho_i + b_3^2 \quad (4)$$

$$i=n_1+n_2+1,\dots,N$$

分别选取第 1 颗、第 n_1+1 颗、第 n_1+n_2+1 颗卫星为参考卫星,将式(2)~式(4)中各个星座观测方程分别对应减去各个星座参考卫星观测方程,可以得到 $N-3$ 个一次线性方程组:

$$\begin{cases} 0=\alpha_i X + \beta_i b_1 + \epsilon_i, & i=1,\dots,n_1-1 \\ 0=\alpha_i X + \beta_i b_2 + \epsilon_i, & i=n_1,\dots,n_1+n_2-2 \\ 0=\alpha_i X + \beta_i b_3 + \epsilon_i, & i=n_1+n_2-1,\dots,N-3 \end{cases} \quad (5)$$

式(5)中未知参数的系数均可由已知数据求出。

令 $X_u=(x,y,z,b_1,b_2,b_3)^T$,将式(5)写成矩阵形式:

$$H X_u = Y \quad (6)$$

当 $N-3=6$ 即 $N=9$ 时,式(5)中有 6 个一次线性方程组,可以直接求得唯一解:

$$X_u = H^{-1} Y \quad (7)$$

当 $N \geq 9$ 时,利用最小二乘算法求解:

$$X_u = (H^T H)^{-1} H^T Y \quad (8)$$

3 “3+2+2”星座组合直接解算算法

本节以 GPS/GLONASS/COMPASS 系统为例考虑 7 颗可见星在参与定位解算的情况。在观测到 7 颗卫星时,若某个星座系统参与定位解算的可见星数目小于或等于 1,则另有一个系统的可见星数目大于或等于 4,均可利用单星座中

的直接求解方法对这一系统单独求解,从而获得未知参数。所以这里主要讨论“3+2+2”的组合形式。

假设某一时刻,可以同时观测到 3 颗 GPS 卫星、2 颗 GLONASS 卫星以及 2 颗 COMPASS 卫星。据第 2 节推导,将观测方程变换后可得到 4 个关于未知参数的线性方程组:

$$\begin{cases} 0=\alpha_1 X + \beta_1 b_1 + \epsilon_1 \\ 0=\alpha_2 X + \beta_2 b_1 + \epsilon_2 \\ 0=\alpha_3 X + \beta_3 b_2 + \epsilon_3 \\ 0=\alpha_4 X + \beta_4 b_3 + \epsilon_4 \end{cases} \quad (9)$$

根据式(6)的前 3 个可以得到:

$$X = A b_1 + B b_2 + C \quad (10)$$

其中:

$$G = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}, A = G^{-1} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ 0 \end{bmatrix}, B = G^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \beta_3 \end{bmatrix}, C = G^{-1} \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \end{bmatrix} \quad (11)$$

将式(10)代入(9)中最后一个方程可得:

$$b_3 = -1/\beta_4 [\alpha_4 (A b_1 + B b_2 + C) + \epsilon_4] \quad (12)$$

当 $i=1$ 时,将式(11)分别代入式(2)和式(3)中得到:

$$\begin{aligned} [b_1 \ b_2] \begin{bmatrix} A^T A - 1 & A^T B \\ B^T A & B^T B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} + 2g_1 b_1 + 2f_1 b_2 + h_1 &= 0 \\ [b_1 \ b_2] \begin{bmatrix} A^T A & A^T B \\ B^T A & B^T B - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} + 2g_2 b_1 + 2f_2 b_2 + h_2 &= 0 \end{aligned} \quad (13)$$

式(13)中系数 $g_1, g_2, f_1, f_2, h_1, h_2$ 均可由已知数据求得。通过式(10)和式(12)可知,未知参数 X, b_3 均可由 b_1, b_2 表示,所以这里三星星座定位系统中 6 个未知参数的解算转化为求两个未知参数的解, b_1, b_2 可以联立式(13)两个二次方程求得。

