

一种邻域竞争线性嵌入的降维方法

李燕燕¹ 闫德勤²

(河北建筑工程学院 张家口 075024)¹ (辽宁师范大学 大连 116081)²

摘 要 针对局部线性嵌入算法处理稀疏数据失效的问题,提出一种基于邻域竞争线性嵌入的降维方法。利用数据的统计信息动态确定局部线性化范围,并采用 cam 分布寻找数据点的近邻,避免了近邻选取方向的缺失。在数据集稀疏的情况下,通过对数据点近邻做局部结构的提取,该算法能够很好地把握数据的局部信息和整体信息。为了验证算法的有效性,将该算法应用于手工流形降维和对 Corel 数据库进行图像检索等,结果表明该算法不仅有较好的降维效果,而且具有很好的实用价值。

关键词 线性化,流形学习,局部线性嵌入,稀疏,降维

中图分类号 TP181 文献标识码 A DOI 10.11896/j.issn.1002-137X.2015.2.053

Dimensionality Reduction Algorithm Based on Neighborhood Rival Linear Embedding

LI Yan-yan¹ YAN De-qin²

(Hebei University of Architecture, Zhangjiakou 075024, China)¹ (Liaoning Normal University, Dalian 116081, China)²

Abstract In order to improve the correctness of locally linear embedding caused by sparse data, a novel dimensionality reduction algorithm based on neighborhood rival linear embedding was proposed in this paper. According to the statistical information, it determines local linear dynamic range, adopts the cam distribution to find neighbors of data points, and avoids the lack of the direction of neighbor selection. In the case of sparse data sets, the algorithm can effectively obtain local and global information of data. The experiment to test the improved algorithm obtains a good effort of reducing dimension. The experimental results on the image retrieval using the Corel database show the efficiency of the algorithm.

Keywords Linearization, Manifold learning, Locally linear embedding, Sparse, Dimensionality reduction

1 前言

随着信息化的迅速发展,我们不可避免地要经常对高维数据进行处理及分析,高维数据中含有大量的冗余数据,且计算量非常庞大。早期提出的线性降维算法有主成分分析(principal component analysis, PCA)^[1]、多维尺度变换(Multidimensional Scaling, MDS)^[2]等。PCA 降维的实质是寻找最优方向的问题,即找到方差较大的几个方向来降维,这样使得降维后损失的信息不会太多。MDS 基于距离模式,利用样本间的欧氏距离反映样本间的相似性,再用样本间的相似性来构建合适的低维空间,但这类方法主要应用于处理线性结构的数据集。为了有效解决高维非线性数据的降维问题,非线性降维方法应运而生。流形学习就是根据流形的定义提出的一种非线性降维方法,这类方法不依赖于对原始数据的线性假设,而是致力于原数据集某一方面的特性,使其在降维后保持不变,其主要思想是发现嵌入在高维数据空间的低维流形。主要的流形学习算法有等规度映射(isometric feature mapping, ISOMAP)^[3]、局部切空间算法(Local tangent space alignment, LTSA)^[4]和局部线性嵌入(locally linear embedding, LLE)^[5]等。ISOMAP 方法是最大程度地保持原数据集中各点间的测地距离,LTSA 是利用局部 PCA 投影保持局部

线性化,LLE 则能保持原数据集中各点的邻域关系。

但是,目前利用流形学习算法来降维存在着一个重要问题,即各种算法对稀疏数据的降维效果不佳,这极大地影响着智能数据的处理进程^[6,7]。近年来涌现出了许多研究稀疏性的文章^[8-13],例如冷亦琴等用解 0 范数问题的正交匹配追踪方法来求近邻样本点的权值^[12],陈才扣等提出了一种快速的基于稀疏表示的分类器^[14]等。鉴于此,本文基于对数据稀疏性的考虑,分析 LLE 算法在数据稀疏时降维失效的原因,在此基础上利用数据的统计信息动态确定局部线性化范围,并采用 cam 分布寻找数据点的近邻,避免了近邻选取方向的缺失,提出了一种邻域竞争线性嵌入的降维方法(A Neighborhood Rival Linear Embedding Algorithm, NRLE)。

