

一种随机采样的特征保持的网格简化算法

赵 晔 周 畅 王 昌

(西北大学数学系 西安 710069) (西安工业大学数理系 西安 710032)

(西安邮电大学数学系 西安 710025)

摘 要 提出了一种局部几何特征驱动的随机采样的网格简化算法。该算法首先计算模型中每个三角形的局部几何特征值,根据定义的概率分布函数随机确定每个三角形被选择的概率。然后对选择出的三角形进行三角形折叠,根据折叠前后网格体积变化最小这一准则来确定新生成的顶点的位置。实验证明该算法不仅能使简化前后的模型的体积变化较小,还能有效地保持模型的细节特征。

关键词 概率分布函数,几何特征,三角形折叠,网格简化

中图法分类号 TP391

文献标识码 A

Feature Preserved Mesh Simplification Algorithm Based on Stochastic Sampling

ZHAO Ye ZHOU Chang WANG Chang

(Department of Mathematics, Northwest University, Xi'an 710069, China)

(Department of Mathematics and Physics, Xi'an Technological University, Xi'an 710032, China)

(Department of Mathematics, Xi'an University of Posts and Telecommunications, Xi'an 710025, China)

Abstract This paper presented a new mesh simplification algorithm based on stochastic sampling driving by local geometric feature. First, local geometric feature value of each triangle was computed and the selection probability of the triangle was acquired according to the probability distribution function. Then, the selection triangles were collapsed and new vertices were generated by minimization volume change between the original mesh and the simplify mesh. The experiment results show that mesh models are simplified and the volume is kept while the detail feature is preserved.

Keywords Probability distribution function, Geometric feature, Triangle collapse, Mmesh simplification

1 引言

三角网格模型由于数学表示简单,通用性、灵活性较好而成为三维空间信息表示的事实上的标准。随着现代测量技术的不断发展,人们很容易获得现实世界物体的三角网格模型。当物体外形比较复杂时,往往需要数以万计、甚至上百万的三角面片才能生动而翔实地刻画物体的细节特征。这对计算机的存储容量、处理速度、绘制速度、传输效率等都提出了很高的要求。然而高度细节的网格模型并不是经常需要,因此特征保持的网格模型简化显得尤为重要。

网格简化是三维模型的数字几何处理中的一种基本操作。其实质是用尽可能少的三角片对原始模型进行表示,但又尽量逼近原始网格,并且在简化的过程中尽可能保持模型原有的形状特征。对三角网格模型简化的研究很多,其中Garland于1997年提出的基于二次误差度量的边折叠网格简化算法^[1]是一种被普遍认同的网格简化算法。该算法定义顶点简化的误差度量为顶点到其邻域三角片所在平面的距离的平方和。该算法简化速度快且简化后生成的网格质量好。但正是由于该度量使得每个顶点都需要存储一个 4×4 的误差矩阵,因此算法的存储量较大。该算法也没有考虑网格自身

的其他几何特性,所以产生的简化网格往往是比较均匀的,在低分辨率的情况下会丢失网格的几何特征。刘晓利^[2]等简单地引入了顶点的尖锐特征度,在Garland算法的误差矩阵中加入特征项以使简化网格能保留细节特征,但是尖锐特征度的取法过于简单,没有直接使用顶点的曲率信息,而且阈值和惩罚系数需要预先根据经验确定。陈伟海^[3]等将顶点曲率和边长引入Garland算法的误差矩阵中,使得具有明显几何特征的区域内的顶点付出较高的简化代价。文献^[4]采用离散曲率范数作为误差估计,虽然能保留网格的细节特征,但是该算法因为计算离散曲率范数耗时较大而效率低下。文献^[5]使用顶点邻域内的顶点的平均曲率作高斯权值的加权平均来确定该顶点的视觉突出度,并将视觉突出度高的顶点的误差矩阵放大,从而保留了网格的视觉特征区域,但该算法效率较低。周元峰等^[6]提出了一种基于体积平方度量的三角形折叠网格简化算法。该算法通过极小化误差目标函数得到与Garland类似的误差矩阵,并使用特征约束因子和高斯曲率来约束网格简化从而达到特征保持的网格简化效果。计忠平^[7]等以局部体积为简化代价,提出了一种基于半边折叠的网格简化算法,该算法无需计算顶点的误差矩阵,因而效率更高。文献^[8]使用顶点邻域法向量变化作为顶点的折叠代价,通过

