区间值(α,β)-模糊格蕴涵子代数

刘 熠[1,2] 徐 扬[2] 秦 亚[3]

(内江师范学院四川省高等学校数值仿真重点实验室 内江 641000)[1]

(西南交通大学智能控制开发中心 成都 610031)[2] (内江师范学院数学与信息科学学院 内江 641000)[3]

摘 要 把拟重合的思想应用到区间值模糊集上,引进了一种广义模糊格蕴涵子代数,即区间值(α,β)-模糊格蕴涵子代数。研究了区间值(α,β)-模糊格蕴涵子代数的性质,并研究了区间值(α,β)-模糊格蕴涵子代数与格蕴涵子代数的关系,最后得到了该类模糊子代数的等价刻画。

关键词 格蕴涵代数,区间值模糊集,模糊点,(α,β)-模糊子代数

中图法分类号 TP18 **文献标识码** A

Interval-valued (α,β)-*fuzzy Lattice Implication Subalgebras*

LIU Yi[1,2] XU Yang[2] QIN Ya[3]

(Key Laboratory of Numerical Simulation in Sichuan Provincial College, Neijiang Normal University, Neijiang 641000, China)[1]

(Intelligent Control Development Center, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031, China)[2]

(College of Mathematics and Information Science, Neijiang Normal University, Neijiang 641000, China)[3]

Abstract The idea of "quasi-coincidence" was applied on interval valued fuzzy sets, a new kind of fuzzy lattice implication subalgebras was proposed, called interval valued (α,β)-fuzzy lattice implication subalgebras. Some properties of this new fuzzy lattice implication algebra were investigated. The relations between (α,β)-fuzzy lattice implication subalgebra and lattice implication subalgebras were studied. Some equivalent characterization theorems of interval valued (α,β)-fuzzy lattice implication subalgebras were established.

Keywords Lattice implication algebra, Interval valued fuzzy sets, Fuzzy points, (α,β)-fuzzy subalgebras

1 引言

智能信息处理是人工智能研究的重要方向之一。确定性的信息处理是以经典二值逻辑为基础的。二值逻辑所刻画的人类思维活动是一种"是非"分明的思维活动,是一种将人类复杂的思维简单化了的模型。然而,随着人工智能及认知科学等研究的不断深入,人们应用经典的二值逻辑来刻画人的思维是不够的,这就促进了非经典逻辑的发展。非经典逻辑是对二值逻辑的推广,它已经成为用来处理模糊信息和不确定信息的有用的计算机科学工具。格值逻辑是一种重要的多值逻辑,也是多值逻辑一个非常活跃的研究方向。

为了给不确定性信息处理理论提供可靠的逻辑基础,徐扬[1]把格和蕴涵代数相结合,提出了格蕴涵代数。这一概念提出以后,许多学者[4-7]对格蕴涵代数的结构和性质以及基于格蕴涵代数的格值逻辑系统进行了深入的研究,已取得了丰硕的成果,主要集中在文献[2]。区间值模糊集作为模糊集的推广,由 Zadeh 1975 年提出。区间值模糊集提供了更加充足的不确定的描述。徐[3]提出了模糊格蕴涵子代数,研究了模糊格蕴涵代数的性质。Pu[9]提出了模糊点与一个模糊集拟重合的思想。这一新的模糊化思想也应用到了其他的代数结构[10,11]。本文作为上述工作的继续,将区间值模糊和模糊点与模糊集拟重合的思想应用到格蕴涵子代数上,提出了区间值(α,β)-模糊格蕴涵子代数,研究了其性质,同时研究了(α,β)-模糊格蕴涵子代数的等价刻画。

2 预备知识

本小节给出以下涉及到的格蕴涵代数的基本概念和性质。

定义 1[1] 设$(L;\vee,\wedge,',O,I)$是一个带有逆序对合的有余格,$\rightarrow$:$L\times L\rightarrow L$ 是一个映射,如果对于任意的 $x,y,z\in L$,

$(I_1)\ x\rightarrow(y\rightarrow z)=y\rightarrow(x\rightarrow z)$;

$(I_2)\ x\rightarrow x=I$;

$(I_3)\ x\rightarrow y=y'\rightarrow x'$;

(I_4)若 $x\rightarrow y=y\rightarrow x$,则 $x=y$;

$(I_5)\ (x\rightarrow y)\rightarrow y=(y\rightarrow x)\rightarrow x$;

$(l_1)\ (x\vee y)\rightarrow z=(x\rightarrow z)\wedge(y\rightarrow z)$;

$(l_2)\ (x\wedge y)\rightarrow z=(x\rightarrow z)\vee(y\rightarrow z)$

称 $\mathscr{L}=(L;\vee,\wedge,',\rightarrow,O,I)$为一格蕴涵代数。

在本文没有特别说明的情况下,$\mathscr{L}$总表示一格蕴涵代数。

到稿日期:2010-05-13 返修日期:2010-11-06 本文受国家自然科学基金(60875034),四川省教育厅青年基金(09ZB105)资助。

刘 熠(1979—),男,博士生,讲师,主要研究方向为智能信息处理,E-mail:liuyl@126.com;徐 扬(1956—),男,博士,教授,主要研究方向为智能信息处理。