为了验证本文算法的有效性,将本文提出的 NRLE 算法与 LLE、LTSA 在手工流形、Frey 人脸数据库和图像检索中进行了对比实验。实验结果显示,新提出的 NRLE 算法能很好地挖掘出稀疏数据的低维局部结构,并具有较好的稳定性。

2 LLE 算法

2.1 LLE 算法的思想

LLE 是一种局部优化的算法,它的理论来源是:如果数据集由一个光滑连续的流形构成,那么在流形上的很小局部

到稿日期:2014-03-13 返修日期:2014-06-19 本文受国家自然科学基金项目(61105085)资助。

李燕燕(1986—),女,硕士,主要研究方向为数据降维等,E-mail:liyanyan1016@126.com;闫德勤(1962—),男,博士,教授,主要研究方向为模式识别和数据挖掘等。

区域可以被假定为是线性的。在线性条件下,局部区域上的点可以用此区域上的其它近邻点线性表示,每个数据点在保持线性的条件下被嵌入到低维空间来达到降维的目的。

算法的关键是正确地描述出高维非线性空间中的局部线性关系,利用局部的线性来逼近全局的非线性,通过相互重叠的局部信息提供全局结构的信息。LLE 通过 k 近邻算法构建局部线性区域,寻出此线性区域的局部重建权值,使权值在降维的过程中保持不变,进而在保持原来拓扑结构的基础上映射到低维流形。

2.2 LLE 对稀疏数据失效的原因

总的来说,LLE 对稀疏数据失效的原因有两个:1) LLE 是通过相互重叠的局部信息来提供全局结构的信息,但在处理信息损失严重的稀疏数据时,局部信息量不足的问题非常突出,这就难以正确反映高维空间中稀疏数据的整体拓扑特性;2) 稀疏数据信息量较少,且数据不一定均匀分布,所以在近邻选取时很有可能造成偏差。基于上述原因,流形的低维嵌入映射结果就会变差,最终导致算法失效。

3 NRLE 算法的提出思想

3.1 竞争模型的刻画及权值确定

将高维欧氏空间中的高维数据集 $\mathbf{X} = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$, $x_i \in R^D$, 映射到一个低维嵌入空间 R^d 中,从而得到低维嵌入 $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_N\}$, $y_i \in R^d$ ($d \ll D$)。利用 LLE 学习稀疏数据集时,样本的局部信息量很少,无法充分提取出稀疏数据的局部信息,从而导致欠学习的问题,所以对样本点的 k 个最近邻区域进行信息加强。如图 1 所示,样本点 x_i 的近邻点 x_{ik} (较大的圆内的点) 是再由其对应的 k 个最近邻点 (较小的圆内的点) 重构而成,从而在样本点稀疏的情况下,也能使样本的重叠信息丰富,进而达到重叠信息充足的流形学习效果。

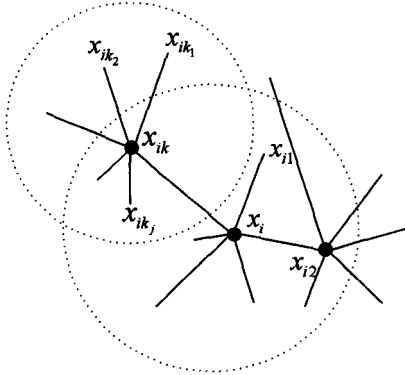


图 1 以 x_i 为中心的邻域信息

现令 x_i 和其 k 个近邻点 x_{ik} 构成一个邻域,下标集合为 $N(i)$, x_{ik} 和其 k 个近邻点构成一个邻域,下标集合为 $k-N(i)$,在 $N(i)$ 这个邻域内确定权值 w_{ij} :

$$\begin{cases} \min \epsilon(W) = \sum_{i=1}^N \|x_i - \sum_{j=1}^k W_{ij} x_{ij}\|^2 \\ \text{s. t. } \sum_{j=1}^k W_{ij} = 1 \end{cases} \quad (1)$$

利用拉格朗日乘子法在 $\sum_{j=1}^k W_{ij} = W_i^T \mathbf{1}_k = 1$ 的约束条件下,求 $\min \epsilon(W) = \sum_{i=1}^N \|x_i - \sum_{j=1}^k W_{ij} x_{ij}\|^2$ 的最小值,即:

$$L(W) = \sum_{i=1}^N W_i^T Z_i W_i + \lambda (W_i^T \mathbf{1}_k - 1) \quad (2)$$