将式(13)中两个方程对应相减可以得到:

$$b_1^2 - b_2^2 + 2(g_2 - g_1)b_1 + 2(f_2 - f_1)b_2 + h_2 - h_1 = 0 \quad (14)$$

式(14)是一个关于 b_1, b_2 的双曲线方程,这里令 t 是一个标量,且满足:

$$t|t| = |h_1 - h_2 + (g_2 - g_1)^2 - (f_2 - f_1)^2|$$

令 $u = b_1 + g_2 - g_1, v = b_2 + f_1 - f_2$,式(14)可写成:

$$u^2 - v^2 = t|t| \quad (15)$$

式(15)需要结合式(13)求解。将式(15)代入式(13)中第一个方程,得到的方程用 u, v 来表示,得到:

$$a_0 v^2 + b_0 u v + c_0 u + d_0 v + e_0 = 0 \quad (16)$$

式(16)中各系数均可由已知参数求得,两边平方化简后可以得到:

$$a v^4 + b v^3 + c v^2 + d v + e = 0 \quad (17)$$

其中, $a = a_0^2 - b_0^2, b = 2(a_0 d_0 - b_0 c_0), c = d_0^2 + 2a_0 e_0 - t|t|b_0^2 - c_0^2, d = 2(d_0 e_0 - t b_0 c_0), e = e_0^2 - t|t|c_0^2$ 。根据式(17),可以看出前面关于 b_1, b_2 的导航定位解算问题进一步简化为求参数 v 的一元四次方程。

1. 若 $a = a_0^2 - b_0^2 = 0$,则式(17)可化为一元三次方程:

$$b v^3 + c v^2 + d v + e = 0 \quad (18)$$

假设 $b \neq 0$ 且 $c, d, e \in \mathbb{R}$ (若 $b=0$,则方程化为一元二次方程,直接利用求根公式即可求解)。根据盛金求根公式可直接判别求解:

重根判别式

$$D=c^2-3bd, E=cd-9be, F=d^2-3ce$$

总判别式

$$\Delta=E^2-2DF.$$

1) $D=E=0$ 时, 盛金公式①:

$$v_1=v_2=v_3=-\frac{c}{3b}=-\frac{d}{c}=-\frac{3e}{d}$$

2) $\Delta>0$ 时, 盛金公式②:

$$v_1=\frac{-c-\gamma_1^{\frac{1}{3}}-\gamma_2^{\frac{1}{3}}}{3b}$$

$$v_{2,3}=\frac{-2c+\gamma_1^{\frac{1}{3}}+\gamma_2^{\frac{1}{3}}}{6b}\pm j\frac{\sqrt{3}(\gamma_1^{\frac{1}{3}}-\gamma_2^{\frac{1}{3}})}{6b}$$

3) 当 $\Delta=0$ 时, 盛金公式③:

$$v_1=-\frac{c}{b}+K, v_2=v_3=-\frac{K}{2}$$

4) 当 $\Delta<0$ 时, 盛金公式④:

$$v_1=\frac{-c-\sqrt{2b}\cos\frac{\theta}{3}}{3b}$$

$$v_{2,3}=\frac{-c+\sqrt{D}(\cos\frac{\theta}{3}\pm\sqrt{3}\sin\frac{\theta}{3})}{3b}$$

2. $a\neq 0$, 令 $\lambda=v+b/4a$, 式(18)可简化为

$$\lambda^4+p\lambda^2+q\lambda+r=0 \quad (19)$$

式(19)中由于没有三次项, 可分解为如下形式:

$$(\lambda^2+k\lambda+l_1)(\lambda^2-k\lambda+l_2)=0 \quad (20)$$

其中 k, l_1, l_2 满足:

$$l_1+l_2-k^2=p$$

$$k(l_2-l_1)=q \quad (21)$$

$$l_1l_2=r$$

根据式(21)可以推出:

$$k^6+2pk^4+(p^2-4r)k^2-q^2=0 \quad (22)$$

据前面的推导可知, 当求得 k 时, 根据式(20)可求得 λ :

$$\lambda_1=-\frac{k}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{-k^2-2p+\frac{2q}{k}}$$

$$\lambda_{2,3}=\frac{k}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{-k^2-2p-\frac{2q}{k}} \quad (23)$$