定义 2[2] 设 $S\subseteq L$，S 称为 $\mathscr{L}$ 的一格蕴涵子代数，如果满足：

(1) $(S,\vee,\wedge,')$ 是 $(L;\vee,\wedge)$ 的带有逆序对合$'$有界子格；

(2) 若 $x,y\in S$，则 $x\to y\in S$。

定理 1[2] 设 $S\subseteq L$，如果 S 满足：

(1) $O\in S$；

(2) 若 $x,y\in S$，则 $x\to y\in S$；

则 S 为 $\mathscr{L}$ 的格蕴涵子代数。

定义 3[3] 设 μ 是 $\mathscr{L}$ 的非空模糊子集，称 μ 是 $\mathscr{L}$ 的一个模糊子格蕴涵代数，如果

(1) $\mu(O)=\mu(I)$；

(2) $\forall x,y\in L,\mu(x\to y)\geqslant\min\{\mu(x),\mu(y)\}$。

注：在(2)中，令 $x=y=O$，故有 $\mu(I)\geqslant\mu(O)$。因此在模糊格蕴涵子代数的定义中条件(1)可以改为 $\mu(I)\leqslant\mu(O)$。

记 $\tilde{a}$ 为区间 $[a^-,a^+]$，其中 $0\leqslant a^-\leqslant a^+\leqslant 1$。所有的区间的集合记为 $D[0,1]$，区间 $[a,a]$ 表数 $a\in[0,1]$。对任意区间数 $\tilde{a}_i=[\tilde{a}_i^-,\tilde{a}_i^+]$，$\tilde{b}_i=[\tilde{b}_i^-,\tilde{b}_i^+]$，$i\in I$，其中 I 是指标集，定义：

$\max\{\tilde{a}_i,\tilde{b}_i\}=[\max\{\tilde{a}_i^-,\tilde{b}_i^-\},\max\{\tilde{a}_i^+,\tilde{b}_i^+\}]$；

$\min\{\tilde{a}_i,\tilde{b}_i\}=[\min\{\tilde{a}_i^-,\tilde{b}_i^-\},\min\{\tilde{a}_i^+,\tilde{b}_i^+\}]$；

$\tilde{a}_1\leqslant\tilde{a}_2\Leftrightarrow\tilde{a}_1^-\leqslant\tilde{a}_2^-$ 且 $\tilde{a}_1^+\leqslant\tilde{a}_2^+$；

$\tilde{a}_1=\tilde{a}_2\Leftrightarrow\tilde{a}_1^-=\tilde{a}_2^-$ 且 $\tilde{a}_1^+<\tilde{a}_2^+$；

$\tilde{a}_1<\tilde{a}_2\Leftrightarrow\tilde{a}_1^-<\tilde{a}_2^-$ 且 $\tilde{a}_1^+<\tilde{a}_2^+$；

$k\tilde{a}_1=[k\tilde{a}_1^-,k\tilde{a}_1^+]$，其中 $0\leqslant k\leqslant 1$。

显然 $(D[0,1];\leqslant,\vee,\wedge)$ 形成一完备格，$0=[0,0]$，$1=[1,1]$ 分别为其最小元和最大元。

定义 4[10] 设 X 为一非空集合，关于 X 的区间值模糊集 F 定义为：

$F=\{(x,[\mu_F^-(x),\mu_F^+(x)])\mid x\in X\}$

式中，μ_F^-，μ_F^+ 是 X 的模糊子集且 $\mu_F^-(x)\leqslant\mu_F^+(x)$。令 $\tilde{\mu}_F(x)=[\mu_F^-(x),\mu_F^+(x)]$，则 $F=\{(x,\tilde{\mu}_F(x))\mid x\in X\}$，其中 $\tilde{\mu}_F:X\to D[0,1]$。

在本文中，我们总假设 $[\mu_F^-(x),\mu_F^+(x)]\leqslant[0.5,0.5]$ 或 $[\mu_F^-(x),\mu_F^+(x)]>[0.5,0.5]$，$\forall x\in L$。

集合 X 的一模糊集 F 定义为

$$F(y)=\begin{cases}t(\neq 0), & 若\ y=x\\ 0, & 若\ y\neq x\end{cases}$$

则称 F 是具有支撑 x 值为 t 的模糊点，记为 x_t。$x_t\in F$ 当且仅当 $F(x)\geqslant t$；x_tqF 当且仅当 $F(x)+t>1$。如果 $x_t\in F$ 或 x_tqF，记为 $x_t\in\vee qF$；如果 $x_t\in F$ 且 x_tqF，记为 $x_t\in\wedge qF$。符号 $\overline{\in\vee q}$ 表示 $\in\vee q$ 不成立。

3 区间值模糊格蕴涵子代数

定义 5 设 $\tilde{\mu}$ 是格蕴涵代数 $\mathscr{L}$ 的区间值模糊集，$\tilde{\mu}$ 称为 $\mathscr{L}$ 的区间值模糊格蕴涵子代数，如果

(1) $\tilde{\mu}(I)\leqslant\tilde{\mu}(O)$；

(2) $\forall x,y\in L,\tilde{\mu}(x\to y)\geqslant\min\{\tilde{\mu}(x),\tilde{\mu}(y)\}$。