用上式对 W_i 求导并令其为 0,则

$$\frac{\partial L}{\partial W_i} = 2Z_i W_i + \lambda \mathbf{1}_k = 0 \Rightarrow W_i = \frac{Z_i^{-1} \cdot \mathbf{1}_k}{\mathbf{1}_k^T Z_i^{-1} \mathbf{1}_k}$$

我们希望 x_{ik} 和其对应的 k 最近邻点所构成的局部邻域 $k-N(i)$ 在降维过程中保持样本的权值不变,其权值信息就是上述求得的 W_i ,则第 i 个区域最小化代价函数为:

$$\min \epsilon(Y_{N(i)}) = \sum_{l \in N(i)} \|y_l - \sum_{j=1}^k w_{lj} y_j\|^2 \quad (3)$$

对所有样本区域进行整合,得到最终的约束优化函数:

$$\min \epsilon(Y) = \sum_{i=1}^N \sum_{l \in N(i)} \|y_l - \sum_{j=1}^k w_{lj} y_j\|^2 \quad (4)$$

3.2 权重信息

由于数据的稀疏性会导致信息选取方向的偏失,这样在局部近邻选取时引入 cam 分布^[15],从而增加了数据点间的权重信息,使得对稀疏数据集的样本点最近邻的选取不仅仅限制在一个方向,而是以样本点为中心服从 cam 分布。这种以带权距离作为邻域判别标准的方式克服了局部线性化差的缺点。

图 2 展示了星形点 x_0 的 k 近邻选择情况,实线内的点是利用欧氏距离求得的 k 近邻,虚线内的点则是引入 cam 分布后利用带权距离求得的 k 近邻。具体的关于 cam 分布的参数设置详见文献^[15]。

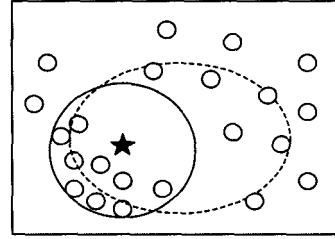


图 2 近邻选择情况

4 NRLE 算法的主要步骤

Step1 局部近邻选取。采用 cam 分布寻找数据点的近邻,增加了数据点间的权重信息。在高维空间中利用权重距离寻找每个数据点 x_i 的 k ($k < N$) 个近邻点 x_{ij} 。

Step2 近邻点确定之后,利用竞争模型对近邻点进行局部信息的加强,根据 Step1 求取的近邻点对数据进行线性重构,并计算重构权值矩阵 W 。

将误差函数化简为:

$$\begin{aligned} \min \epsilon(W) &= \sum_{i=1}^N \|x_i - \sum_{j=1}^k W_{ij} x_{ij}\|^2 \\ &= \sum_{i=1}^N \left\| \sum_{j=1}^k W_{ij} x_i - \sum_{j=1}^k W_{ij} x_{ij} \right\|^2 \\ &= \sum_{i=1}^N \left\| \sum_{j=1}^k W_{ij} (x_i - x_{ij}) \right\|^2 \\ &= \sum_{i=1}^N \left\| (x_i - x_{ij}) W_i \right\|^2 \\ &= \sum_{i=1}^N W_i^T (x_i - x_{ij})^T (x_i - x_{ij}) W_i \\ &= \sum_{i=1}^N W_i^T Z_i W_i \end{aligned} \quad (5)$$

利用拉格朗日乘子法在 $\sum_{j=1}^k W_{ij} = W_i^T \mathbf{1}_k = 1$ 的约束条件下,求 $\min \epsilon(W) = \sum_{i=1}^N \|x_i - \sum_{j=1}^k W_{ij} x_{ij}\|^2$ 的最小值,即:

$$L(W) = \sum_{i=1}^N W_i^T Z_i W_i + \lambda (W_i^T \mathbf{1}_k - 1) \quad (6)$$

用上式对 W_i 求导并令其为 0,则

$$\frac{\partial L}{\partial W_i} = 2Z_i W_i + \lambda \mathbf{1}_k = 0 \Rightarrow W_i = \frac{Z_i^{-1} \cdot \mathbf{1}_k}{\mathbf{1}_k^T Z_i^{-1} \mathbf{1}_k} \quad (7)$$

