第42卷 第6期
2015年6月
计 算 机 科 学
Computer Science
Vol. 42 No. 6
June 2015

不完备形式背景下近似概念格的公理化方法

张慧雯 刘文奇 李金海
(昆明理工大学理学院 昆明 650500)

摘 要 提出了由两个完备形式背景构造不完备形式背景的方法。基于完备形式背景公理化的方法得到了近似概念格的公理组,并给出了近似概念格的构造方法,其发展了不完备形式背景下近似概念格的理论。

关键词 形式概念分析,不完备形式背景,近似概念格,公理化

中图法分类号 TP18 **文献标识码** A **DOI** 10.11896/j.issn.1002-137X.2015.6.015

Axiomatic Characterizations of Approximate Concept Lattices in Incomplete Contexts

ZHANG Hui-wen LIU Wen-qi LI Jin-hai
(Faculty of Science, Kunming University of Science and Technology, Kunming 650500, China)

Abstract This paper proposed an approach to construct an incomplete context with two complete contexts. Axiomatic characterizations of approximate concept lattices in complete contexts were obtained based on those of Wille's concept lattices in formal contexts. Then a new method of building approximate concept lattice was presented, enriching the existing theory related to the approximate concept lattice.

Keywords Formal concept analysis, Incomplete context, Approximate concept lattice, Axioms

1 引言

形式概念分析是由 Wille 教授于 1982 年提出来的,其核心是形式背景及其概念格[1]。概念格是蕴藏于形式背景中的带有层次的序结构,这种结构由对象集和属性集之间的二元关系确定,全体概念构成一个概念格。概念格通常表示为一个 Hasse 图,该图中的每一个结点表示一个形式概念。在经典的概念格中,每一个形式概念都是一个对象子集和属性子集的二元组,分别称为概念的外延和内涵。作为信息处理的有效工具,形式概念分析已成功应用于信息检索[2]、机器学习[3]、知识发现[4,5]、软件工程[6,7]等领域。

在经典的 Wille 形式背景中,对象和属性之间的关系是确定的(不妨用"1"和"0"来表示是否有关系),称这种形式背景是完备或二值的形式背景。但是在实际中,由于数据多源性、数据测量误差、数据粒度差异、数据获取方法限制和认知局限等原因,形式背景(数据库)中常常会出现对象与属性之间的关系不确定的情况,包括未知、丢失、冲突等。特别地,在多源信息融合过程中,在合并之前,不同的数据源中相同的对象和属性之间的关系不一致。例如,在公安信息的处理中,两个省的公安信息源显示同一个人分别属于高危人群和非高危人群,在决定是否将两个案件进行并案分析时将出现信息矛盾的情况。这种情况下,需要研究构造不完备的形式背景$(U,A,\{1,?,0\},I)$。这是一类三值形式背景,其中 I 为三值映射即 $I:U\times A\rightarrow\{1,?,0\}$。众所周知,粗糙集理论中,近似算子公理化方法是研究粗糙集代数结构的有力工具[8,9]。对于不完备形式背景,文献[12]用 Galois 连接定义了近似概念格。文献[13-15]通过公理化方法获得了完备形式背景下 Galois 连接的构造,完成了经典概念格的公理化改造,为完备形式背景下概念格理论提供了严格的数学基础。将这种严格的公理化方法推广到不完备形式背景下近似概念构造将是一项非常有趣且具有理论意义的研究工作。通过运用公理化方法,将揭示完备形式背景下的经典概念与不完备形式背景下近似概念的本质联系,为不完备形式背景下近似概念格的获取提供了必要的数学基础。

本文拟通过引入近似概念格公理化和近似概念格构造的新方法,揭示不完备形式背景下近似概念格的数学结构的本质。基本思路是:将一个不完备形式背景分解为两个完备形式背景,用分别在这两个不同的完备形式背景下概念格的公理化算子合成不完备形式背景下近似概念格的公理化算子,并由此得到不完备形式背景下构造近似概念格的新方法及相应的算法。

2 不完备形式背景与近似概念格

在概念格理论中,用完备的形式背景表示所要分析的数据,形式上是一张元素为"1"或"0"的数表,一般行标为对象,列标为属性。形式背景中蕴藏着不同的概念以及概念之间的关系,将这些概念提取出来即可形成一个经典的概念格。

定义 1[1] 形式背景是一个三元组(U,A,I),其中 $U=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$是一个非空有限对象集,$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$是一个非空有限属性集,I 是 U 和 A 之间的二元关系:$I\subseteq$