定理 2 设 $\tilde{\mu}$ 为 $\mathscr{L}$ 的区间值模糊格蕴涵子代数，则 $\forall x,y\in L$，

(1) $\tilde{\mu}(I)\geqslant\tilde{\mu}(x)$；

(2) $\tilde{\mu}(x)=\tilde{\mu}(x')$；

(3) $\tilde{\mu}(x\vee y)\geqslant\min\{\tilde{\mu}(x),\tilde{\mu}(y)\}$；

(4) $\tilde{\mu}(x\wedge y)\geqslant\min\{\tilde{\mu}(x),\tilde{\mu}(y)\}$。

证明：直接由定义 6 以及格蕴涵代数的性质可得。

记 $U(\tilde{\mu};\tilde{s}):=\{x\in L\mid\tilde{\mu}(x)\geqslant\tilde{s},\tilde{s}\in D(0,1]\}$。

定理 3 设 $\tilde{\mu}$ 是格蕴涵代数 $\mathscr{L}$ 的区间值模糊集，$\tilde{\mu}$ 为 $\mathscr{L}$ 的区间值模糊格蕴涵子代数当且仅当非空集合 $U(\tilde{\mu};\tilde{s})$ 是 $\mathscr{L}$ 的格蕴涵子代数。

证明：设 $\tilde{\mu}$ 为 $\mathscr{L}$ 的区间值模糊格蕴涵子代数且 $U(\tilde{\mu};\tilde{s})\neq\Phi$，则存在 $x_0\in U(\tilde{\mu};\tilde{s})$，即有 $\tilde{\mu}(x_0)\geqslant\tilde{s}$。由定义 5 及定理 2(1)，有 $\tilde{\mu}(O)\geqslant\tilde{\mu}(I)\geqslant\tilde{s}$，即 $O\in U(\tilde{\mu};\tilde{s})$。若 $x,y\in U(\tilde{\mu};\tilde{s})$，则

$\tilde{\mu}(x\to y)\geqslant\min\{\tilde{\mu}(x),\tilde{\mu}(y)\}\geqslant\tilde{s}$

即 $x\to y\in U(\tilde{\mu};\tilde{s})$。由定理 1 可知 $U(\tilde{\mu};\tilde{s})$ 是 $\mathscr{L}$ 的格蕴涵子代数。

反之，设 $\tilde{\mu}(I)=\tilde{s}$，则 $U(\tilde{\mu};\tilde{s})\neq\Phi$。由假设可知 $U(\tilde{\mu};\tilde{s})$ 是 $\mathscr{L}$ 的格蕴涵子代数，从而 $O\in U(\tilde{\mu};\tilde{s})$，即 $\tilde{\mu}(O)\geqslant\tilde{s}=\tilde{\mu}(I)$。

对于 $\forall x,y\in L$，取 $\tilde{s}=\min\{\tilde{\mu}(x),\tilde{\mu}(y)\}$，则 $U(\tilde{\mu};\tilde{s})\neq\Phi$。由假设可知 $U(\tilde{\mu};\tilde{s})$ 是 $\mathscr{L}$ 的格蕴涵子代数。因为 $x,y\in U(\tilde{\mu};\tilde{s})$，所以 $x\to y\in U(\tilde{\mu};\tilde{s})$，即有

$\tilde{\mu}(x\to y)\geqslant\tilde{s}=\min\{\tilde{\mu}(x),\tilde{\mu}(y)\}$

由定义 5 可知，$\tilde{\mu}$ 为 $\mathscr{L}$ 的区间值模糊格蕴涵子代数。

4 区间值(α,β)-模糊格蕴涵子代数

格蕴涵代数 $\mathscr{L}$ 的区间值模糊集 $\tilde{\mu}$ 定义为：

$$\tilde{\mu}(y)=\begin{cases}\tilde{t}(\neq[0,0]), & 若\ y=x\\ [0,0], & 若\ y\neq x\end{cases}$$

则称 $\tilde{\mu}$ 是具有支撑 x 值为 $\tilde{t}$ 的模糊区间值，记为 $x_{\tilde{t}}$。$x_{\tilde{t}}\in\tilde{\mu}$ 当且仅当 $\tilde{\mu}(x)\geqslant\tilde{t}$；$x_{\tilde{t}}q\tilde{\mu}$ 当且仅当 $\tilde{\mu}(x)+\tilde{t}>\tilde{1}$。如果 $x_{\tilde{t}}\in\tilde{\mu}$ 或 $x_{\tilde{t}}q\tilde{\mu}$，记为 $x_{\tilde{t}}\in\vee q\tilde{\mu}$；如果 $x_{\tilde{t}}\in\tilde{\mu}$ 且 $x_{\tilde{t}}q\tilde{\mu}$，记为 $x_{\tilde{t}}\in\wedge q\tilde{\mu}$。符号 $\overline{\in\vee q}$ 表示 $\in\vee q$ 不成立。

定义 6 设 $\tilde{\mu}$ 是格蕴涵代数 $\mathscr{L}$ 的区间值模糊集，$\tilde{\mu}$ 称为 $\mathscr{L}$ 的区间值(α,β)-模糊格蕴涵子代数，如果 $\forall x,y\in L$，

(FI1) 若 $I_{\tilde{t}}\alpha\tilde{\mu}$，则 $O_{\tilde{t}}\beta\tilde{\mu}$；

(FI2) 若 $x_{\tilde{t}}\alpha\tilde{\mu}$，$y_{\tilde{s}}\alpha\tilde{\mu}$，则 $(x\to y)_{\min(\tilde{t},\tilde{s})}\beta\tilde{\mu}$。

