具有不确定收益的新的投资组合优化模型的研究

刘建军

（德州学院计算机系　德州 253023）

摘　要　解决了具有不确定收益的投资组合问题。从一个新的视角给出了不确定投资组合的风险定义，在此基础上，提出了新的投资组合优化模型，并设计出新的混合智能算法来解决这一新的优化问题。在新的算法中，99方法被用来计算期望值和机会值，与之前的算法相比，大大减少了计算的工作量，加快了求解过程。最后，提出一个数值例子来验证新的优化模型和所提算法的可行性和正确性。

关键词　投资组合，风险，不确定分布，99方法，混合智能算法，优化模型

中图法分类号　TP391，O230　　　**文献标识码**　A

Research on New Optimal Portfolio Selection Model with Uncertain Returns

LIU Jian-jun

(Department of Computer, Dezhou University, Dezhou 253023, China)

Abstract　This paper solved the portfolio selection problem whose security returns with uncertainty. Utilizing a new perspective, this paper gave a new definition of risk for uncertain portfolio selection. A new optimal portfolio selection model was proposed based on this new definition of risk. A new hybrid intelligent algorithm was designed for solving the new optimization problem. In the proposed new algorithm, 99 method was employed to calculate the expected value and the chance value. It greatly reduces the computational work and speeds up the process of solution compared with hybrid simulation used in our previous algorithm. A numerical example was also presented to illustrate feasibility and validity of the new modeling idea and the proposed new algorithm.

Keywords　Portfolio selection, Risk, Uncertainty distribution, 99 method, Hybrid intelligent algorithm, Optimal model

1　引言

投资组合理论自1952年由Markowitz[2]提出以来有了很大的发展，传统的研究是假定过去的业绩能够比较准确地反映未来的安全收益，一般用随机变量来表示。假定收益是随机的，风险主要有以下3种方式的数学定义：方差是最早的也是被大家广为接受的投资组合的风险定义，最初是由Markowitz提出的[2]；半方差是风险定义的第二种类型，也是由Markowitz提出的[3]，半方差只是度量期望值下方的投资收益，因此它是方差的改进，许多研究者建立模型来最小化不同情况下的半方差[3-9,27]；第三种比较流行的定义是损失的可能性定义，如何使投资损失最小，许多人对此进行了研究[10,19]。

由于投资市场非常复杂，在许多情况下，安全收益不能通过历史数据精确预测，具有模糊性和不确定性。许多研究者利用模糊集理论来解决这个问题[11,12]，即假定收益是模糊的，在推导均值-方差模型上做了大量的工作[13-16,22,23]。特别地，黄在可信性理论的基础上度量投资组合风险和收益的方差和均值，并提出了两个新的均值方差模型[17]。为了推断投资组合损失的可能性，黄还提出了模糊机会约束投资组合模型[18]。

现实生活中的决策具有很大程度的主观不确定性。为了处理这种主观不确定性，刘宝碇教授于2007年创立了数学的一个分支——不确定理论[1]。之后不确定理论被广泛应用于科学和工程中，解决了许许多多的问题。

在投资组合问题中，虽然随机和模糊优化模型给投资者处理不确定问题提供了有用的方法，但是许多情况下用随机和模糊双重不确定变量来描述显得过于复杂[21]。因此本文将从新的角度来讨论不确定环境下的投资组合风险定义，给出具有不确定收益的新的投资组合风险定义，在此基础上提出新的投资组合优化模型，并将遗传算法和99方法相结合，提出新的混合智能算法，求解该模型。

2　预备知识

2.1　不确定理论的有关知识[1]

定义1　假设Γ为非空集合，L是Γ上的σ-代数。每一个元素$\Lambda \in L$被称为一个事件，而$M\{\Lambda\}$表示Λ发生的机会。如果$M\{\Lambda\}$满足以下4条公理，则称为不确定测度。

到稿日期：2010-06-15　返修日期：2010-10-17　本文受山东省自然科学基金不确定环境下的车辆路径优化模型及应用(R2010BL009)，山东省科技攻关项目模糊随机环境下的集约生产计划模型及智能求解算法(2009GG20001029)，山东省软科学项目不确定环境下环境监管动态博弈均衡策略研究(2010RKGA2066)资助。