到稿日期:2014-04-16 返修日期:2014-05-26 本文受国家自然科学基金(61305057),昆明理工大学自然科学研究基金(14118760)资助。
张慧雯(1990—),女,硕士生,主要研究方向为概念格与粗糙集,E-mail:huiwenzhang@sina.com;刘文奇(1965—),男,教授,主要研究方向为决策分析与数据挖掘;李金海(1984—),男,博士,讲师,主要研究方向为粗糙集、概念格与粒计算。

$U\times A$。若$(x,a)\in I$，则表明对象 x 具有属性 a，也记为 xIa。I 也可以用开关映射表示为：

$$I(x,a)=\begin{cases}1, & (x,a)\in I\\ 0, & (x,a)\notin I\end{cases}$$

当 U 和 A 都为有限集时，也可视为一个 Boole 矩阵。

对于形式背景(U,A,I)，$P(U)$表示对象集 U 的幂集，$P(A)$表示属性集 A 的幂集。对于任意的 $X\in P(U)$，$B\in P(A)$，映射 $*:P(U)\to P(A)$和 $*:P(A)\to P(U)$分别定义如下：

$$X^*=\{a\in A:\forall x\in X,(x,a)\in I\}$$

$$B^*=\{x\in U:\forall a\in B,(x,a)\in I\}$$

X^* 表示 X 中所有对象共同具有的属性的集合，B^* 表示 B 中所有属性的对象的集合。方便起见，记 $\forall x\in U,\{x\}^*:=x^*$；$\forall a\in A,\{a\}^*:=a^*$。

若 $\forall x\in U,x^*\neq\emptyset,x^*\neq A$，且 $\forall a\in A$，$a^*\neq\emptyset,a^*\neq U$，则称形式背景$(U,A,I)$是正则的。

定义 2[1] 设(U,A,I)为形式背景，如果二元组(X,B)满足 $X^*=B,B^*=X$，其中 $X\in P(U)$，$B\in P(A)$，则称(X,B)是一个形式概念，简称概念。其中 X 称为概念(X,B)的外延，B 称为概念(X,B)的内涵。

定理 1[10] 设(U,A,I)是正则的形式背景，$\forall X,X_1,X_2\in P(U)$，$\forall B,B_1,B_2\in P(A)$，则：

(1)$X_1\subseteq X_2\Rightarrow X_2^*\subseteq X_1^*$，$B_1\subseteq B_2\Rightarrow B_2^*\subseteq B_1^*$；

(2)$X\subseteq X^{**}$，$B\subseteq B^{**}$；

(3)$X^*=X^{***}$，$B^*=B^{***}$；

(4)$(X_1\cup X_2)^*=X_1^*\cap X_2^*$，$(B_1\cup B_2)^*=B_1^*\cap B_2^*$；

(5)$X\subseteq B^*\Leftrightarrow B\subseteq X^*$。

定义 3[1] 若(X_1,B_1)，(X_2,B_2)是某个背景上的两个概念，而且 $X_1\subseteq X_2$（等价于 $B_2\subseteq B_1$），则称(X_1,B_1)是(X_2,B_2)的子概念，(X_2,B_2)是(X_1,B_1)的超概念，并记作$(X_1,B_1)\leqslant(X_2,B_2)$，关系$\leqslant$称为是概念的"层次序"（简称序）。$(U,A,I)$的所有概念用这种序组成的集合 $L(U,A,I)$表示，称它为背景(U,A,I)上的概念格。在此序关系$\leqslant$下，生成的概念格运算为：

$$(X_1,B_1)\wedge(X_2,B_2)=(X_1\cap X_2,(B_1\cup B_2)^{**})$$

$$(X_1,B_1)\vee(X_2,B_2)=((X_1\cup X_2)^{**},B_1\cap B_2)$$

正如引言中提到的，一个有值 $I(x,a)$不确定的形式背景就是不完备的背景。如果用"?"来标记这些不确定的值，一个不完备的背景就可以被看作是一个"三值"背景$(U,A,\{1,?,0\},I)$，包括非空有限的对象集 U、非空有限的属性集 A、值的集合$\{1,?,0\}$和映射 $I:U\times A\to\{1,?,0\}$，其中 $I(x,a)=1$ 表示对象 x 具有属性 a，$I(x,a)=0$ 表示对象 x 不具有属性 a，$I(x,a)=?$ 表示对象 x 是否具有属性 a 未知。

为了区分不完备背景，本文定义 1 所定义的形式背景为完备的背景，同时完备的背景和不完备的背景统称为背景。

引理 1[11] 对于$(M,\leqslant_M)$，$(N,\leqslant_N)$两个偏序集，设 $O=M\times N$ 是 M 和 N 的笛卡儿积，若$\leqslant_O$ 定义为：$(m_1,n_1)\leqslant_O(m_2,n_2)\Leftrightarrow m_1\leqslant_M m_2$，且 $n_1\leqslant_N n_2$，则$(O,\leqslant_O)$也是一个偏序集。