式(22)是关于 k^2 的一元三次方程, 令 $m=k^2$, 根据前述盛金求根公式, 可求得:

$$m_1=-\frac{2}{3}p+(s+\sqrt{\delta})^{1/3}+(s-\sqrt{\delta})^{1/3}$$

$$m_{2,3}=-\frac{2}{3}p-\frac{1}{2}[(s+\sqrt{\delta})^{1/3}+(s-\sqrt{\delta})^{1/3}]\pm j\frac{\sqrt{3}}{2}[(s+\sqrt{\delta})^{1/3}-(s-\sqrt{\delta})^{1/3}] \quad (24)$$

其中, s, δ 可由 p, q, r 表示。根据式(24)可以求得 k^2 的值, 根据式(23), λ 的解由 k 决定, 不难发现, 将 $-k$ 代入式(23)即 λ 的求解式中, 可以得到与代入 k 时相同的解, 也即 k 的正负不影响 λ 取值。所以这里取 $k_1=\sqrt{m_1}, k_2=\sqrt{m_2}, k_3=\sqrt{m_3}$ 。从式(22)可知道:

$$m_1+m_2+m_3=-2p, m_1m_2m_3=q^2$$

1) 若 $q>0$, 则 $q=\sqrt{m_1m_2m_3}$, 将 $k=\sqrt{m_1}$ 分别代入式(23), 可以得到 λ 解:

$$\lambda_{1,2}=-\frac{1}{2}\sqrt{m_1}\pm\frac{1}{2}(\sqrt{m_2}+\sqrt{m_3})$$

$$\lambda_{3,4}=\frac{1}{2}\sqrt{m_1}\pm\frac{1}{2}(\sqrt{m_2}-\sqrt{m_3}) \quad (25)$$

经过计算, 当 $k=\sqrt{m_2}$ 或 $\sqrt{m_3}$ 时, 求得的 λ 的解与上面相同。

2) 若 $q<0$, 则 $q=-\sqrt{m_1m_2m_3}$, 同上:

$$\lambda_{1,2}=-\frac{1}{2}\sqrt{m_1}\pm\frac{1}{2}(\sqrt{m_2}-\sqrt{m_3})$$

$$\lambda_{3,4}=\frac{1}{2}\sqrt{m_1}\pm\frac{1}{2}(\sqrt{m_2}+\sqrt{m_3}) \quad (26)$$

综合上面的讨论, 可以总结出, 当 $q\neq 0$ 时, λ 的解可以表示为:

$$\lambda=\begin{cases} \frac{1}{2}\cdot\text{sgn}(q)\cdot[-\sqrt{m_1}\pm(\sqrt{m_2}+\sqrt{m_3})] \\ \frac{1}{2}\cdot\text{sgn}(q)\cdot[\sqrt{m_1}\pm(\sqrt{m_2}-\sqrt{m_3})] \end{cases} \quad (27)$$

3) 若 $q=0$, 根据式(19)可直接解算 λ :

$$\lambda=\begin{cases} \frac{\sqrt{-p\pm\sqrt{p^2-4r}}}{2} \\ -\frac{\sqrt{-p\pm\sqrt{p^2-4r}}}{2} \end{cases} \quad (28)$$

综上所述, 假设 G 是可逆的, 且 a 是非零的时候, GPS/GLONASS/COMPASS 系统“3+2+2”组合的卫星导航定位解算步骤如下:

1) 给出卫星在轨位置坐标 X_i 和伪距 ρ_i ;

2) 计算出矩阵 G, A, B, C ;

3) 计算出式(17)中各系数: a, b, c, d, e ;

4) 根据 $q=\frac{d}{a}-\frac{bc}{2a^2}+\frac{b^3}{8a^3}$ 判断 q 是否为零, 从而决定利用式(27)或式(28)来求解 λ ;

5) 根据 $v=\lambda-\frac{b}{4a}$ 求解出 v ;

6) 根据式(16)可以求得 $u=-\frac{a_0v^2+d_0v+e_0}{b_0v+c_0}$;

7) 根据式(12)以及 $b_1=u+g_1-g_2, b_2=v+f_2-f_1$ 求钟差 b_1, b_2, b_3 ;

8) 根据伪距定位的原理以及 b_1, b_2, b_3 的定义, b_1, b_2, b_3 均为实数, 且应该满足 $b_1\leq\min_{1\leq i\leq n_1}\{\rho_i\}, b_2\leq\min_{1\leq i\leq n_2}\{\rho_i+n_1\}, b_3\leq\min_{1\leq i\leq n_3}\{\rho_i+n_1+n_2\}$, 依次来选出唯一正确解;