刘建军(1971－)，女，硕士，副教授，主要研究方向为不确定理论、计算智能，E-mail：ljj@dzu.edu.cn。

1)(规范性)$M\{\Gamma\}=1$;2)(单调性)如果 $\Lambda_1\subset\Lambda_2$,那么 $M\{\Lambda_1\}\leqslant M\{\Lambda_2\}$;3)(自对偶性)对于任意事件 Λ 都有 $M\{\Lambda\}+M\{\Lambda^c\}=1$,记 A^c 为 A 的对立集合;4)(可列可加性)对任意可列的事件序列$\{\Lambda_i\}$,都有 $M\{\bigcup_{i=1}^{\infty}\Lambda_i\}\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}M\{\Lambda_i\}$。

定义 2 假设 Γ 为非空集合,L 是 Γ 上的 σ-代数,M 是不确定测度,则三元式(Γ,L,M)称为不确定空间。

定义 3 一个不确定变量 ξ 是从不确定空间(Γ,L,M)到实数集的可测函数。即对任意实数的 *Borel* 集 B,集合$\{\xi\in B\}=\{\gamma\in\Gamma|\xi(\gamma)\in B\}$是一个事件。

定义 4 对于任何实数 x,不确定变量 ξ 的不确定分布 ϕ 可以定义为

$$\phi(x)=M(\xi\leqslant x\} \quad (1)$$

定理 1 设 ξ 是服从不确定分布 ϕ 的不确定变量,f 是一个严格递增函数,那么 $f(\xi)$是具有如下逆不确定分布的不确定变量。

$$\psi^{-1}(\alpha)=f(\phi^{-1}(\alpha)) \quad (2)$$

例 1 一个不确定变量 ξ 是线形的,如果服从如下不确定分布 $L(a,b)$,其中 $a<b$,分布函数图如图 1 所示。

$$\phi(x)=\begin{cases}0, & \text{if } x\leqslant a\\ (x-a)/(b-a), & \text{if } a\leqslant x\leqslant b\\ 1, & \text{if } x>b\end{cases} \quad (3)$$

线形不确定变量 $L(a,b)$的逆分布为

$$\phi^{-1}(\alpha)=(1-\alpha)a+\alpha b \quad (4)$$

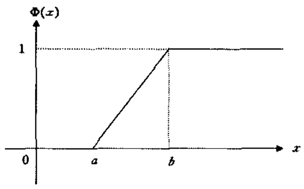

图 1 线形不确定分布图

例 2 一个不确定变量 ξ 是之字形的,如果服从如下不确定分布 $Z(a,b,c)$,其中 $a<b<c$,分布函数图如图 2 所示。

$$\phi(x)=\begin{cases}0, & \text{if } x\leqslant a\\ (x-a)/2(b-a), & \text{if } a\leqslant x\leqslant b\\ (x+c-2b)/2(c-b), & \text{if } b\leqslant x\leqslant c\\ 1, & \text{if } x\geqslant c\end{cases} \quad (5)$$

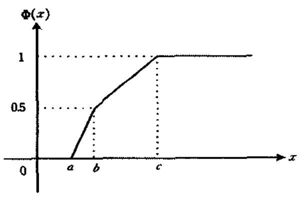

图 2 之字形不确定分布图

之字形不确定变量 $Z(a,b,c)$的逆分布为

$$\phi^{-1}(\alpha)=\begin{cases}(1-2\alpha)a+2\alpha b, & 当\ \alpha<0.5\\ (2-2\alpha)b+(2\alpha-1)c, & 当\ \alpha\geqslant 0.5\end{cases} \quad (6)$$

例 3 一个不确定变量 ξ 是正态的,如果服从如下不确定分布 $N(e,\sigma)$,其中 e 和 σ 是实数且 $\sigma>0$,分布函数图如图 3 所示。

$$\phi(x)=(1+\exp(\frac{\pi(e-x)}{\sqrt{3}\sigma}))^{-1},x\in R \quad (7)$$

正态不确定变量 $N(e,\sigma)$的逆分布为

$$\phi^{-1}(\alpha)=e+\frac{\sigma\sqrt{3}}{\pi}\ln\frac{\alpha}{1-\alpha} \quad (8)$$

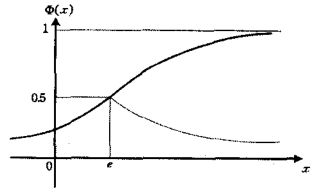

图 3 正态不确定分布图

定义 5 假设 ξ 是不确定变量,那么 ξ 的期望值定义为

$$E(\xi)=\int_0^{+\infty}M\{\xi\geqslant r\}\mathrm{d}r-\int_{-\infty}^{0}M\{\xi\leqslant r\}\mathrm{d}r \quad (9)$$