其中, $Z_i \in R^{k \times k} = (x_i - x_{ij})^T (x_i - x_{ij})$, $W_i = (W_{i1}, W_{i2}, \dots, W_{ik})^T$, $\mathbf{1}_k$ 为 k 维全 1 列向量。

Step3 求得低维嵌入 Y 。

重构权重向量 W_{ij} 所描述的流形的局部几何结构,在降维后也是保持不变的。因此,利用上步求得的 W_{ij} 在低维空间内重构,使下面局部重建损失函数最小。

$$\begin{aligned}\min \epsilon(Y) &= \sum_{i=1}^N \sum_{l \in N(i)} \|Y_i(I_l^T - w_l^T)\|^2 \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{l \in N(i)} \text{Tr}(Y_i(I_l^T - w_l^T)(I_l^T - w_l^T)^T Y_i^T) \\ &= \sum_{i=1}^N \text{Tr}(Y_i \sum_{l \in N(i)} (I_l^T - w_l^T)(I_l^T - w_l^T)^T Y_i^T) \\ &= \sum_{i=1}^N \text{Tr}(Y_i(I - W_i)(I - W_i)^T Y_i^T) \\ &= \sum_{i=1}^N \text{Tr}(Y_i M_i Y_i^T) \\ &= \text{Tr}(YMY^T)\end{aligned}\quad (8)$$

为了限定低维数据均匀分布且避免产生退化解,对 Y 设置约束条件: $YY^T = NI$, 其中 I 为 N 维单位矩阵, $M = (I - W)(I - W)^T$ 。利用 Lagrange 乘子,并结合约束条件得:

$$L(Y) = YMY^T + \lambda(YY^T - NI) \quad (9)$$

用上式对 Y 求导并令其为 0, 则

$$\frac{\partial L(Y)}{\partial Y} = 2MY^T + 2\lambda Y^T = 0 \Rightarrow MY^T = \lambda Y^T \quad (10)$$

将 $MY^T = \lambda Y^T$ 等式两边同时左乘 Y , 则 $YMY^T = \lambda YY^T$, 又因为 $YY^T = NI$, 得到 $YMY^T = \lambda NI$, 要使 YMY^T 最小, 无非是要求 λ 最小。再者, $MY^T - \lambda Y^T = (M - \lambda I)Y^T = 0$, 由于 $Y^T \neq 0$, 因此 $|M - \lambda I| = |\lambda I - M| = 0$, M 最小 d 个 ($2 \sim d+1$) 非零特征值所对应特征向量为 $u_2, u_3, \dots, u_{d+1}$, 则 $Y = [u_2, u_3, \dots, u_{d+1}]^T$ 即为所求的低维嵌入。

5 实验结果及分析

5.1 手工流形实验

本实验采用的是经典的 Twin Peaks 和 Hemisphere 手工流形数据集,每一类流形的采样数据点个数均为 300, 近邻点 $k=12$, 利用相同颜色的点标识近邻状态。图 3、图 4 呈现了各种算法的二维嵌入结果。

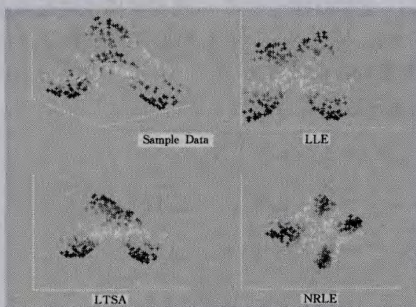


图 3 Twin Peaks 数据集的二维嵌入效果

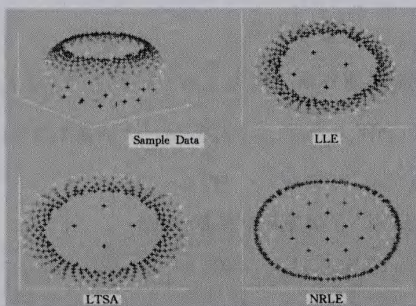


图 4 Hemisphere 数据集的二维嵌入效果

通过比较图 3、图 4 可以得出:在数据稀疏的情况下,经典的 LLE 和 LTSA 算法很难保持数据间潜在的低维结构,降维后的二维数据呈现出扭曲变形;而 NRLE 却能在原数据空间数据信息量少的条件下较好地保持数据间的相互关系。