其中 $\tilde{t},\tilde{s}\in D(0,1]$，$\alpha,\beta\in\{\in,q,\in\vee q,\in\wedge q\}$，但 $\alpha\neq\in\wedge q$。

注：从定义 6 中可以看到，任何区间值(α,β)-模糊格蕴涵子代数均是区间值$(\alpha,\in\vee q)$-模糊格蕴涵子代数，所以区间值$(\alpha,\in\vee q)$-模糊格蕴涵子代数在区间值(α,β)-模糊格蕴涵子代数理论中起着中心作用。因此本文主要研究区间值$(\alpha,\in\vee q)$-模糊格蕴涵子代数。

例 1 考虑格 $L=\{I,O,a,b\}$，其 Hasse 图和各种运算请见文献[2]中例 2.1.6，则 $\mathscr{L}=\{L;\vee,\wedge,',\to\}$ 是一格蕴涵代数。定义 $\mathscr{L}$ 的一区间值模糊集 $\tilde{\mu}$ 为：

$$\tilde{\mu}(x)=\begin{cases}[0.6,0.7], & x=I\\ [0.5,0.6], & x=O\\ [0.4,0.5], & x=b\\ [0.3,0.4], & x=a\end{cases}$$

容易验证 $\tilde{\mu}$ 是 $\mathscr{L}$ 的区间值$(\in,\in\vee q)$-模糊格蕴涵子代数。但是 $\tilde{\mu}$ 不是 $\mathscr{L}$ 的区间值$(\in,\in)$-模糊格蕴涵子代数。例如取 $\tilde{s}=[0.51,0.55]$，显然 $\tilde{\mu}(I)\geqslant\tilde{s}$，即 $I_{\tilde{s}}\in\tilde{\mu}$，但是 $\tilde{\mu}(O)\ngeqslant\tilde{s}$，故 $O_{\tilde{s}}\notin\tilde{\mu}$，因此 $\tilde{\mu}$ 不是 $\mathscr{L}$ 的区间值$(\in,\in)$-模糊格蕴涵子代数。

在本节定理 9 中将给出区间值$(\in,\in\vee q)$-模糊格蕴涵

子代数是一区间值$(\in,\in)$-模糊格蕴涵子代数的条件。

定理 4 $\mathscr{L}$的区间值模糊集$\tilde{\mu}$为区间值模糊格蕴涵子代数当且仅当$\tilde{\mu}$是$\mathscr{L}$的区间$(\in,\in)$-模糊值格蕴涵子代数。

证明：设$\tilde{\mu}$为区间值模糊格蕴涵子代数且$I_{\tilde{s}}\in\tilde{\mu}$，故$\tilde{s}\leqslant\tilde{\mu}(I)\leqslant\tilde{\mu}(O)$，因此$O_{\tilde{s}}\in\tilde{\mu}$。(FI1)成立。

设$x_{\tilde{s}},y_{\tilde{t}}\in\tilde{\mu}$，则$\tilde{\mu}(x)\geqslant\tilde{s},\tilde{\mu}(y)\geqslant\tilde{t}$。因为$\tilde{\mu}$为区间值模糊格蕴涵子代数，故有

$$\tilde{\mu}(x\to y)\geqslant\min\{\tilde{\mu}(x),\tilde{\mu}(y)\}\geqslant\min\{\tilde{s},\tilde{t}\}$$

因而$(x\to y)_{\min\{\tilde{s},\tilde{t}\}}\in\tilde{\mu}$，所以$\tilde{\mu}$是$\mathscr{L}$的区间$(\in,\in)$-模糊值格蕴涵子代数。

反之，假设$\tilde{\mu}$是$\mathscr{L}$的区间$(\in,\in)$-模糊值格蕴涵子代数，在(FI1)中取$\tilde{\mu}(I)=\tilde{s}$，则有$\tilde{\mu}(I)\leqslant\tilde{\mu}(O)$。同理可证定义 5 中的条件(2)成立。因此，$\tilde{\mu}$为区间值模糊格蕴涵子代数。

定理 5 $\mathscr{L}$的区间值模糊集$\tilde{\mu}$是区间$(\in,\in\vee q)$-模糊格蕴涵子代数当且仅当$\tilde{\mu}$满足：$\forall x,y\in L$，

(1) $\tilde{\mu}(x\to y)\geqslant\min\{\tilde{\mu}(x),\tilde{\mu}(y),[0.5,0.5]\}$；

(2) $\tilde{\mu}(O)\geqslant\min\{\tilde{\mu}(I),[0.5,0.5]\}$。

证明：设$\tilde{\mu}$是$\mathscr{L}$的区间值$(\in,\in\vee q)$-模糊格蕴涵子代数。

(a) 若$\min\{\tilde{\mu}(x),\tilde{\mu}(y)\}<[0.5,0.5]$，假设$\tilde{\mu}(x\to y)<\min\{\tilde{\mu}(x),\tilde{\mu}(y)\}$，则存在$\tilde{t}\in D(0,0.5)$，使得$\tilde{\mu}(x\to y)<\tilde{t}<\min\{\tilde{\mu}(x),\tilde{\mu}(y)\}$。因此$x_{\tilde{t}}\in\tilde{\mu},y_{\tilde{t}}\in\tilde{\mu}$。由(FI2)有$(x\to y)_{\tilde{t}}\in\vee q\tilde{\mu}$。但$(x\to y)_{\tilde{t}}\notin\tilde{\mu}$，因此$(x\to y)_{\tilde{t}}q\tilde{\mu}$，即$\tilde{\mu}(x\to y)+\tilde{t}>\tilde{1}=[1,1]$。但$\tilde{\mu}(x\to y)<\min\{\tilde{\mu}(x),\tilde{\mu}(y)\}<[0.5,0.5]$且$\tilde{t}\in D(0,0.5)$，所以$\tilde{\mu}(x\to y)+\tilde{t}<\tilde{1}=[1,1]$，矛盾。因此$\tilde{\mu}(x\to y)\geqslant\min\{\tilde{\mu}(x),\tilde{\mu}(y)\}$。