式中,两个积分至少有一个是有限的。

定理 2 设 ξ 是服从不确定分布 ϕ 的不确定变量,如果其期望值存在,则

$$E(\xi)=\int_0^1\phi^{-1}(\alpha)\mathrm{d}\alpha \quad (10)$$

定理 3 设 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 是具有不确定分布 $\phi_1,\phi_2,\cdots,\phi_n$ 的不确定变量,f 是一个严格递增函数,那么 $\xi=f(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$是一个具有如下逆不确定分布的不确定变量。

$$\psi^{-1}(\alpha)=f(\phi_1^{-1}(\alpha),\phi_2^{-1}(\alpha),\cdots,\phi_n^{-1}(\alpha)) \quad (11)$$

99 方法 假设一个不确定变量 ξ 服从不确定分布 ϕ 可以用 99 表表示,其中第一行的 0.01,0.02,0.03,…,0.99 是不确定分布 ϕ 的值,而第二行的 $x_1,x_2,x_3,\cdots,x_{99}$ 对应的是 $\phi^{-1}(0.01),\phi^{-1}(0.02),\phi^{-1}(0.03),\cdots,\phi^{-1}(99)$的值。特别地,99 表是不确定分布 ϕ 的离散表示。对于任何一个严格单增函数 $f(x)$都有 99 表。

0.01	0.02	0.03	…	0.99
x_1	x_2	x_3	…	x_{99}

0.01	0.02	0.03	…	0.99
$f(x_1)$	$f(x_2)$	$f(x_3)$	…	$f(x_{99})$

2.2 传统的风险定义

在随机环境中有 3 种流行的风险定义:第一种风险的数学定义是投资组合的方差,最早是由 Markowitz[3] 提出的。Markowitz 将投资组合收益用均值来量化,风险用方差来量化。他用两种方式[2,3] 提出了他的均值-方差模型,即如果给出投资组合收益的期望值,风险的方差将被最小化;如果给出风险的方差,投资组合收益的期望值将被最大化。可以用以下数学公式来表示第一类投资组合风险定义。

$$V(\xi)=E[(\xi-e)^2]$$

式中,ξ 表示投资组合的收益,是一个随机变量,e 是期望值,V 表示方差运算,E 表示期望值运算。

第二种风险定义是半方差,也是由 Markowitz[2] 提出的。半方差只是度量期望值下方收益的可变性和期望值上方收益的不可变性,因此能比方差更好地迎合投资者的风险直觉。当收益分布不均匀时,均值-方差方法就会失效,这时均值-半方差将会导出最优决策。可以用以下数学公式来表示第二类投资组合风险定义:$SV(\xi)=E[[(\xi-e)^-]^2]$。其中 ξ 表示投资组合的收益,是一个随机变量;e 是期望值,SV 表示半方差运算,E 表示期望值运算。而

$$(\xi-e)^-=\begin{cases}\xi-e, & 当\ \xi\leqslant e\\ 0, & 当\ \xi>e\end{cases} \quad (12)$$

风险的第 3 种数学定义是投资组合损失的概率，这一定义从 Roy 阐明安全第一准则[19]后被广泛接受。Roy 通过度量投资价值降到预置的损失水平之下的机会来校准投资风险。换句话说，风险被描述成某一事件的机会，在该事件中，投资损失大于或等于预置的水平。Roy 的准则就是最小化这一事件发生的可能性。Roy 的投资组合风险定义可以用以下数学公式来表示：$\Pr\{(b-\xi)\leqslant r_0)\}$，其中 ξ 表示投资组合的收益，b 是预置的目标收益，r_0 是预置的可接受的损失水平。显而易见，$b-\xi$ 就是在投资组合中投资者的损失。

3 新的风险定义

投资的基本特征是投资者有损失同样也要有收益。有些投资者只对预置的损失状况敏感，他们把损失发生的机会低于投资者容忍水平的投资看作是安全的。另外的投资者考虑所有可能的不利情况，只有每一种不利状况发生的机会均低于投资者容忍水平的投资才是安全的。我们从后一种角度出发，根据不确定理论来定义风险。