A 是一个属性集合，$P(A)$为 A 的幂集，$P(A)\times P(A)$是 $P(A)$和 $P(A)$的笛卡儿积。在 $P(A)\times P(A)$上的一个偏序关系$\leqslant$定义为：

$$(B_1,C_1)\leqslant(B_2,C_2)\Leftrightarrow B_1\subseteq B_2 \text{ 且 } C_1\subseteq C_2$$

从而由引理 1 可知，$(P(A)\times P(A),\leqslant)$是一个偏序集。如果 $B_1=B_2$ 且 $C_1=C_2$，则称(B_1,C_1) 等于(B_2,C_2)，记作$(B_1,C_1)=(B_2,C_2)$。在 $P(A)\times P(A)$上的交集($\cap$)和并集($\cup$)分别定义为：

$$(B_1,C_1)\cap(B_2,C_2)=(B_1\cap B_2,C_1\cap C_2)$$

$$(B_1,C_1)\cup(B_2,C_2)=(B_1\cup B_2,C_1\cup C_2)$$

对于一个不完备背景$(U,A,\{1,?,0\},I)$有 $X\subseteq U$，定义：

$$\underline{R}(X)=\{a\in A:\forall x\in X,I(x,a)=1\}$$

$$\overline{R}(X)=\{a\in A:\forall x\in X,I(x,a)=1 \text{ 或 } I(x,a)=?\}$$

$\underline{R}(X)$为 X 中所有对象具有的属性的最大集合，$\overline{R}(X)$为 X 中所有对象可能具有的属性的最大集合。显然有$\underline{R}(X)\subseteq\overline{R}(X)$。容易看出，二元组$(\underline{R}(X),\overline{R}(X))\in P(A)\times P(A)$且决定了 X 中所有对象共同具有的属性的范围。为方便起见，将$\underline{R}(\{x\})(x\subseteq U)$记作$\underline{R}(x)$，$\overline{R}(\{x\})(x\in U)$记作$\overline{R}(x)$。

定义 4[12] 设不完备背景$(U,A,\{1,?,0\},I)$，记 $TN(A):=\{(B,C)\in P(A)\times P(A)\mid B\subseteq C\}$，映射 $\mu:P(U)\to TN(A)$和 $\nu:TN(A)\to P(U)$分别定义为：

$$\mu(X):=X^\mu=(\underline{R}(X),\overline{R}(X))$$

$$\nu(B,C):=(B,C)^\nu=\{x\in U:(B,C)\leqslant(\underline{R}(x),\overline{R}(x))\}$$

事实上 X^μ 是一个二元组$(\underline{E},\overline{E})$，其中$\overline{E}$包含 X 中所有对象一定具有的属性，而$\underline{E}$包含 X 中所有对象可能具有的属性。$(B,C)^\nu$ 是具有 B 中所有属性和可能具有 $C\backslash B$ 中所有属性的对象的最大集合。

定理 2[12] 设$(U,A,\{1,?,0\},I)$为不完备的形式背景，$P(A)$为 A 的幂集，$P(U)$为 U 的幂集，$X,X_1,X_2\in P(U)$，(B,C)，(B_1,C_1)，$(B_2,C_2)\in TN(A)$，则下列性质成立：

(i)$X_1\subseteq X_2\Rightarrow X_2^\mu\subseteq X_1^\mu$；$(B_1,C_1)\leqslant(B_2,C_2)\Rightarrow(B_2,C_2)^\nu\subseteq(B_1,C_1)^\nu$。

(ii)$X\subseteq X^{\mu\nu}$；$(B,C)\leqslant(B,C)^{\nu\mu}$。

(iii)$X^\mu=X^{\mu\nu\mu}$；$(B,C)^\nu=(B,C)^{\nu\mu\nu}$。

定义 5[12] 设不完备背景$(U,A,\{1,?,0\},I)$，$TN(A):=\{(B,C)\in P(A)\times P(A)\mid B\subseteq C\}$，若 $X^\mu=(B,C)$，$(B,C)^\nu=X$，则称$(X,(B,C))$为背景$(U,A,\{1,?,0\},I)$上的近似概念。其中 X 称为近似概念$(X,(B,C))$的外延，(B,C)称为近似概念$(X,(B,C))$的内涵。称 $L(U,A,\{1,?,0\},I)$为不完备背景$(U,A,\{1,?,0\},I)$上的近似概念格。