9) 对于唯一正确的 b_1, b_2, b_3 , 根据式(10), 可以计算出唯一正确的用户接收机位置坐标 $X=(x, y, z)$ 。

4 “3+3+2”星座组合直接解算算法

本节以 GPS/GLONASS/COMPASS 系统为例考虑 8 颗可见星在参与定位解算的情况, 同理, 不考虑某个星座的参与定位解算的卫星数目小于等于 1 的情况, 所以这里主要讨论“3+3+2”的组合形式。

假设某时刻可以同时观测到 3 颗 GPS 卫星、3 颗 GLONASS 卫星以及 2 颗 COMPASS 卫星。据第 2 节的推导, 将观测方程变换后可得到 5 个关于未知参数的线性方程:

$$\begin{cases} 0=\alpha_1X+\beta_1b_1+\epsilon_1 \\ 0=\alpha_2X+\beta_2b_1+\epsilon_2 \\ 0=\alpha_3X+\beta_3b_2+\epsilon_3 \\ 0=\alpha_4X+\beta_4b_2+\epsilon_4 \\ 0=\alpha_5X+\beta_5b_3+\epsilon_5 \end{cases} \quad (29)$$

同第 2 节, 根据式(29)的前 3 个方程可以得到 $X=Ab_1+Bb_2+C$, 将其代入式(29)的后两个方程, 可以进一步得到:

$$b_2=a_1b_1+c_1, b_3=a_2b_1+c_2 \quad (30)$$

从而可以进一步得到:

$$X=A_1b_1+C_1 \quad (31)$$

再将其代入式(2)($i=1$)中,即可得到关于 b_1 的一元二次方程:

$$ab_1^2+\beta b_1+\gamma=0 \quad (32)$$

根据式(32)可直接求得 $b_1=\frac{-\beta\pm\sqrt{\beta^2-4a\gamma}}{2a}$,再根据式(30)、式(31)依次求出 b_2 、 b_3 以及 X 。这里最终求得有两组解,由于 b_1 、 b_2 、 b_3 均为实数,再根据伪距定位的原理以及 b_1 、 b_2 、 b_3 的定义,应该满足 $b_1\leq\min_{1\leq i\leq n_1}\{\rho_i\}$, $b_2\leq\min_{1\leq i\leq n_2}\{\rho_{i+n_1}\}$, $b_3\leq\min_{1\leq i\leq n_3}\{\rho_{i+n_1+n_2}\}$,依次选出唯一正确的解(上面各方程系数均可由已知数据求得,这里不再赘述。)

5 仿真实验验证

第4节给出了多星座定位直接解算算法 SPA 的理论推导。为了验证上述算法的有效性以及性能,分别用传统 LS 算法与本文提出的直接解算算法进行仿真对比。在选定的 ECEF 坐标系中,不失一般性,任取某一时刻地面上某一点可见的卫星,如表1所列,其中第1~5颗卫星为 GPS 卫星,第6~9颗为 GLONASS 卫星,第10~13颗为 COMPASS 卫星。为了方便描述,本节用 DS 表示本文提出的直接解算算法。

表1 可见星位置参数

卫星编号	卫星坐标		
	x(m)	y(m)	z(m)
1	16414028.668	660383.618	20932036.907
2	16896800.648	-18784061.365	-7418318.856
3	9339639.6160	-14514964.658	20305107.161
4	-18335582.591	-11640868.305	15028599.071
5	-2077142.705	-20987755.987	-15879741.196
6	-4957166.885	-23306741.039	12039027.096
7	17977519.820	-13089823.312	1431151.065
8	9682727.508	-24060519.485	3985404.530
9	-23517276.470	-8441337.220	9266091.870
10	-12796270.590	17283306.260	15279722.700
11	13190124.890	21040942.630	9630736.620
12	-19028937.050	-630447.920	18670658.660
13	-20972725.270	13817010.490	-8692192.550