定义 6 ξ 表示投资组合中的不确定收益，b 是目标收益，则曲线 $f(r)=M\{b-\xi\geqslant r\}$，$\forall r\in R$ 称为投资组合的投资风险曲线，r 表示损失的严重程度。

从上述定义可以看出，当 $r\geqslant 0$ 时，r 是目标收益和投资收益之差，可以理解为损失。当 $r<0$ 时，r 实际上意味着投资收益比预置的目标收益要高，可以看作是投资收益。然而，一个低的投资收益和高的投资收益相比较就是损失。因此指标 r 给出了投资损失的严重性水平，r 越大，损失$(b-\xi)$越严重。风险曲线 $f(r)$给出的不确定收益 ξ 小于目标收益 b 减去 r 的所有事件发生的机会。以前定义的投资只考虑一种预置的不利情况，而在这一定义中投资者可以考虑所有可能的不利情况。

从定义 1 可以得出，风险曲线 $f(r)$是关于 r 的减函数，r 值越大，$f(r)$的值越小。为了确定一个投资组合是否有风险，投资者必须首先确定他对损失发生的最大承受水平。通常损失越大，承受水平越低，可以用信心曲线 $\alpha(r)$来表示。显而易见，信心曲线下方是低风险区域，上方是投资者应避免的高风险区域。投资组合风险曲线在信心曲线下方，距离信心曲线越远，投资越安全。

下面给出了判定投资组合风险的新准则。

设 ξ 是投资组合 A 的不确定收益，$\alpha(r)$是投资者的信心曲线，若 $M\{(b-\xi)\geqslant r\}\leqslant\alpha(r)$，$\forall r\in R$，我们说投资组合 A 是安全的。其中 b 是目标收益，实数 r 表示任何可能的损失水平。

4 具有不确定收益的投资组合模型

我们可以根据新的风险定义来选择投资组合。用 ξ_i 表示第 i 项投资的收益，该项投资一年的收益可以定义为 $\xi_i=(p'_i+d_i-p_i)/p_i$，其中 p_i'表示第 i 项投资在未来一年预计的收盘价格，p_i 表示第 i 项投资当前的收盘价格，d_i 表示第 i 项投资在未来一年预计得到的红利[26]$(i=1,2,\cdots,n)$。这里假设 $\xi_i(i=1,2,\cdots,n)$是服从不确定分布 $\phi_i(i=1,2,\cdots,n)$的相互独立的不确定变量，则投资的总收益可以表示为 $f(\xi_i,\xi_2,\cdots,\xi_n)=\xi_1\omega_1+\xi_2\omega_2+\cdots+\xi_n\omega_n$，总收益 $f(\xi_i,\xi_2,\cdots,\xi_n)$是服从如下逆不确定分布的不确定变量

$$\psi^{-1}(\alpha)=\omega_1\phi_1^{-1}(\alpha)+\omega_2\phi_2^{-1}(\alpha)+\cdots+\omega_n\phi_n^{-1}(\alpha)$$

如果每一个 $\xi_i(i=1,2,\cdots,n)$都可以用 99 表 1 表示，则 $f(\xi_i,\xi_2,\cdots,\xi_n)$用 99 表 2 表示。

表 1 $\xi_i(i=1,2,\cdots,n)$的 99 表

α	0.01	0.02	0.03	…	0.99
x	x_1^i	x_2^i	x_3^i	…	x_{99}^i

表 2 $f(\xi_i,\xi_2,\cdots,\xi_n)$的 99 表

α	0.01	0.02	…	0.99
x	$\omega 1\,x_1^1+\omega 2\,x_1^2+\cdots+\omega n\,x_1^n$	$\omega 1\,x_2^1+\omega 2\,x_2^2+\cdots+\omega n\,x_2^n$	…	$\omega 1\,x_n^1+\omega 2\,x_n^2+\cdots+\omega n\,x_n^n$

用 r 表示投资损失的严重程度，$\alpha(r)$表示投资者的信心曲线。为了获得最大的投资收益，避免风险，投资者应在被认为是安全的投资中选择最优的投资组合。我们可以用各种投资的期望值来表示投资的收益，因此可以设置最大化投资组合期望收益的目标函数，要求风险曲线在信心曲线下方。设 b 是预置的收益目标，$\omega_i(i=1,2,\cdots,n)$是第 i 项投资在总投资中所占的比例，投资组合模型可以设置如下：

$$\begin{cases}\max E[\xi_1\omega_1+\xi_2\omega_2+\cdots\xi_n\omega_n]\\ \text{s. t:}M\{b-(\xi_1\omega_1+\xi_2\omega_2+\cdots\xi_n\omega_n)\geqslant r\}\leqslant\alpha(r),\ \forall r\in R\\ \omega_1+\omega_2+\cdots+\omega_n=1\\ \omega_i\geqslant 0,i=1,2,\cdots,n\end{cases}$$