5.2 图像检索应用

本实验利用 LLE、LTSA 和 NRLE 3 种算法对 Corel 数据库(共 1000 幅图像)进行图像检索,检索结果如图 5—图 7 所示。将计算出的图像的 HSV 空间颜色直方图作为原始特征向量,得到基于颜色的特征空间,用欧氏距离度量法来进行图像间的相似性度量。



图 5 LLE 的检索结果



图 6 LTSA 的检索结果



图 7 NRLE 的检索结果

这里采用查准率作为算法降维效果的评价标准。通过图 8 可以看出,在降到 10 维之前,LTSA 的查准率始终高于 LLE 和 NRLE,但是随着降维维数的提高,LTSA 的查准率呈下降趋势,而 LLE 和 NRLE 的查准率却在持续升高,并且 NRLE 的查准率一直高于 LLE 的查准率。结果显示,采用 NRLE 算法对降维后的图像进行检索保持了普遍较高的查准率。

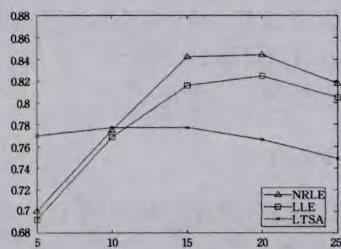


图 8 查准率

5.3 Frey 人脸表情 2D 可视化

Frey 人脸库中共 1960 幅人脸,每幅图像为 20×28 灰度

图片,该表情库由视频设备连续拍摄得到,包括一个人的各种表情如:吐舌、高兴和不高兴等,图9展示了部分人脸表情图片。本实验随机选取300幅人脸图像,邻域参数 $k=6$,通过LLE、LTSA及NLRA降至二维后的效果如图10—图12所示。



图9 部分Frey人脸表情图

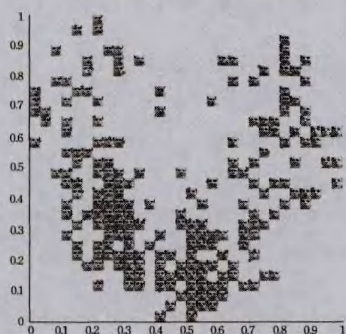


图10 利用LLE降维后的人脸表情库二维可视化效果

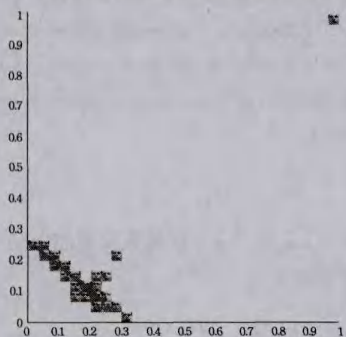


图11 利用LTSA降维后的人脸表情库二维可视化效果

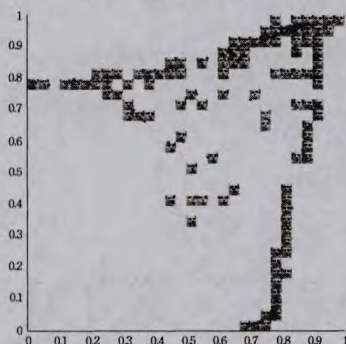


图12 利用NRLE降维后的人脸表情库二维可视化效果

从Frey人脸表情2D可视化的效果中可以得出,LLE不能很好地分清各类表情,使其杂乱分布于可视的二维空间中,LTSA则出现了严重的奇异现象,而本文算法NRLE能较清楚地分辨吐舌、高兴和不高兴等表情,得到了很好的可视化效果。

5.4 实验分析

从以上几个实验可以看出,虽然NRLE与LLE、LTSA

一样,都是基于局部的非线性降维方法,但NRLE在处理稀疏数据时降维效果却远优于LLE及LTSA,其主要原因是:

(1)NRLE是一种邻域竞争线性的降维方法,能够更好地挖掘数据集在高维空间中的局部信息。

(2)NRLE能在样本点稀疏的情况下,利用竞争模型对样本点的局部区域进行信息加强,从而达到重叠信息充足的流形学习效果。

(3)NRLE引入cam分布以确定近邻点的距离,增加了数据点间的权重信息,使得对稀疏数据集的样本点最近邻的选取不仅仅限制在一个方向,在低维重建时可以更好地展现高维数据潜在的本质结构。