5.1 仿真实验

5.1.1 可见7颗星实验

在保证所有系统卫星都有参与解算的前提下,从表1中选取7颗可见星,这里以“3+2+2”组合为例,即从第1~5颗 GPS 卫星中任意选取3颗,从第6~9颗 GLONASS 卫星中任意选取2颗,从第10~13颗 COMPASS 卫星中任意选取2颗,遍历所有可能的组合情况,共有 $C_3^5C_2^4C_2^4=360$ 种组合。分别利用第3节提出的“3+2+2”SPA 直接解算算法和 LS 算法进行解算,得到如图1、图2所示的仿真结果。

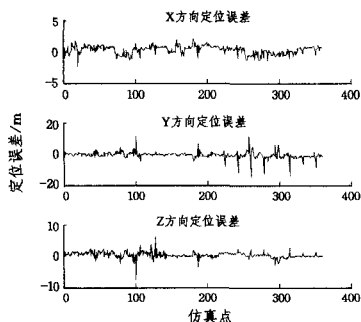


图1 LS算法在7颗可见星时的定位误差

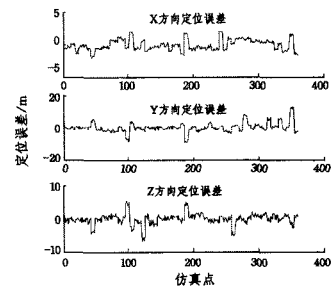


图2 “3+2+2”形式直接解算算法的定位误差

5.1.2 可见8颗星实验

在保证所有系统卫星都有参与解算的前提下,从表1中选取8颗可见星,这里以“3+3+2”组合为例,即从第1~5颗 GPS 卫星中任意选取3颗,从第6~9颗 GLONASS 卫星中任意选取3颗,从第10~13颗 COMPASS 卫星中任意选取2颗,遍历所有可能的组合情况,共有 $C_3^5C_3^4C_2^4=240$ 种组合。分别利用第4节提出的“3+3+2”SPA 直接解算算法和 LS 算法进行解算,得到如图3、图4所示的仿真结果。

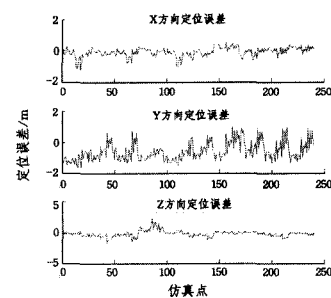


图3 LS算法在8颗可见星时的定位误差

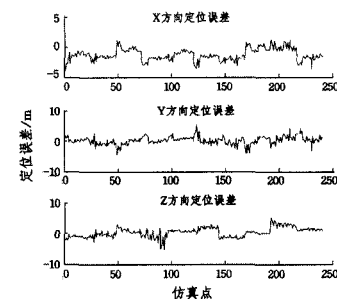


图4 “3+3+2”形式直接解算算法的定位误差

5.1.3 可见9颗星实验

在保证所有系统卫星都有参与解算的前提下,从表1中选取9颗可见星,这里以“3+3+3”组合为例,即从第1~5颗 GPS 卫星中任意选取3颗,从第6~9颗 GLONASS 卫星中任意选取3颗,从第10~13颗 COMPASS 卫星中任意选取3颗,遍历所有可能的组合情况,共有 $C_3^5C_3^4C_3^4=160$ 种组合。

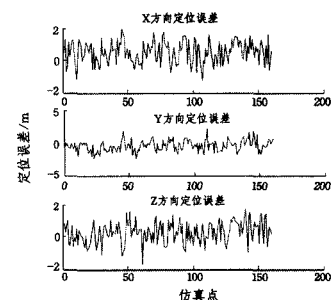


图5 LS算法在9颗可见星时的解算定位误差

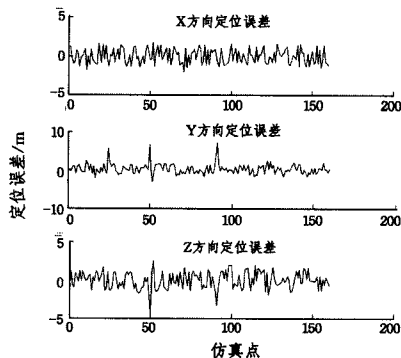


图6 9星及以上直接解算算法在可见9星时的定位误差

分别利用第2节提出的多星座直接解算算法和LS算法进行解算,得到如图5、图6所示的仿真结果。

5.2 仿真结果分析

根据5.1节的实验仿真结果,仔细观察图1—图6以及仿真数据,可以得到如下几点:

- 1)使用LS算法和DS算法进行定位解算得到的用户位置在X,Y,Z方向的误差范围一致,数量级都在20m以内。
- 2)使用DS算法得到的误差曲线相比LS算法较为平缓。
- 3)在LS算法的曲线的平缓区,X,Y,Z方向的误差较DS算法更小,即定位精度更高。

为了进一步分析实验结果,根据5.1节的仿真数据,可以得到表2的统计结果。

表2 实验结果对比(单位:m)

	7颗星		8颗星		9颗星	
	均值	方差	均值	方差	均值	方差
LS算法	2.1439	3.5672	3.1110	3.0923	3.0091	3.0447
DS算法	2.5185	3.4992	2.4477	1.2575	1.8112	0.9150

从图1—图6以及表2可以看出,本文提出的直接解算算法的定位精度与LS算法相当,例如“3+2+2”组合时,直接解算算法定位的绝对误差均值为2.5185m,而LS算法的为2.1439m,使用直接解算算法得到的绝对误差均值仅比LS算法的高0.3746m;“3+3+3”组合时,直接解算算法定位的绝对误差均值为1.8112m,LS算法的为3.0091m,使用直接解算算法得到的绝对误差均值比LS算法的低1.1979m。另外还可以发现,使用DS算法进行解算时的绝对误差的方差比LS都小,这是因为使用LS算法解算时需要进行线性迭代的过程,从而影响了解算的稳定性。

5.3 计算量分析

使用传统LS算法进行定位解算时,在实际定位过程中,由于接收机初始坐标存在误差,误差越大,需要进行迭代的次数越多,直至结果满足精度要求为止^[14]。而本文提出的直接解算算法不需要预先假设接收机初始坐标,无需迭代,能够直接进行解算,计算量相当于LS算法迭代一次的计算量,因此与LS算法相比,直接解算算法的计算量远远小于LS算法。

5.3.1 “3+2+2”、“3+3+2”算法计算量分析

为了进一步量化计算量,根据第3节和第4节的理论推导,给出“3+2+2”、“3+3+2”组合详细的计算量分析。表3、表4分别为“3+2+2”和“3+3+2”组合解算过程中计算关键参数的加法和乘法次数。

表3 “3+2+2”算法计算量分析

参数	G^{-1}	A	B	C	a	b	c
加法次数	23	12	3	9	12	29	18
乘法次数	13	7	4	13	11	20	16
参数	d	e	p	λ	v	u	$b_1 b_2 b_3$
加法次数	21	17	1	80	1	3	10
乘法次数	14	14	6	100	2	5	2

表4 “3+3+2”算法计算量分析

参数	G^{-1}	A	B	C	α	β	γ	$b_1 b_2 b_3$
加法次数	36	12	3	9	9	7	3	6
乘法次数	27	7	4	13	10	11	4	8

“3+2+2”组合直接解算时,根据式(27)和式(28)可以计算出当 $q=0$ 和 $q \neq 0$ 时,求解 λ 所需计算量有所不同,表3中只是给出了大约估计。另外最终求出的 $b_1 b_2 b_3$ 也是4组解,需要经过判断条件舍去3组解,这里大约需要30次加法运算。据表3以及第3节的推导步骤,可以算出,使用“3+2+2”组合解算未知参数 X_u 所需要的加法总次数约为300,乘法总次数约为250。

“3+3+2”组合直接解算时,根据第4节的推导,最终求解出的 $b_1 b_2 b_3$ 有两组解,同样需要进一步判断才能求得唯一解,这里大约需要20次加法和20次乘法。根据表4可以计算出,使用“3+3+2”组合解算未知参数 X_u 所需要的加法总次数约为100,乘法总次数约为100。

5.3.2 LS算法计算量分析

根据文献[14]可知,使用LS算法进行解算时,最终:

$$X_u = (G^T G)^{-1} G^T Y \quad (33)$$

其中, G 为观测矩阵, Y 为已知向量。表5给出了LS算法关键步骤的计算量,其中矩阵求逆使用的是高斯消元法^[14,15]。表5中 m 表示需要解算的所有未知参数的个数,包括卫星钟差, n 表示参与定位解算的可见星数目。