定义 6[12] 设$(X_1,(B_1,C_1))$，$(X_2,(B_2,C_2))$是不完备背景$(U,A,\{1,?,0\},I)$上的两个近似概念，若 $X_1\subseteq X_2$，则称$(X_1,(B_1,C_1))$是$(X_2,(B_2,C_2))$的子概念，$(X_2,(B_2,C_2))$是$(X_1,(B_1,C_1))$的超概念，记为$(X_1,(B_1,C_1))\leqslant_G(X_2,(B_2,C_2))$。

3 近似概念格的公理化

引理 2 设(U,A,I_1)和(U,A,I_2)是两个完备的形式背景，非空有限对象集相同，均为 U，非空有限属性集相同，均为 A，且关系 I_1,I_2 满足 $I_1\subseteq I_2$，则由(U,A,I_1)和(U,A,I_2)可构造出唯一的不完备形式背景$(U,A,\{1,?,0\},I)$，其中 $\forall x\in U,a\in A$ 有：

$$I(x,a)=\begin{cases}1, & I_1(x,a)=1 \text{ 且 } I_2(x,a)=1\\ 0, & I_1(x,a)=0 \text{ 且 } I_2(x,a)=0\\ ?, & I_1(x,a)=0 \text{ 且 } I_2(x,a)=1\end{cases}$$

反之，由不完备形式背景$(U,A,\{1,?,0\},I)$则可以构造出两个完备的形式背景(U,A,I_1)和(U,A,I_2)，其中(U,A,I_1)是将不完备形式背景$(U,A,\{1,?,0\},I)$中的缺失值“?”全部替换为“0”得到的背景，(U,A,I_2)则是将不完备形式背景$(U,A,\{1,?,0\},I)$中的缺失值“?”全部替换为“1”得到的背景，且有$I_1 \subseteq I_2$。

定义 7 定义映射$K_1:X \to Y, K_2:X \to Y, \forall Z \in P(X)$满足$K_1(Z) \subseteq K_2(Z)$，则称$K_1$为$K_2$在$X$上的子映射，记为$K_1 \leqslant K_2$。

定理 3 设U是一个非空有限对象集，A是一个非空有限属性集。定义映射：$L_1:P(U) \to P(A), H_1:P(A) \to P(U)$，$L_2:P(U) \to P(A), H_2:P(A) \to P(U)$，$\forall X_1, X_2 \in P(U), B_1, B_2 \in P(A)$满足：

(L)$L_i(X_1 \cup X_2) = L_i(X_1) \cap L_i(X_2), i=1,2$；

(H)$H_i(B) = \{x \in U: B \subseteq L_i(\{x\})\}, i=1,2$；

(LH1)$a \in L_i(x) \Leftrightarrow x \in H_i(a), \forall x \in U, a \in A, i=1,2$；

(LH2)$L_1 \leqslant L_2, H_2 \leqslant H_1$。

定义映射：

(1)$L_{IN}:P(U) \to P(A) \times P(A), X \mapsto L_{IN}(X) := (L_1(X), L_2(X))$

(2)$H_{IN}:TN(A) \to P(U), (B,C) \mapsto H_{IN}(B,C) := H_1(B) \cap H_2(C)$

则存在不完备形式背景$(U,A,\{1,?,0\},I)$，使得$\forall X \in P(U)$，$(B,C) \in TN(A)$，有$X^{\mu} = L_{IN}(X), (B,C)^{\nu} = H_{IN}(B,C)$。

简单起见，将$L(\{x\})$记为$L(x)$，$H(\{a\})$记为$H(a)$，$H(L(X))$记为$HL(X)$，$L(H(X))$记为$LH(X)$。

证明：首先证明若映射$L_i:P(U) \to P(A), H_i:P(A) \to P(U)$，满足(L)(H)(LH1)条件，则存在一个形式背景(U,A,I_i)，$\forall X \in P(U), B \in P(A)$有$L_i(X) = X^{*i}$，$H_i(B) = B^{*i}$。

二元关系$I_i \subseteq U \times A$定义为：$I_i = \{(x,a): a \in L_i(x)\}$，$\forall x \in U, a \in A$，则$\forall X \in P(U)$有

$$\begin{aligned} X^{*i} &= \{a \in A: \forall x \in X, (x,a) \in I_i\} \\ &= \{a \in A: \forall x \in X, a \in L_i(x)\} \\ &= \{a \in A: a \in \bigcap_{x \in X} L_i(x) = L_i(\bigcup_{x \in X}\{x\}) = L_i(X)\} \\ &= L_i(X) \end{aligned}$$