半边折叠的方式对网格进行简化。该算法存储量较 Garland 算法小,运行效率也比较高,但细节特征保持效果不好。本文以局部几何特征来驱动网格模型中的三角形的随机采样。对每个采样的三角形采用体积平方度量的三角形折叠进行简化,从而使本文算法不仅具有较快的计算速度,还能有效保持模型的特征。

2 三角形的随机选择

选择 k 个最不重要的三角形进行折叠简化可以有效去除网格中的冗余信息。不重要的三角形意味着该三角形对应的几何重要性的特征值比较小。根据这样的值可以对网格模型中所有的三角形进行排序。为了避免非线性的复杂度,本文采用基于概率分布函数的随机采样^[9]来选择待折叠的三角形。

设 $P(x) \in [0,1]$ 是概率分布函数。该函数定义了变量 x 在随机采样中出现的概率。对网格中的每一个三角形指定一个特征值 $x^T \in [0,1]$,然后根据所有的特征值,为每个三角形生成一个统一的连续的随机变量 r 。当 $r < P(x^T)$ 时,该三角形被采样。

显然,选择的三角形的几何分布依赖函数 $P(x)$ 和特征值 x^T 的计算。若 $P(x)$ 是常量函数,则该函数提供了网格模型中三角形的完全随机采样。若 $P(x)$ 是关于特征值的变量函数,则可以利用特征值来驱动随机采样。三角形的法矢信息相对于几何误差能更好地描述视觉特征^[10],本文根据三角形的一阶邻接三角形的法矢信息来描述网格中的三角形的局部几何特征。特征值 x^T 的计算如下:

$$x^T = \frac{\sum_{u \in N_{x_T}} (1 - n_{x_T} n_u / 2)}{\text{Num}(N_{x_T})} \quad (1)$$

式中, N_{x_T} 表示三角形的一阶邻接三角形的集合。在高曲率区域三角形通过该特征值计算方法会产生较高的特征值。因此该特征值能反映网格模型的局部几何特征。但该特征值不能精确地反映大尺度下的局部几何特征变化,即使用该特征值进行采样会导致小曲率变化的大尺度弯曲的区域采样率较低。虽然使用曲率信息能解决这个问题,但会显著降低算法的效率,本文通过修改概率分布函数来解决这一问题。该函数定义如下:

$$P(x) = 1 - k(1 + \alpha(\frac{x}{\{x^T\}} - 1)) \quad (2)$$

式中,自适应参数 $\alpha \in [0,1]$,可根据测量设备输出网格的分辨率经验地确定。 k 是随机选出的三角形的数量与网格模型总的三角形数量之比。 $\{x^T\}$ 是网格模型中所有三角形的特征值的代数平均。根据式(2)可知,特征值越高的三角形被采样的概率越低,因此本文算法在网格的简化过程中能有效保持特征。

3 三角形折叠的网格简化

本文的网格简化是基于体积度量的。这里的体积是指在三角形折叠的网格简化时,三角形折叠后产生的新网格和初始的三角形网格相比所产生的体积变化。网格简化算法应该在简化过程中尽可能地保持体积变化较小以使得简化模型尽可能逼近原始模型。三角形折叠简化操作即为删除一个三角形,用一个引起其体积变化最小的顶点替代,新顶点与删除三角形的邻接三角形的顶点重新三角化就得到新网格。如

图1所示, $\Delta v_0 v_1 v_2$ 折叠为顶点 v' 。

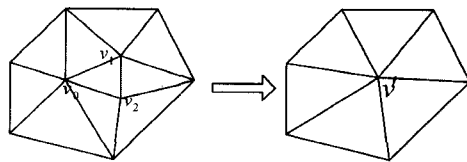


图1 三角形折叠操作

新的三角网格和原网格体积变化定义为一些四面体体积之和。四面体的底面即为被删除三角形和与其邻接的三角形,把被删除的三角形及其邻接三角形所在的区域称为折叠区域。如图2所示,待删除的三角形为 $\Delta v_0 v_1 v_2$,其一阶邻接三角形分别为 $\Delta v_2 v_3 v_4$, $\Delta v_1 v_2 v_4$, $\Delta v_1 v_4 v_5$, $\Delta v_0 v_5 v_6$, $\Delta v_0 v_6 v_7$, $\Delta v_0 v_7 v_2$, $\Delta v_1 v_3 v_2$,生成的新顶点为 v' 。在图2中,删除 $\Delta v_0 v_1 v_2$ 后引起的体积变化为以 v' 为顶点、以这9个三角形为底面的四面体体积之和。