表5 LS算法计算量分析

	$(G^T G)^{-1}$	$(G^T G)^{-1} G^T Y$
乘法次数	$m^3/3 + m^2 + (n^2 - 1/3)m$	$nm^2 + 3n + nm$
加法次数	$m^3/3 + m^2/2 + (m^2 + m - 5/6)m$	$nm^2 + 3n - m$

从表5可以计算出,使用LS算法的总计算量如下。

加法总次数:

$$(1/3)m^3 + (n+1)m^2 + (n^2 + n - 1/3)m + 3n \quad (34)$$

乘法总次数:

$$m^3/3 + m^2/2 + (n^2 + n - 5/6)m \quad (35)$$

“3+2+2”组合直接解算时, $m=6, n=7$,代入式(33)可知,使用LS算法所需的加法总次数约为700;乘法总次数约为650。

“3+3+2”组合直接解算时, $m=6, n=8$,代入式(33)可知,使用LS算法所需的加法总次数约为850;乘法总次数约为800。

上面计算的只是LS算法迭代一次的计算量,若初始位置坐标估计偏差很大,所需迭代次数更多,计算量更大,将远远大于本文提出的直接解算算法。

综上所述,可得出如下结论:

- 1)本文提出的直接解算算法定位精度与LS算法相当,能够有效实现3星座7颗及以上可见星的定位解算。
- 2)直接解算算法的计算量远远小于LS的计算量,当LS算法所需迭代次数更多时,直接解算算法的优势将更为明显。

3)直接解算算法在定位精度上稍逊于LS算法,因为无需迭代解算过程,其比LS稳定。

结束语 本文充分考虑多星座可见星数目较多的有利条件,以GPS/GLONASS/COMPASS系统为例,提出一种适用于多星座的直接解算算法,并就“3+2+2”以及“3+3+2”形式的直接解算进行了详细的推导和证明,同时推导出9颗及以上可见星时充分利用冗余观测量将非线性方程线性化的直接解算方法。通过仿真实验和数据分析将本文提出的直接解算算法与LS算法进行了比较,结果表明本算法的定位精度与LS算法相当,并且由于本文提出的直接解算算法不需要预先假设接收机初始坐标,避免了LS算法的线性迭代过程,因此其计算量远小于LS算法。所以本文提出的多星座直接解算算法是有效可行的。

参考文献

- [1] 常强,侯洪涛,曾祥辉,等. GNSS合作定位研究综述[J]. 宇航学报,2014,35(1):13-20
Chang Qiang, Hou Hong-tao, Zeng Xiang-hui, et al. A Survey of GNSS based Cooperative Positioning [J]. Journal of Astronautics, 2014, 35(1): 13-20
- [2] 张智,周桂贤. 一种农机车载GPS的准确定位算法的仿真研究[J]. 计算机科学,2012,39(12):216-219
Zhang Zhi, Zhou Gui-xian. Farm Machinery on-board GPS Location Accuracy Simulation and Research[J]. Computer Science, 2012, 39(12): 216-219
- [3] 郑春锋,徐扬. 一种基于方位角和网络拓扑的定位算法及应用[J]. 计算机科学,2014,42(6A):273-275
Zheng Chun-feng, Xu Yang. Localization Algorithm Based on Azimuth Angle and Network Topology[J]. Computer Science, 2014, 42(6A): 273-275
- [4] 杨迪. GNSS多星座组合导航关键技术研究[D]. 南京:南京航空航天大学,2012
Yang Di. Research on key technologies of GNSS Multi-constellation Integrated Navigation [D]. Nanjing: Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, 2012
- [5] 张利,袁本银. GNSS多星座导航定位算法研究与实现[J]. 测