下证$H_i(B_1 \cup B_2) = H_i(B_1) \cap H_i(B_2)$。由$H_i(B) = \{x \in U: B \subseteq L_i(x)\}$，则$\forall B_1, B_2 \in P(A)$有

$$\begin{aligned} H_i(B_1 \cup B_2) &= \{x \in U: (B_1 \cup B_2) \subseteq L_i(x)\} \\ &= \{x \in U: B_1 \subseteq L_i(x) \text{且} B_2 \subseteq L_i(x)\} \\ &= \{x \in U: B_1 \subseteq L_i(x)\} \cap \{x \in U: B_2 \subseteq L_i(x)\} \\ &= H_i(B_1) \cap H_i(B_2) \end{aligned}$$

又$I_i = \{(x,a): x \in H_i(a)\}, \forall x \in U, a \in A, \forall B \in P(A)$有

$$\begin{aligned} B^{*i} &= \{x \in U: \forall a \in B, (x,a) \in I_i\} \\ &= \{x \in U: \forall a \in B, x \in H_i(a)\} \\ &= \{x \in X: x \in \bigcap_{a \in A} H_i(a) = H_i(\bigcup_{a \in A}\{a\}) = H_i(B)\} \\ &= H_i(B) \end{aligned}$$

可知，L_i, H_i满足(L)(H)(LH1)条件，则由存在完备形式背景(U,A,I_i)，且$\forall X \in P(U), B \in P(A)$，有$L_i(X) = X^{*i}$，$H_i(B) = B^{*i}$。再由(LH2)有$L_1 \leqslant L_2$，其中$L_i:P(U) \to P(A)$，由定义 7，$\forall X \in P(U), L_1(X) \subseteq L_2(X)$，则$I_1 \subseteq I_2$。

由引理 2 可知(U,A,I_1)和(U,A,I_2)可构造出唯一的不完备形式背景$(U,A,\{1,?,0\},I)$，使

$$X^{*1} = L_1(X) = \underline{R}(X), X^{*2} = L_2(X) = \overline{R}(X)$$

$$H_1(B) = \{x \in U: B \subseteq L_1(x) = \underline{R}(x)\}$$

$$H_2(C) = \{x \in U: C \subseteq L_2(x) = \overline{R}(x)\}$$

其中

$\underline{R}(X) = \{a \in A: \forall x \in X, I(x,a) = 1\}$，$\overline{R}(X) = \{a \in A: \forall x \in X, I(x,a) = 1 \text{ 或 } I(x,a) = ?\}$。在不完备背景$(U,A,\{1,?,0\},I)$中，由于$X^{\mu} = (\underline{R}(X), \overline{R}(X))$，$(B,C)^{\nu} = \{x \in U: (B,C) \leqslant (\underline{R}(x), \overline{R}(x))\}$。

因此

$$\begin{aligned} X^{\mu} &= (\underline{R}(X), \overline{R}(X)) \\ &= (L_1(X), L_2(X)) = L_{IN}(X) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (B,C)^{\nu} &= \{x \in U: (B,C) \leqslant (\underline{R}(x), \overline{R}(x))\} \\ &= \{x \in U: B \subseteq \underline{R}(x) \text{且} C \subseteq \overline{R}(x)\} \\ &= \{x \in U: B \subseteq \underline{R}(x) = L_1(x)\} \cap \{x \in U: C \subseteq \overline{R}(x) = L_2(x)\} \\ &= H_1(B) \cap H_2(C) = H_{IN}(B,C) \end{aligned}$$

证毕。

4 构造近似概念格的算法

由公理化的证明过程，可以得到一个新的构造近似概念格的方法，即对于给定的不完备背景$(U,A,\{1,?,0\},I)$，将其中的未知值“?”全部替换为“0”得到背景(U,A,I_1)，将其中的未知值“?”全部替换为“1”得到背景(U,A,I_2)，即可得完备的形式背景(U,A,I_1)和(U,A,I_2)。完备形式背景(U,A,I_1)和(U,A,I_2)的 Wille 概念格分别为$L(U,A,I_1)$和$L(U,A,I_2)$，根据映射L_{IN}和H_{IN}得$X^{\mu} = L_{IN}(X), (B,C)^{\nu} = H_{IN}(B,C)$，则可构造出不完备形式背景$(U,A,\{1,?,0\},I)$下的近似概念格$L(U,A,\{1,?,0\},I)$。

背景(U,A,I_1)上的映射L_1, H_1和背景(U,A,I_2)上的映射L_2, H_2分别满足定理 3 中的(L)、(H)、(LH1)、(LH2)条件，(X,C)是背景(U,A,I_2)的概念，则有$L_2(X) = C, H_2(C) = X$。由定理 3 可知，$X^{\mu} = (L_1(X), L_2(X))$，又$L_1(X) = B$，则$X^{\mu} = (L_1(X), L_2(X)) = (B,C)$。