经过以上3点优化,NRLE大大减小了降维过程中局部空间的误差,进而防止了低维拓扑空间的变形及扭曲,增加了稳定性。另外,NRLE在引入竞争模型和cam分布后,时间复杂度并没有增加,与LLE、LTSA的时间复杂度是一样的,都是 $O(pN^2)$, p 是稀疏矩阵中非零元和零元的比率, N 是样本点个数。

结束语 针对稀疏数据局部信息量不足的问题,NRLE算法利用数据的统计信息动态确定局部线性化范围,使重叠信息更丰富,从而加强了局部信息。同时针对LLE算法对稀疏数据在选取近邻点时容易造成信息选取方向缺失的问题,NRLE算法在局部近邻选取时引入了cam分布,加强了局部结构的刻画,从而优化了原始高维空间数据点在其邻域内的表示坐标。基于此,该算法能够更好地保持稀疏数据的拓扑结构,更具鲁棒性。

参考文献

- [1] Jolliffe I. Principal component analysis[M]. John Wiley & Sons, Ltd, 2005
- [2] Cox T, Cox M. Multidimensional Scaling [M]. Chapman & Hall, London, UK, 2000
- [3] Tenenbaum J B, De Silva V, Lagford J C. A global geometric framework for nonlinear dimensionality reduction[J]. Science, 2000, 290(5500): 2319-2323
- [4] Zhang Z, Zha H. Principal manifolds and nonlinear dimensionality reduction via tangent space alignment[J]. Journal of Shanghai University (English Edition), 2004, 8(4): 406-424
- [5] Roweis S T, Saul L K. Nonlinear dimensionality reduction by locally linear embedding[J]. Science, 2000, 290(5500): 2323-2326
- [6] Balasubramanian M, Schwartz E L. The ISOMAP algorithm and topological stability[J]. Science, 2002, 295(5552): 7
- [7] Silva J G, Marques J S, Lemos J M. Selecting Landmarks Points for Sparse Manifold Learning[C]// Advances in Neural Information Processing, 2006
- [8] Ye Qing-wei, Sun Yang. An Improved LLE Algorithm with Sparse Constraint[J]. Journal of Computational and Theoretical Nanoscience, 2013, 10(12): 2872-2876
- [9] Kong De-guang, Ding C. An iterative locally linear embedding algorithm[C]// Proceedings of the 29th International Conference on Machine Learning, Vol 2, 2012: 1647-1654
- [10] Yin Kai. Dimensionality reduction based on sparse representation classifier[J]. Journal of Computational Information Systems, 2012, 8(9): 3777-3783

(下转第295页)

好地消除裂缝的毛刺而不受裂缝的宽度影响。图9为测试数据中的3个不同类别图像A、B和C,大小都为 400×300 。将其放大4倍后得图像A'、B'和C'。通过表1得到的测试数据可以看出,设定的步长可以很好地消除细化算法产生的毛刺,保证细化后图像的骨架与原图架构一致。

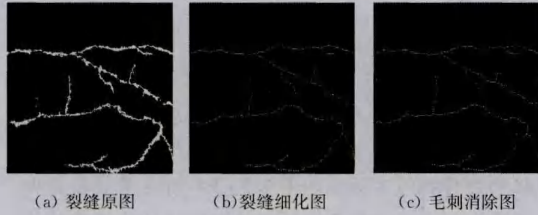


图8 图像毛刺消除效果

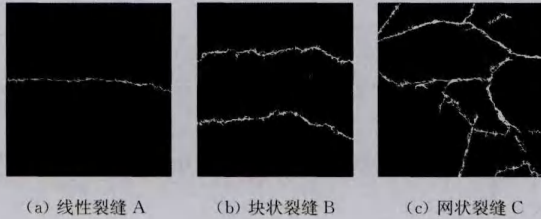


图9 实验测试图像

表1 毛刺消除数据分析

图像	细化迭代次数	步长	分支个数		
			原图	细化后骨架图	消除毛刺后骨架图
A	4	10	0	7	0
A'	11	27	0	22	0
B	5	13	0	9	0
B'	17	42	0	62	0
C	6	15	9	35	9
C'	21	51	9	101	9