- 绘,2012(5):195-197
Zhang Li, Yuan Ben-yin. Algorithm Research and Implementation of GNSS Multi-Constellation Navigation Positioning [J]. Surveying and Mapping of Sichuan, 2012(5): 195-197
- [6] Teng Y L, Wang J. New characteristics of geometric dilution of precision (GDOP) for multi-GNSS constellations[J]. Journal of Navigation, 2014, 67(6): 1018-1028
- [7] Martini I, Rippl M, Meurer M. Advanced RAIM architecture design and user algorithm performance in a real GPS, GLONASS and Galileo scenario[C]//Proceedings of International Technical Meeting of the Satellite Division of the Institute of Navigation. Nashville, Tennessee, 2013: 2624-2636
- [8] Wellen Hof H, Wasl L. GNSS—Global Navigation Satellite Systems: GPS, GLONASS, Galileo, and more[M]. Beijing: Surveying and Mapping Press, 2009: 1-10
- [9] Liu B, Tan Y K, Dempster A G. Using two global positioning system satellites to improve wireless fidelity positioning accuracy in urban canyons [J]. IET Communications, 2011, 5(2): 163-171
- [10] John B, Lundhber G. Alternative algorithms for the GPS static positioning solution [J]. Applied Mathematics and Computation, 2001(119): 21-34
- [11] 张强,刘红雨,汪大宝. 双系统卫星接收机定位方程直接解算方法研究[J]. 系统仿真学报,2014,26(1)
Zhang Qiang, Liu Hong-yu, Wang Da-bao. Study of Position Equation Direct Solving Method in Double Mode Satellite Receivers[J]. Journal of System Simulation, 2014, 26(1)
- [12] Yu X L, Sun Y R, Liu J Y, et al. Multiple satellite integrated navigation system based on self-adaptive soft-switch technology [J]. Journal of Astronautics, 2009, 30(4): 1435-1442
- [13] Li X, Wu M P, Zhang K D, et al. High accuracy acceleration determination by using multiple GNSS reference stations [J]. Measurement, 2013, 46(4): 1607-1615
- [14] Zhang Miao-yan, Zhang Jun. A fast satellite selection algorithm beyond four satellites [J]. IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing, 2009, 3(5): 740-747
- [15] Yan Q. Numerical analysis (Third Edition) [M]. Beijing: Beihang Press, 2006

(上接第200页)

- [20] Dong Wei, Chen Chun, Liu Xue, et al. Bulk data dissemination in wireless sensor networks: Modeling and analysis[J]. Computer Networks, 2012, 56(11): 2664-2676
- [21] Li Jun-wei, Li Shi-ning, Zhang Yu, et al. Analytical model of coding-based reprogramming protocols in lossy wireless sensor networks[C]//Proceedings of IEEE International Conference on Communications (ICC), 2013: 1867-1871
- [22] Li Jun-wei, Li Shi-ning, Zhang Yu, et al. Analytical Model of coding-Based Reprogramming Protocols in Lossy Wireless Sensor Networks[C]//2013 IEEE International Conference on Communications (ICC), 2013: 1867-1871
- [23] 舒坚,刘琳岚,樊佑磊,等. 无感知分组丢失下的无线传感器网络链路质量评估模型[J]. 通信学报,2011,32(4):103-111
Shu Jian, Liu Lin-lan, Fan You-lei, et al. Link quality estimation model for wireless sensor networks under non-perceived packet loss[J]. Journal on Communications, 2011, 32(4): 103-111

- [24] 张希元,赵海,朱剑,等. 基于LQI的链路评估算法及其在WSN中的应用[J]. 东北大学学报(自然科学版),2008,29(12):1693-1696
Zhang Xi-yuan, Zhao Hai, Zhu Jian, et al. LQI based link evaluation algorithm and its application in wireless sensor networks [J]. Journal of Northeastern University (Natural Science), 2008, 29(12): 1693-1696
- [25] 段磊,刘琳岚,湛业滨. 基于窗口均值的WSNs链路质量评估方法[J]. 南昌大学学报(理科版),2011,35(5):495-499
Duan Lei, Liu Lin-lan, Chen Ye-bin. Link quality estimation method for WSNs based on window mean[J]. Journal of Nanchang University (Natural Science), 2011, 35(5): 495-499
- [26] Umit B C, Ergen S C. Spatio-temporal characteristics of link quality in wireless sensor networks[C]//Proceedings of IEEE Wireless Communications and Networking Conference (WCNC), 2012: 1152-1157