(b) 若$\min\{\tilde{\mu}(x),\tilde{\mu}(y)\}\geqslant[0.5,0.5]$，则有$x_{[0.5,0.5]}\in\tilde{\mu}$，$y_{[0.5,0.5]}\in\tilde{\mu}$。因为$\tilde{\mu}$是$\mathscr{L}$的区间值$(\in,\in\vee q)$-模糊格蕴涵子代数，故$(x\to y)_{[0.5,0.5]}\in\vee q\tilde{\mu}$，则一定有$\tilde{\mu}(x\to y)\geqslant[0.5,0.5]$。否则，如果$\tilde{\mu}(x\to y)<[0.5,0.5]$，则$(x\to y)_{[0.5,0.5]}\notin\tilde{\mu}$。又因为$(x\to y)_{[0.5,0.5]}\in\vee q\tilde{\mu}$，从而$(x\to y)_{[0.5,0.5]}q\tilde{\mu}$。但$\tilde{\mu}(x\to y)+[0.5,0.5]<[1,1]$，矛盾。因此$\tilde{\mu}(x\to y)\geqslant\min\{\tilde{\mu}(x),\tilde{\mu}(y),[0.5,0.5]\}$。

类似可证$\tilde{\mu}(O)\geqslant\min\{\tilde{\mu}(I),[0.5,0.5]\}$。

反之，假设条件(1)(2)成立。设$x,y\in L$且$\tilde{s},\tilde{t}\in D(0,1]$使得$x_{\tilde{s}}\in\tilde{\mu},y_{\tilde{t}}\in\tilde{\mu}$，即$\tilde{\mu}(x)\geqslant\tilde{s},\tilde{\mu}(y)\geqslant\tilde{t}$。

(a)若$\tilde{\mu}(x\to y)<\min\{\tilde{s},\tilde{t}\}$。此时必有$\min\{\tilde{\mu}(x),\tilde{\mu}(y)\}\geqslant[0.5,0.5]$。否则，若$\min\{\tilde{\mu}(x),\tilde{\mu}(y)\}<[0.5,0.5]$，则$\tilde{\mu}(x\to y)\geqslant\min\{\tilde{\mu}(x),\tilde{\mu}(y)\}$，矛盾。因此$\tilde{\mu}(x\to y)+\min\{\tilde{s},\tilde{t}\}>2\tilde{\mu}(x\to y)>2[0.5,0.5]=[1,1]$。故$(x\to y)_{\min\{\tilde{s},\tilde{t}\}}q\tilde{\mu}$。此时，$(x\to y)_{\min\{\tilde{s},\tilde{t}\}}\in\vee q\tilde{\mu}$。

(b) 若$\tilde{\mu}(x\to y)\geqslant\min\{\tilde{s},\tilde{t}\}$，则$(x\to y)_{\min\{\tilde{s},\tilde{t}\}}\in\tilde{\mu}$。此时，$(x\to y)_{\min\{\tilde{s},\tilde{t}\}}\in\vee q\tilde{\mu}$。从而条件(FI2)成立。

设$I_{\tilde{s}}\in\tilde{\mu},\tilde{s}\in D(0,1]$，则$\tilde{\mu}(I)\geqslant\tilde{s}$。

(a) 若$\tilde{\mu}(O)\geqslant\tilde{s}$，则$O_{\tilde{s}}\in\tilde{\mu}$，故$O_{\tilde{s}}\in\vee q\tilde{\mu}$。

(b) 若$\tilde{\mu}(O)<\tilde{s}$，则有$\tilde{\mu}(I)\geqslant[0.5,0.5]$。否则，若$\tilde{\mu}(I)<[0.5,0.5]$，则$\tilde{\mu}(O)\geqslant\min\{\tilde{\mu}(I),[0.5,0.5]\}=\tilde{\mu}(I)\geqslant\tilde{s}$，矛盾。从而有$\tilde{\mu}(O)+\tilde{s}>2\tilde{\mu}(O)\geqslant2\min\{\tilde{\mu}(I),[0.5,0.5]\}=2[0.5,0.5]=[1,1]$。故$O_{\tilde{s}}q\tilde{\mu}$，因此$O_{\tilde{s}}\in\vee q\tilde{\mu}$。

因此$\tilde{\mu}$是区间值$(\in,\in\vee q)$-模糊格蕴涵子代数。

设$\{\tilde{\mu}_i\mid i\in J\}$是$\mathscr{L}$的一簇区间值模糊集，定义

$$\bigcap_{i\in J}\tilde{\mu}_i(x)=\inf_{i\in J}\tilde{\mu}_i(x)$$

定理 6 设$\{\tilde{\mu}_i\mid i\in J\}$是$\mathscr{L}$的一簇区间值$(\in,\in\vee q)$-模糊格蕴涵子代数，则$\tilde{\mu}=\bigcap_{i\in J}\tilde{\mu}_i$也是$\mathscr{L}$的区间$(\in,\in\vee q)$-模糊格蕴涵子代数，其中$J$是指标集。