同理由$H_2 \leqslant H_1$，$(B,C)^{\nu} = H_1(B) \cap H_2(C) = H_2(C) = X$，则$(X,(B,C))$是近似概念。又由近似概念的定义可知，近似概念就是$(X,(B,C))$的形式。从而可知，由算法 1 得到的$(X,(B,C))$就是不完备形式背景$(U,A,\{1,?,0\},I)$的近似概念。

算法 1 由完备背景概念格构造不完备背景的近似概念格

输入：不完备背景(U,A,{1,?,0},I)

输出：不完备背景(U,A,{1,?,0},I)的全部近似概念

Step 1 将不完备形式背景(U,A,{1,?,0},I)中的缺失值“?”全部替换为“0”得到背景(U,A,I_1)。

Step 2 将不完备形式背景(U,A,{1,?,0},I)中的缺失值“?”全部替换为“1”得到背景(U,A,I_2)。

Step 3 找出背景(U,A,I_2)中的全部概念(X,C)，其中 X∈P(U)，C∈P(A)。

Step 4 在背景(U,A,I_1)中找出$L_1(X)=B$，其中 B∈P(A)且 B⊆C。

Step 5 得到不完备背景(U,A,{1,?,0},I)的全部近似概念(X,(B,C))。

为了更好地说明，给出如下示例。

例 1　表 1 是一个不完备形式背景 $(U,A,\{1,?,0\},I)$，其中 $U=\{1,2,3,4\}$，$A=\{a,b,c,d,e\}$。表格中有两个问号，代表对象 1（或 2）是否具有属性 c（或 d）未知。

表 1　不完备形式背景 $(U,A,\{1,?,0\},I)$

U	a	b	c	d	e
1	1	0	?	1	0
2	0	1	0	?	0
3	1	0	1	0	1
4	1	1	0	0	1

将不完备形式背景 $(U,A,\{1,?,0\},I)$ 中的缺失值“?”全部替换为“0”得到背景 (U,A,I_1)，如表 2 所列。

表 2　完备形式背景 (U,A,I_1)

U	a	b	c	d	e
1	1	0	0	1	0
2	0	1	0	0	0
3	1	0	1	0	1
4	1	1	0	0	1

则有背景 (U,A,I_1) 上的全部概念 $(1234,\emptyset)$，$(134,a)$，$(34,ae)$，$(24,b)$，$(4,abe)$，$(3,ace)$，$(1,ad)$，$(\emptyset,abcde)$。则背景 (U,A,I_1) 上的概念格 $L(U,A,I_1)$ 如图 1 所示。

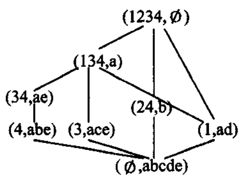

图 1　背景 (U,A,I_1) 上的概念格 $L(U,A,I_1)$

将不完备形式背景 $(U,A,\{1,?,0\},I)$ 中的缺失值“?”全部替换为“1”得到背景 (U,A,I_2)，如表 3 所列。

表 3　完备形式背景 (U,A,I_2)

U	a	b	c	d	e
1	1	0	1	1	0
2	0	1	0	1	0
3	1	0	1	0	1
4	1	1	0	0	1

则有背景 (U,A,I_2) 上的全部概念 $(1234,\emptyset)$，$(134,a)$，$(34,ae)$，$(13,ac)$，$(24,b)$，$(12,d)$，$(4,abe)$，$(3,ace)$，$(2,bd)$，$(1,acd)$，$(\emptyset,abcde)$。则背景 (U,A,I_2) 的概念格 $L(U,A,I_2)$ 如图 2 所示。

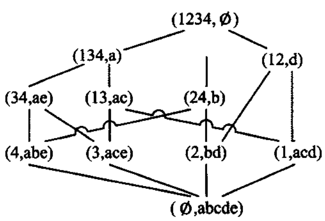

图 2　背景 (U,A,I_2) 的概念格 $L(U,A,I_2)$

根据定理 3 中 $L_{IN}(X)=(L_1(X),L_2(X))$，$H_{IN}(B,C)=H_1(B)\cap H_2(C)$ 和 $X^{\mu}=L_{IN}(X)$，$(B,C)^{\nu}=H_{IN}(B,C)$，可得到不完备背景 $(U,A,\{1,?,0\},I)$ 的全部概念 $(1234,(\emptyset,\emptyset))$，$(134,(a,a))$，$(34,(ae,ae))$，$(13,(a,ac))$，$(24,(b,b))$，$(12,(\emptyset,d))$，$(4,(abe,abe))$，$(3,(ace,ace))$，$(2,(b,bd))$，$(1,(ad,acd))$，$(\emptyset,(abcde,abcde))$。则构造出不完备背景 $(U,A,\{1,?,0\},I)$ 的概念格 $L(U,A,\{1,?,0\},I)$，如图 3 所示。