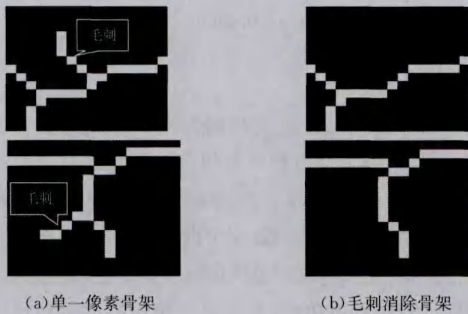


图10 局部毛刺消除效果

如图10所示,该算法在消除毛刺的同时,能够判定消除

遗留节点造成的突起点,保证最终骨架的单一像素宽度。另外,在同一节点引生出的两条分支,当分支长度都在毛刺判定的阈值范围内时,本文算法根据起始扫描方向来保留一条分支而不同时消除两条分支,保留骨架的真实长度。

结束语 本文利用8方向链码扫描跟踪原理,实现了细化图像的单一像素化。与现有的利用模板来消除多余像素点实现单一像素宽度相比,本方法能够很好地保持细化图像的连通性,不需要再进行断点的连接,适应性更强。针对细化毛刺的消除,本文提出以可能为毛刺的终端(分支端点)为起点,以方向链码编码来判断分支,确定并消除毛刺,该算法能够忽略两节点之间的分支,优化速度,提高效率。同时该算法不限定毛刺生长点(节点)引出的分支数及其在8邻域的分布情况。实验结果表明,利用本文算法对Zhang并行快速细化图像做后期处理,可以有效地实现单一像素宽度且无毛刺的目标骨架图像。

参考文献

- [1] 孙姜燕. 基于图像分析的桥梁下部结构裂缝检测算法研究[D]. 西安:西安电子科技大学,2011
- [2] 马鑫,魏鹏旭,岳康. 裂缝图像识别与特征参数算法的研究[J]. 工程技术,2011,(11):47-48
- [3] Bag Sou-men, Harit G. A Medial Axis Based Thinning Strategy And Structural Feature Extraction of Character Images[C]// Proceedings of 2010 IEEE 17th International Conference on Image Processing. 2010:26-19
- [4] Padole G V, Pokle S B. New Iterative Algorithms For Thinning Binary Images[C]// Third International Conference on Emerging Trends in Engineering and Technology. 2010:166-171
- [5] 陈艳君. 基于特征空间的路面裂缝检测与识别算法研究[D]. 武汉:武汉工程大学,2012
- [6] 王龙云. 路面裂缝检测算法研究[D]. 南京:南京邮电大学,2012
- [7] Zhang T Y, Suen C Y. A Fast Parallel Algorithm for Thinning Digital Patterns[J]. Image Processing and Computer Vision, 1984, 27(3):236-239
- [8] 宁亚辉,雷小奇,王功孝,等. 改进的基于模板消除骨架毛刺的方法[J]. 计算机应用,2011,31(1):58-63
- [9] 郭斯羽,董红霞,张翌. 一种用于植物叶片图像骨架提取的去毛刺方法[J]. 电子测量与仪器学报,2013,27(1):52-56
- [10] 王要峰,崔艳. 基于方向链码消除骨架图像毛刺算法[J]. 计算机应用,2013,33(1):193-194
- [11] 祝强,徐臻. 采用小波构造的图像阈值去噪算法[J]. 重庆理工大学学报,2013,27(6):61-67

(上接第259页)

- [11] Nguyen, Hien V. Sparse embedding: A framework for sparsity promoting dimensionality reduction[J]. Lecture Notes in Computer Science, 2012, 7577(6):414-427
- [12] 冷亦琴,张莉,杨季文. 一种基于局部稀疏线性嵌入的降维方法及其应用[J]. 南京大学学报,2013,49(4):403-410
- [13] Sun Yang, Ye Qing-wei, Wang Xiao-dong, et al. Improved LLE

Algorithm Based on Sparse Constraint[J]. Computer Engineering, 2013, 39(5):53-56, 60

- [14] 陈才扣,喻以明,史俊. 一种快速的基于稀疏表示分类器[J]. 南京大学学报,2012,48(1):71-76
- [15] Pan Y, Ge S S, Mamun A A. Weighted Locally Linear Embedding for Dimension Reduction[J]. Pattern Recognition, 2009, 42(5):798-811