证明：因为$\tilde{\mu}_i(i\in J)$是$\mathscr{L}$的一簇区间$(\in,\in\vee q)$-模糊格蕴涵子代数，则定理 5 有

$$\tilde{\mu}_i(x\to y)\geqslant\min\{\tilde{\mu}_i(x),\tilde{\mu}_i(y),[0.5,0.5]\}$$

从而有

$$\begin{aligned}\tilde{\mu}(x\to y)&=\bigcap_{i\in J}\tilde{\mu}_i(x\to y)=\inf_{i\in J}\tilde{\mu}_i(x\to y)\\&\geqslant\inf_{i\in J}\min\{\tilde{\mu}_i(x),\tilde{\mu}_i(y),[0.5,0.5]\}\\&=\min\{\inf_{i\in J}\tilde{\mu}_i(x),\inf_{i\in J}\tilde{\mu}_i(y),[0.5,0.5]\}\\&=\min\{\bigcap_{i\in J}\tilde{\mu}_i(x),\bigcap_{i\in J}\tilde{\mu}_i(y),[0.5,0.5]\}\\&=\min\{\tilde{\mu}(x),\tilde{\mu}(y),[0.5,0.5]\}\end{aligned}$$

同理可证$\tilde{\mu}(O)\geqslant\min\{\tilde{\mu}(I),[0.5,0.5]\}$。

因此$\tilde{\mu}$是$\mathscr{L}$的区间值$(\in,\in\vee q)$-模糊格蕴涵子代数。

定理 7 $\mathscr{L}$的区间值模糊集$\tilde{\mu}$是区间值$(\in,\in\vee q)$-模糊格蕴涵子代数当且仅当非空子集$U(\tilde{\mu};\tilde{t})$是$\mathscr{L}$的格蕴涵子代数，其中$\tilde{t}\in D(0,0.5]$。

证明：假设$\tilde{\mu}$是区间值$(\in,\in\vee q)$-模糊格蕴涵子代数且对任意$\tilde{t}\in D(0,0.5]$，$U(\tilde{\mu};\tilde{t})$非空。设$x,y\in U(\tilde{\mu};\tilde{t})$，则$\tilde{\mu}(x)\geqslant\tilde{t}\tilde{\mu}(y)\geqslant\tilde{t}$。因此$\tilde{\mu}(x\to y)\geqslant\min\{\tilde{\mu}(x),\tilde{\mu}(y),[0.5,0.5]\}\geqslant\min\{\tilde{t},[0.5,0.5]\}=\tilde{t}$，$x\to y\in U(\tilde{\mu};\tilde{t})$。

因为$\tilde{\mu}$是区间$(\in,\in\vee q)$-模糊格蕴涵子代数，故

$$\tilde{\mu}(O)\geqslant\min\{\tilde{\mu}(I),[0.5,0.5]\}$$

由于$U(\tilde{\mu};\tilde{t})$非空，从而存在$x_0\in U(\tilde{\mu};\tilde{t})$，由定理 5(1)可有$I\in U(\tilde{\mu};\tilde{t})$，故$\tilde{\mu}(I)\geqslant\tilde{t}$，从而，$\tilde{\mu}(O)\geqslant\min\{\tilde{\mu}(I),[0.5,0.5]\}\geqslant\min\{\tilde{t},[0.5,0.5]\}=\tilde{t}$，即有$O\in U(\tilde{\mu};\tilde{t})$。由定理 1 可知$U(\tilde{\mu};\tilde{t})$是$\mathscr{L}$的格蕴涵子代数。

反之，假设非空子集$U(\tilde{\mu};\tilde{t})$是$\mathscr{L}$的格蕴涵子代数，且$\tilde{t}\in D(0,0.5]$。

如果定理 5 中的条件(1)不成立，则存在$a,b\in L$使得$\tilde{\mu}(a\to b)<\min\{\tilde{\mu}(a),\tilde{\mu}(b),[0.5,0.5]\}$。因此存在某个$\tilde{s}\in D(0,0.5]$，使得$\tilde{\mu}(a\to b)<\tilde{s}<\min\{\tilde{\mu}(a),\tilde{\mu}(b),[0.5,0.5]\}$。于是$a,b\in U(\tilde{\mu};\tilde{s})$且$a\to b\notin U(\tilde{\mu};\tilde{s})$，这矛盾于$U(\tilde{\mu};\tilde{t})$是$\mathscr{L}$的格蕴涵子代数，从而定理 5 中的条件(1)成立。

假设$\tilde{\mu}(O)<\min\{\tilde{\mu}(I),[0.5,0.5]\}$，因此存在某个$\tilde{s}\in D(0,0.5]$，使得$\tilde{\mu}(O)<\tilde{s}<\min\{\tilde{\mu}(I),[0.5,0.5]\}$，从而$O\notin U(\tilde{\mu};\tilde{s})$。这矛盾于$U(\tilde{\mu};\tilde{t})$是$\mathscr{L}$的格蕴涵子代数。所以$\tilde{\mu}(O)\geqslant\min\{\tilde{\mu}(I),[0.5,0.5]\}$。