5 混合智能算法

由于用传统的方法求上述模型的最优解是困难的，本文将遗传算法[20,24]与 99 不确定模拟方法[1]相结合，提出可以解决上述问题的新的混合智能算法，步骤如下：

步骤 1 初始产生 pop_size 个染色体，其可行性被 99 方法验证。

步骤 2 对染色体进行交叉操作，其后代的可行性被 99 方法验证。

步骤 3 对染色体进行变异操作，其后代的可行性被 99 方法验证。

步骤 4 通过 99 方法计算所有染色体的目标函数值。

步骤 5 根据目标函数值，计算每个染色体的适应度。

步骤 6 通过轮盘赌选择染色体。

步骤 7 重复步骤 2 至步骤 6，直到满足终止条件。

步骤 8 最好的染色体作为最优解。

6 数值例子

可以用一个数值例子来验证本文提出的投资组合模型和混合智能算法，该算法使用 C++实现。遗传算法设置的参数如下：交叉率 $P_c=0.3$，变异率 $P_m=0.2$，基于序的评价函数参数设为 0.05。求解时间大约需要 5s。

假设有 5 种具有不确定收益的投资，分别用 ξ_i，$(i=1,2,\cdots,5)$表示，假定它们都服从之字形不确定分布，$\xi_1\sim Z(0,0.4,0.8)$，$\xi_2\sim Z(0.3,0.5,0.7)$，$\xi_3\sim Z(0.1,0.5,0.9)$，$\xi_4\sim Z(0.2,0.4,0.6)$，$\xi_5\sim Z(0.2,0.6,1.0)$。

假设投资者给出他的信心曲线如下：

$$\alpha(r)=\begin{cases}\dfrac{0.1}{r^3+0.5r+0.1}, & r>0\\ 1, & 其他\end{cases}$$

投资者规定他的目标收益 $b=0.8$，根据本文第 5 节提出

的最优化思想，可以得到如下模型。

$$\begin{cases}\max E[\xi_1\omega_1+\xi_2\omega_2+\cdots\xi_5\omega_5] \\ \text{s. t}: M\{0.8-(\xi_1\omega_1+\xi_2\omega_2+\cdots+\xi_5\omega_5)\geqslant r\}\leqslant\alpha(r),\ \forall r\in R \\ \omega_1+\omega_2+\cdots+\omega_5=1 \\ \omega_i\geqslant 0, i=1,2,\cdots,5\end{cases}$$

混合智能算法最初产生 30 个染色体，经过 3000 代进化得到的结果如表 3 所列。投资者按表 3 所列的比例分配他的资金，能够在预定的安全阈值内得到最大的期望投资收益。其对应的最大的投资期望收益为 0.5597。

表 3　5 种投资资金的分配

投资种类	1	2	3	4	5
分配比例(%)	7.57	9.09	8.48	3.81	71.04

如果把目标收益 $b=0.8$ 改成 $b=0.5$，由于第 5 种投资的期望值是最高的，而表 3 所列投资组合的风险曲线 $f(r)$ 在信心曲线 $\alpha(r)$ 的下方，因此可以断定，表 3 所列的组合仍然是最优解。在计算机上的运行结果也证明了这一结论，这些都符合客观实际和我们预置的目标。

根据定理 2 我们可以计算出在 5 种投资中，第 5 种投资的期望值最高，为 0.6。而由表 3 可以看出，第 5 种投资的比例也是最高的。通过模拟还得到投资组合的风险曲线在投资者的信心曲线之下，如图 4 所示。

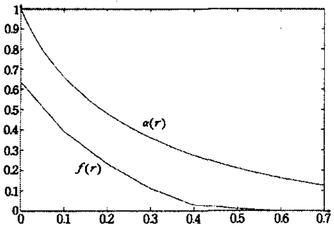

图 4　实例中风险曲线 $f(r)$ 和信心曲线 $\alpha(r)$

结束语　本文基于不确定理论提出了一种新的投资组合风险定义，在这一定义的基础上又提出了新的投资组合优化模型，构造了一个混合智能算法来解决上述优化问题。在算法中，99 方法用于计算期望值和不确定测度。与之前的混合智能算法相比，该算法大大降低了运算的复杂度，节省了运算时间。