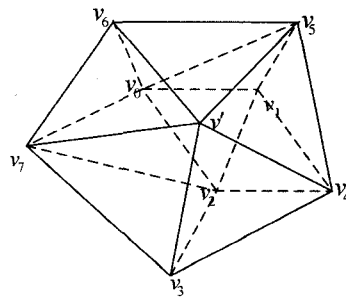


图2 三角形删除导致的体积变化

设简化过程中折叠区域中的一个三角形 T 的面积为 S ,新生成的顶点 v' 的坐标为 $(x', y', z', 1)$ 。由 T 和 v' 构成的三棱锥的体积为 V 。如图2所示,设 T 所在的平面方程为 $Ax + By + Cz + D = 0$,且 $A^2 + B^2 + C^2 = 1$ 。设 $p = (A, B, C, D)$,则:

$$V = \frac{1}{3} (v' \cdot p^T) \cdot S \quad (3)$$

这是带符号的体积计算公式。如果在简化后,网格模型中一部分的符号体积为正,一部分的符号体积为负,虽然网格模型发生了体积变化,但正负体积之和却可能为零,无法对网格模型的体积变化做有效的度量。本文采用文献[6]的平方体积累加变化作为误差度量标准。删除一个三角形引起的总的平方体积误差可表示为:

$$\sum_{i=1}^n V_i^2 = \sum_{i=1}^n \frac{1}{9} (v' \cdot p_i^T p_i \cdot v'^T) \cdot S_i^2 \quad (4)$$

式中, n 为折叠区域中的三角形数量。将式(4)作为误差度量函数,新顶点应使该式的值最小,即通过对该式求导可确定新顶点的坐标,该推导过程与 Garland 的经典 QEM^[1] 算法类似,在此不再重复,仅仅给出 v' 最终的求解结果。本文为网格模型中随机采样出来的三角形定义误差矩阵 Q_i 。

$$Q_i = \frac{1}{9} S_i^2 \cdot p^T p = \frac{1}{9} S_i^2 \begin{bmatrix} A^2 & AB & AC & AD \\ AB & B^2 & BC & BD \\ AC & BC & C^2 & CD \\ AD & BD & CD & D^2 \end{bmatrix} \quad (5)$$

三角形被折叠后的折叠误差矩阵为三角形本身及其邻接三角形的误差矩阵的和,即 $\bar{Q} = \sum_{i=1}^n Q_i$,其中 i 包括该三角形自身及其一阶邻接三角形。 v' 的求解如下:

$$v' = \begin{bmatrix} \bar{q}_{11} & \bar{q}_{12} & \bar{q}_{13} & \bar{q}_{14} \\ \bar{q}_{21} & \bar{q}_{22} & \bar{q}_{23} & \bar{q}_{24} \\ \bar{q}_{31} & \bar{q}_{32} & \bar{q}_{33} & \bar{q}_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

式中, $\bar{q}_{ij} \in \bar{Q}$ 。由于本文的三角形随机采样是以三角形的局部几何特征驱动的, 优先折叠的三角形都是特征不够突出的三角形, 因此采用该方法不仅能有效保持模型的体积, 还能有效保持模型的细节特征。

4 算法流程

网格简化算法流程主要分为特征驱动的待删除三角形的随机选择和最小体积平方度量的三角形折叠两个部分。在随机选择待简化的三角形过程中, 需要计算每个三角形的局部几何特征值, 并根据概率分布函数和用户期待的简化数量确定出待删除的三角形。在三角形折叠过程中, 对每个待折叠的三角形, 利用删除前后网格体积变化最小的方式求解新生成的顶点的位置。具体流程如下:

Step1 根据三角形的一阶邻接三角形的法矢量, 按照式(1)计算其局部几何特征值, 并根据式(2)计算该三角形被选择的概率。

Step2 按照三角形被选择的概率值, 选出其中 k 个概率最高的三角形进行三角形折叠操作。

Step3 对每一个待删除的三角形, 根据其一阶邻接三角形(包括其自身)计算误差矩阵, 根据式(5)求出新生成的顶点位置。若该式无解, 则新生成的顶点为该三角形的重心。更新新生成三角形的局部几何特征信息。