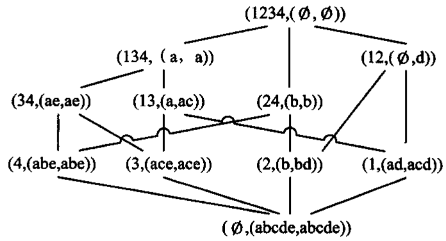

图 3　不完备背景 $(U,A,\{1,?,0\},I)$ 的概念格 $L(U,A,\{1,?,0\},I)$

由以上可知，近似概念格的这种构造方法反过来说明了定理 3 的约束条件 (L_{IN})、(H_{IN}) 的正确性。

结束语　本文在完备形式背景的基础上，提出了构造不完备形式背景的方法，即由两个完备的形式背景构造不完备的形式背景，通过两个完备背景之间的关系及完备背景公理化的方法，证明了不完备背景上近似概念格的公理化。文中进一步提出了一种构造近似概念格的新算法，即由两个完备背景的概念格构造不完备背景下的近似概念格。本文将不完备背景上近似概念格转换为经典的 Wille 概念格模型，进一步刻画了完备形式背景与不完备形式背景、经典概念格与近似概念格之间的本质联系，揭示了不完备形式背景下近似概念格的数学结构，从根本上解决了不完备形式背景下的近似概念构造问题。

参 考 文 献

[1] Wille R. Restructuring lattice theory: An approach based on hierarchies of concepts [C] // Rival I, ed. Ordered Sets. Reidel, 1982: 415-470

[2] Carpineto C, Romano G. Exploiting the Potential of Concept Lattices for Information Retrieval with CREDO [J]. Journal of Universal Computer Science, 2004, 10(8): 985-1013

[3] Kuznetsov S O. Machine learning on the basis of formal concept analysis [J]. Automation and Remote Control, 2001, 62(10): 1543-1564

[4] Wille R. Why can concept lattices support knowledge discovery in databases [J]. Journal of Experimental & Theoretical Artificial Intelligence, 2002, 14(2/3): 81-92

[5] Quan T T, Ngo L N, Hui S C. An effective clustering-based approach for conceptual association rules mining[C] // International Conference on Computing and Communication Technologies (RIVF'09). IEEE, 2009: 1-7

[6] Snelting G. Reengineering of configurations based on mathematical concept analysis [J]. ACM Transactions on Software Engineering and Methodology, 1996, 5(2): 146-189

[7] Sampath S, Sprenkle S, Gibson E, et al. Applying concept analysis to user-session-based testing of web applications[J]. IEEE Transactions on Software Engineering, 2007, 33(10): 643-658

[8] Wu Wei-zhi, Zhang Wen-xiu. Constructive and axiomatic approaches of fuzzy approximation operators [J]. Information sciences, 2004, 159(3): 233-254

[9] Thiele H. On axiomatic characterization of fuzzy approximation operators. II. The rough fuzzy set based case[C] // Proceedings. 31st IEEE International Symposium on Multiple-Valued Logic, 2001. IEEE, 2001: 330-335

（下转第 92 页）

$$\underline{P_{C_1+C_2}}_{\alpha}(X)\subseteq\underline{O_{C_1+C_2}}_{\alpha}(X)$$

$$\overline{P_{C_1+C_2}}^{\beta}(X)\subseteq\overline{O_{C_1+C_2}}^{\beta}(X)$$

证明：根据定义 8 和定义 9 易证。

结束语　目前，多粒度粗糙集的理论和应用研究已得到广泛关注。本文在覆盖近似空间下，在条件概率描述下提出了 3 种多粒度覆盖粗糙集模型，研究讨论了相关性质，并证明了这些模型是经典多粒度粗糙集在覆盖近似空间上的有效扩展。本文的工作对完善多粒度粗糙集理论有一定的推动作用。

参 考 文 献

[1] Qian Y H, Liang J Y. Rough set method based on multi-granulations[C]// Proceeding of the fifth IEEE International Conference on Cognitive Informatics. Beijing, China, July 2006: 297-304

[2] Qian Y H, Liang J Y, Yao Y Y, et al. MGRS: A multi-granulation rough set [J]. Information Sciences, 2010, 180: 949-970

[3] Qian Y H, Zhang H, Sang Y L, et al. Multigranulation decision-theoretic rough sets [J]. International Journal of Approximate Reasoning, 2014, 55(1): 225-237

[4] Qian Y H, Li S Y, Liang J Y, et al. Pessimistic rough set based decisions: a multigranulation fusion strategy [J]. Information Sciences, 2014, 264: 196-210