参 考 文 献

[1] Liu B. Theory and Practice of Uncertain Programming(2nd ed)[M]. Berlin: Springer-Verlag, 2009

[2] Markowitz H. Portfolio selection[J]. Journal of Finance, 1952, 7: 77-91

[3] Markowitz H. Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments[M]. New York: Wiley, 1959

[4] Chow K, Denning K C. On variance and lower partial moment betas: the equivalence of systematic risk measures[J]. Journal of Business Finance and Accounting, 1994, 21: 231-241

[5] Choobineh F, Branting D. A simple approximation for semivariance[J]. European Journal of Operational Research, 1986, 27: 364-370

[6] Grootveld H, Hallerbach W. Variance vs downside risk: is there really that much difference? [J]. European Journal of Operational Research, 1999, 114: 304-319

[7] Homaifar G, Graddy D B. Variance and lower partial moment betas as alternative risk measures in cost of capital estimation: a defense of the CAPM beta[J]. Journal of Business Finance and Accounting, 1990, 17: 677-688

[8] Markowitz H. Computation of mean-semivariance efficient sets by the critical line algorithm[J]. Annals of Operational Research, 1993, 45: 307-317

[9] Rom B M, Ferguson K W. Post-modern portfolio theory comes of age[J]. Journal of Investing, 1994, 3: 11-17

[10] Elton E J, Gruber M J. Modern Portfolio Theory and Investment Analysis[M]. New York: John Wiley, 1995

[11] Zadeh L A. Fuzzy sets[J]. Information and Control, 1965, 8: 338-353

[12] Zadeh L A. Toward a generalized theory of uncertainty(GTU)-an outline[J]. Information Sciences, 2005, 172: 1-40

[13] Tanaka H, Guo P. Portfolio selection based on upper and lower exponential possibility distributions[J]. European Journal of Operational research, 1999, 114: 115-126

[14] Tanaka H, Guo P, Türksen I B. Portfolio selection based on fuzzy probabilities and possibility distributions[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2000, 111: 387-397

[15] Parra M A, Terol A B, Uri'a M V R. A fuzzy goal programming approach to portfolio selection[J]. European Journal of Operational Research, 2001, 133: 287-297

[16] Zhang W G, Nie Z K. On admissible efficient portfolio selection problem[J]. Applied Mathematics and Computation, 2004, 159: 357-371

[17] Huang X. Portfolio selection with fuzzy returns[J]. Journal of Intelligent and Fuzzy Systems(in press)

[18] Huang X. Fuzzy chance-constrained portfolio selection[J]. Applied Mathematics and Computation, 2006, 177: 500-507

[19] Roy A D. Safety first and the holding of assets[J]. Econometrics, 1952, 20: 431-449

[20] Holland J. Adaptation in Natural and Artificial Systems[M]. Ann Arbor: University of Michigan Press, 1975

[21] 秦学志，吴冲锋. 模糊随机风险偏好下的证券投资组合选择方法[J]. 管理科学学报，2003(4)：73-76

[22] 徐维军，徐寅峰，王迅，等. 收益率为模糊数的加权证券组合选择模型[J]. 系统工程学报，2005(1)：6-11

[23] 曾建华，汪寿阳. 一个基于模糊决策理论的投资组合模型[J]. 系统工程理论与实践，2003(1)：99-104

[24] 林丹，李小明，王萍. 用遗传算法求解改进的投资组合模型[J]. 系统工程，2005，23(8)：68-72

[25] 刘晓峰，陈通，张连营. 基于微粒群算法的最佳证券投资组合研究[J]. 系统管理学报，2008，17(2)：221-225

[26] Huang X. A new perspective for optimal portfolio selection with random fuzzy returns [J]. Information Science, 2007, 177: 5404-5414

[27] 潘东静. 半方差约束下的模糊随机收益率贷款组合优化模型[J]. 计算机科学，2010，37(5)：291-294

[28] 马国顺，魏建洲. 基于二维正态分布撕破上投资风险收益理论模型[J]. 重庆工学院学报：自然科学版，2008，22(10)：86-90