Step4 重复 Step2, Step3, 直至达到用户设定的简化模型的三角形数量。

Step5 输出简化模型。

5 实验结果

在 VC++6.0 的环境下实现了算法, 在主频 2.8G, 内存 1024M 的 PC 机上运行程序, 且采用 VTK (Visualization Toolkit 是美国 Kitware 公司开发的一套免费的 C++ 类库, 是一个面向对象的可视化类库) 显示原始模型及其简化结果。图 3(a) 是包含 19900 个三角面片的圆锥模型, 图 3(b) 是本文算法简化模型至 4974 个面片时的效果图, 图 3(c) 是本文算法简化模型至 1243 个三角面片时的效果图。图 4(a) 是含有 10548 个三角面片的尾椎骨模型, 图 4(b) 是本文算法简化模型至 2636 个面片时的效果图, 图 4(c) 是本文算法简化模型至 1318 个面片时的效果图。为了验证本文简化算法具有较好的体积保持能力, 计算了简化模型和原始模型的空间包围盒。表 1 中的包围盒的长、宽、高、体积数据和简化效果图显示, 即使在简化程度较大时, 本文算法仍然能较好地保持模型的体积和特征。

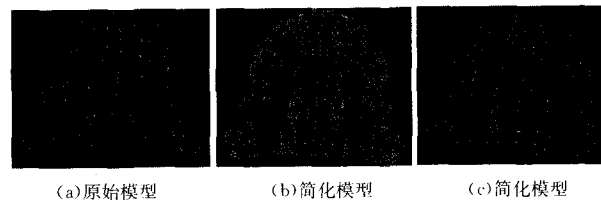


图 4 尾椎骨模型的简化

表 1 模型及其简化模型的空间包围盒

模型	包围盒长、宽、高(mm)	包围盒体积(mm ³)
圆锥模型		
原始模型	1.999013, 1.999013, 1.000000	3.996055
简化模型 (图 a)	1.999006, 1.999006, 0.999995	3.996005
简化模型 (图 b)	1.998976, 1.998977, 1.000080	3.996227
尾椎骨模型		
原始模型	119.48456, 244.87450, 290.88490	8510920.32178
简化模型 (图 a)	119.62994, 244.57978, 290.94018	8512637.88650
简化模型 (图 b)	120.01942, 244.38682, 291.18676	8540846.76974

结束语 本文提出了一种几何特征驱动的三角形随机采样的特征保持的网格简化算法。该算法利用定义的概率分布函数和每个三角形的局部几何特征值首先检测出三角网格模型中特征不够明显的三角形, 再利用最小体积变化的三角形折叠对网格进行简化并更新三角形的局部特征信息。最终得到用户所期分辨率的简化网格模型。实验证明本文算法不仅能使简化模型与原始模型具有较小的体积差异, 还能有效地保持模型特征。进一步的研究工作是如何与网格优化相结合, 在网格简化的同时得到全局优化的三角网格模型。

参考文献

- [1] Garland M, Heckbert P S. Surface simplification using quadric error metrics[C]//SIGGRAPH1999. Los Angeles, 1997
- [2] 刘晓利, 刘则毅, 高彭东, 等. 基于尖特征度的边折叠简化算法[J]. 软件学报, 2005, 16(5): 669-675
- [3] 陈伟海, 徐鲤鸿, 刘敬猛, 等. 网格简化中基于特征矩阵的二次误差测度算法[J]. 北京航空航天大学学报, 2009, 34(5): 572-576
- [4] Kim S J. Surface simplification using a discrete curvature norm[J]. Computer Graphics, 2002, 26(5): 657-663
- [5] Lee C H, Varshney A, Jacobs D W. Mesh Saliency [J]. ACM Transaction on Graph, 2005, 24(3): 659-666
- [6] 周元峰, 张彩明, 贺平. 体积平方度量下的特征保持网格简化方法[J]. 计算机学报, 2009, 32(2): 203-212
- [7] 计忠平, 刘利刚, 王国瑾. 基于割角的保持特征网格简化算法[J]. 计算机研究与发展, 2006, 43(12): 2144-2151
- [8] Hussain M. Fast decimation of polygonal models [C]//Proc. IS-VC. 2008: 119-128
- [9] Cook P-L, Halstead J, Planck M, et al. Stochastic simplification of aggregate detail[J]. ACM Transactions on Graphics, 2007, 26(3): 791-798
- [10] Sterner C-D, Alliez P, Desbrun M. Variational shape approximation[C]//Proceeding of ACM SIGGRAPH. 2004: 905-914



图 3 圆锥模型的简化