因此$\tilde{\mu}$是区间值$(\in,\in\vee q)$-模糊格蕴涵子代数。

定理 8 设$\tilde{\mu}$是格蕴涵代数$\mathscr{L}$的区间值模糊集。则对$\forall\tilde{t}\in D(0.5,1]$，$U(\tilde{\mu};\tilde{t})(\neq\Phi)$是$\mathscr{L}$的格蕴涵子代数当且仅当$\forall x,y\in L$，下列条件成立：

(1) $\max\{\tilde{\mu}(x\to y),[0.5,0.5]\}\geqslant\min\{\tilde{\mu}(x),\tilde{\mu}(y)\}$；

(2) $\max\{\tilde{\mu}(O),[0.5,0.5]\}\geqslant\tilde{\mu}(I)$。

证明：设$U(\tilde{\mu};\tilde{t})(\neq\Phi)$是$\mathscr{L}$的格蕴涵子代数。假设存在$x,y\in L$使得$\max\{\tilde{\mu}(x\to y),[0.5,0.5]\}<\min\{\tilde{\mu}(x),\tilde{\mu}(y)\}$。令$\min\{\tilde{\mu}(x),\tilde{\mu}(y)\}=\tilde{t}$，则$\tilde{t}\in D(0.5,1]$，$\tilde{\mu}(x\to y)<\tilde{t}$，$\tilde{\mu}(x)\geqslant\tilde{t}$且$\tilde{\mu}(y)\geqslant\tilde{t}$。即$x,y\in U(\tilde{\mu};\tilde{t})$，因此$x\to y\in U(\tilde{\mu};\tilde{t})$，这与$\tilde{\mu}$

$(x\rightarrow y)<\tilde{t}$ 矛盾，故 $\max\{\tilde{\mu}(x\rightarrow y),[0.5,0.5]\}\geqslant\min\{\tilde{\mu}(x),\tilde{\mu}(y)\}$。

若 $\max\{\tilde{\mu}(O),[0.5,0.5]\}<\tilde{\mu}(I)$，则存在 $\tilde{t}\in D(0.5,1]$，使得 $\max\{\tilde{\mu}(O),[0.5,0.5]\}<\tilde{t}<\tilde{\mu}(I)$，因此 $\tilde{\mu}(O)<\tilde{t}$，即 $O\notin U(\tilde{\mu};\tilde{t})$，这与 $U(\tilde{\mu};\tilde{t})$ 是格蕴涵子代数矛盾。因此 $\max\{\tilde{\mu}(O),[0.5,0.5]\}\geqslant\tilde{\mu}(I)$。

反之，设 $\forall x,y\in L,x,y\in U(\tilde{\mu};\tilde{t})$，则 $\tilde{\mu}(x)\geqslant\tilde{t},\tilde{\mu}(y)\geqslant\tilde{t}$。因为

$$\max\{\tilde{\mu}(x\rightarrow y),[0.5,0.5]\}\geqslant\min\{\tilde{\mu}(x),\tilde{\mu}(y)\}\geqslant\tilde{t}$$

且 $\tilde{t}\in D(0.5,1]$，故必有 $\tilde{\mu}(x\rightarrow y)\geqslant\tilde{t}$，即 $x\rightarrow y\in U(\tilde{\mu};\tilde{t})$。

同理可证 $O\in U(\tilde{\mu};\tilde{t})$。因此 $U(\tilde{\mu};\tilde{t})(\neq\Phi),\tilde{t}\in D(0.5,1]$ 是 $\mathscr{L}$ 的格蕴涵子代数。

在例 1 中我们给出了一个区间值($\in,\in\vee q$)-模糊格蕴涵子代数，而不是区间值($\in,\in$)-模糊格蕴涵子代数。下面定理给出区间值($\in,\in\vee q$)-模糊格蕴涵子代数构成区间值($\in,\in$)-模糊格蕴涵子代数的条件。

定理 9 $\mathscr{L}$ 的区间值模糊集 $\tilde{\mu}$ 是区间值($\in,\in\vee q$)-模糊格蕴涵子代数且对于 $\forall x\in L$，有 $\tilde{\mu}(x)<[0.5,0.5]$，则 $\tilde{\mu}$ 是区间值($\in,\in$)-模糊格蕴涵子代数。

证明：设 $I_{\tilde{s}}\in\tilde{\mu}$，则 $\tilde{\mu}(I)\geqslant\tilde{s}$。由于 $\tilde{\mu}$ 是区间值($\in,\in\vee q$)-模糊格蕴涵子代数且对于 $\forall x\in L$，有 $\tilde{\mu}(x)<[0.5,0.5]$，所以 $\tilde{\mu}(O)\geqslant\min\{\tilde{\mu}(I),[0.5,0.5]\}=\tilde{\mu}(I)\geqslant\tilde{s}$。即 $O_{\tilde{s}}\in\tilde{\mu}$。

设 $x_{\tilde{s}},y_{\tilde{t}}\in\tilde{\mu},\tilde{s},\tilde{t}\in D(0,1]$，则 $\tilde{\mu}(x)\geqslant\tilde{s},\tilde{\mu}(y)\geqslant\tilde{t}$。根据区间值($\in,\in\vee q$)-模糊格蕴涵子代数，所以 $\tilde{\mu}(x\rightarrow y)\geqslant\min\{\tilde{\mu}(x),\tilde{\mu}(y),[0.5,0.5]\}\geqslant\min\{\tilde{s},\tilde{t}\}$。故有 $(x\rightarrow y)_{\min\{\tilde{s},\tilde{t}\}}\in\tilde{\mu}$。