[5] Yang X B, Song X N, Dou H L, et al. Multi-granulation rough set: from crisp to fuzzy case [J]. Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics, 2011, 1(1): 55-70

[6] Yang X B, Song X N, Chen Z H, et al. On multigranulation rough sets in incomplete information system [J]. International Journal of Machine Learning and Cybernetics, 2012, 3(3): 223-232

[7] Yang X B, Qi Y S, Song X N, et al. Test cost sensitive multigranulation rough set: Model and minimal cost selection[J]. Information Sciences, 2013, 250: 184-199

[8] Xu W H, Sun W X, Zhang X Y, et al. Multiple granulation rough set approach to ordered information systems [J]. International Journal of General Systems, 2012, 41(5): 475-501

[9] Xu W H, Wang Q R, Zhang X T. Multi-granulation rough sets based on tolerance relations [J]. Soft Computing, 2013, 17(7): 1241-1252

[10] Xu W H, Wang Q R. Multi-granulation fuzzy rough sets, Journal of Intelligent and Fuzzy Systems [J]. Journal of Intelligent and Fuzzy Systems, 2014, 26(3): 1320-1340

[11] She Y H, He X L. On the structure of the multigranulation rough set model [J]. Knowledge Based Systems, 2012, 36: 81-92

[12] Huang B, Guo C X, Zhuang Y L, et al. Intuitionistic fuzzy multigranulation rough sets [J]. Information Sciences, 2014, 277: 299-320

[13] Lin G P, Liang J Y, Qian Y H. Multigranulation rough sets: from partition to covering[J]. Information Sciences, 2013, 241: 101-118

[14] Lin G P, Qian Y H, Li J J. NMGRS: Neighborhood-based multigranulation rough sets [J]. International Journal of Approximation Reasoning, 2012, 53(7): 1080-1093

[15] Liu C H, Miao D Q, Qian J. On multi-granulation covering rough sets[J]. International Journal of Approximate Reasoning, 2014, 55: 1404-1418

[16] Liu C H. Covering Multi-granulation Rough Sets Based on Maximal Descriptors[J]. Information Technology Journal, 2014, 13(7): 1396-1400

[17] 别林斯里. 概率与测度(第 3 版)[M]. 北京：世界图书出版公司，2007
Billingsley P. Probability and Measure(Third Edition)[M]. Beijing: World Publishing Corporation, 2007

[18] 张明，谭振民，徐维艳，等. 可变粒度粗糙集[J]. 计算机科学，2011, 38(10): 220-222
Zhang M, Tang Z M, Xu W Y, et al. Variable Granulation Rough Set [J]. Computer Science, 2011, 38(10): 220-222

[19] 翟永健，张宏. 不完备系统中的变精度多粒度粗糙集[J]. 南京航空航天大学学报，2011, 43(6): 781-785
Zhai Y J, Zhang H. Variable Precision Multigranulation Rough Sets in Incomplete Information System [J]. Journal of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, 2011, 43(6): 781-785

[20] 刘财辉. 一种元素最大描述下的多粒度覆盖粗糙集模型[J]. 计算机科学，2013, 40(12): 64-67
Liu C H. Covering-based Multigranulation Rough Set Model Based on Maximal Description of Elements [J]. Computer Science, 2013, 40(12): 64-67

[21] Zhu W, Wang F Y. Reduction and axiomatization of covering generalized rough sets [J]. Information Sciences, 2003, 152: 217-230

[22] Yao Y Y. Three-way decisions with probabilistic rough sets [J]. Information Sciences, 2010, 180: 341-353

（上接第 70 页）

[10] Ganter B, Wille R. Formal concept analysis, mathematical foundations[M]. New York: Springer, 1999

[11] Grätzer G. General lattice theory [M]. Springer, 2003

[12] Li Jin-hai, Mei Chang-lin, Lv Yue-jin. Incomplete decision contexts: Approximate concept construction, rule acquisition and knowledge reduction [J]. International Journal of Approximate Reasoning, 2013, 54(1): 149-165

[13] 陈锦坤，李进金. 概念格的公理化[J]. 计算机工程与应用，2012, 48(5): 41-43
Chen Jin-kun, Li Jin-jin. The axiomatization of the concept lattice[J]. Computer Engineering and Appolications, 2012, 48(5): 41-43

[14] Song Xiao-xue, Wang Xia, Zhang Wen-xiu. Independence of axiom sets characterizing formal concepts [J]. International Journal of Machine Learning and Cybernetics, 2013, 4(5): 459-468

[15] Ma Jian-min, Zhang Wen-xiu. Axiomatic characterizations of dual concept lattices [J]. International Journal of Approximate Reasoning, 2013, 54(5): 690-697