因此 $\tilde{\mu}$ 是区间值($\in,\in$)-模糊格蕴涵子代数。

结束语 为了给具有模糊性和不可比较性的不确定性信息处理提供可靠的逻辑基础，以及建立真值域在格上的逻辑系统，徐扬建立了格蕴涵代数，随后建立了模糊格蕴涵代数。为了推动这一重要逻辑代数的发展，我们必须弄清楚其结构。而代数的子结构是一重要的研究内容。本文提出了广义形式的模糊蕴涵子代数——区间值(α,β)-模糊格蕴涵子代数，研究了其性质，得到了它的等价刻画。

参 考 文 献

[1] 徐扬. 格蕴涵代数[J]. 西南交通大学学报，1993，28(1)：20-27

[2] Xu Y, Ruan D, Qin K Y, et al. Lattice-valued logic-an alternative approach to treat fuzziness and incomparability[M]. Berlin: Springer-Verlag, 2003

[3] 徐扬，秦克云. 模糊格蕴涵代数[J]. 西南交通大学学报，1995，30(2)：121-127

[4] 徐扬，秦克云. 格蕴 H 涵代数和格蕴涵代数类[J]. 河北煤炭工程学院学报，1992(3)：139-143

[5] 赖家俊，徐扬. 赋范格 H 蕴涵代数和模糊格 H 蕴涵代[J]. 计算机科学，2008，35(11)：126-159

[6] 赖家俊，徐扬. 基于语言真值格值命题逻辑系统 l_{vpl} 的推理规则[J]. 计算机科学，2008，35(9)：230-232

[7] 杨丽，徐扬. 基于矩阵蕴涵的格值模糊概念格构造方法[J]. 计算机科学，2009，36(8)：264-267

[8] 袁学海，李红兴，孙凯彪. 直觉模糊集和区间值模糊集的截集、分解定理和表示定理[J]. 中国科学(F 辑)，2009，39(9)：933-945

[9] Pu P M, Liu Y M. Fuzzy topology I, Neighborhood structure of a fuzzy point and Moore-Smith convergence[J]. J. Math. Anal. Appl., 1980(76): 571-599

[10] Ma X L, Zhan J M, Shum K P. Interval valued ($\in,\in\vee q$)-fuzzy filters of MTL-algbras[J]. J. Math. Research. Exposition, 2010, 30(2): 121-127

[11] Dudek W A, Shabir M, Ali M I. (α,β)-fuzzy ideals of hemirings[J]. Comp. Math. Appl., 2009(58): 310-321

（上接第 232 页）

精度和速度，可以明显地降低标记样本所付出的费用。

参 考 文 献

[1] Yang Bisan, Jiao-Tao, Wang Teng-jiao, et al. Effective Multi-Label Active Learning for Text Classification[C]//KDD'09: Proceedings of the 15th ACM SIGKDD international conference on Knowledge discovery and data mining. Paris, 2009: 917-926

[2] 袁勋，吴秀清，洪日昌，等. 基于主动学习 SVM 分类器的视频分类[J]. 中国科学技术大学学报，2009，39(5)：473-478

[3] 宋鑫颖，周志逵. 一种基于 SVM 的主动学习文本分类方法[J]. 计算机科学，2006，33(11)：288-290

[4] Li Xu-chun, Wang Lei, Sung E. Multi-Label SVM Active Learning for Image Classification[C]//International Conference on Image Processing. Lion, 2004: 2207-2210

[5] Brinker K. On Active Learning in Multi-label Classification[M]// Myra Spiliopoulou, Rudolf Kruse, Christian Borgelt, et al. "From Data and Information Analysis to Knowledge Engineering" of Book Series "Studies in Classification, Data Analysis, and Knowledge Organization". Berlin Heidelberg: Springer, 2006: 206-213

[6] Singh M, Curran E, Cunningham P. Active Learning for Multi-label Image Annotation[C]//The 19th Irish Conference on Artificial Intelligence and Cognitive Science. Cork, Ireland, 2008: 173-182

[7] Joshi A J, Porikli F, Papanikolopoulos N. Multi-Class Active Learning for Image Classification[C]// IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR). Miami, 2009: 2372-2379

[8] Lin Hsuan-tien, Lin Chih-jen, Weng R C. A Note on Platt's Probabilistic Outputs for Support Vector Machines[J]. Journal of Machine Learning Research, 2007, 68(3): 267-276

[9] Tong S, Koller D. Support Vector Machine Active Learning with Applications to Text Classification[J]. Journal of Machine Learning Research, 2001: 45-66

[10] He Jing-rui, Li Ming-jing, Zhang Hong-jiang, et al. Mean Version Space: a New Active Learning Method for Content-Based Image Retrieval[C]//Proceeding of the ACM SIGMM International Workshop on Multimedia Information Retrieval(MIR) at the International Multimedia Conference. 2004: 15-22

[11] Chang Chih-chung, Lin Chi-jen. LIBSVM: a Library for support vector machine[OL]. http://www.csie.ntu.tw/~cjlin/libsvm, 2010-01-10