乘积格蕴涵代数的子代数的 MATLAB 实现

吴明慧[1] 刘 煦[2] 徐 扬[1] 马 骏[3]
(西南交通大学智能控制开发中心 成都 610031)[1] (西南交通大学力学与工程学院 成都 610031)[2]
(澳大利亚悉尼科技大学信息技术学院)[3]

摘 要 借助于MATLAB,得到了两个有限链型的乘积格蕴涵代数子代数的具体形式,更直观地反映了格蕴涵子代数的结构特征,并且通过一个例子展示了程序的运行结果。研究了格蕴涵代数中各种滤子之间的关系,讨论了两个链型格蕴涵子代数乘积的滤子,得到了其只存在平凡滤子和素滤子的结论。

关键词 滤子,格蕴涵子代数,乘积格蕴涵代数,非链型子代数,链型子代数

MATLAB Realization on Subalgebras of Direct Product of Lattice Implication Algebras

WU Ming-hui[1] LIU Xu[2] XU Yang[1] MA Jun[3]
(Intelligent Control Development Center, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031, China)[1]
(School of Mechanics and Engineering, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031, China)[2]
(Faculty of Information Technology, University of Technology, Sydney, Australia)[3]

Abstract The current paper gets the concrete forms of the subalgebras of two finite chain-type lattice implication product algebras by means of MATLAB, it is absolutely necessary to know the structure of lattice implication algebras more intuitively. An example was given to show the result. It investigated the relations of some filters of lattice implication algebras. Furthermore, it discussed about the filters of direct product of two finite chain-type lattice implication subalgebras, and got the direct product that two finite chain-type lattice implication subalgebras have trivial filters and prime filters only.

Keywords Filter, Lattice implication subalgebra, Lattice implication product subalgebra, Non-chain-type subalgebra, Chain-type subalgebra

1 引言

经典的二值逻辑是处理确定性现象的逻辑系统。它虽然是确定性信息处理的一种十分有效的工具,但却无法直接有效地刻画人类带有不确定性信息的思维活动。于是,计算机科学、人工智能、数学及相关应用领域的研究人员纷纷提出各种各样的逻辑系统,试图为智能控制中的不确定性推理建立合适的逻辑基础。在非经典逻辑的研究中,格值逻辑是重要的研究方向之一。格值逻辑是一种重要的多值逻辑,它把已有的多值逻辑的链型真值域拓广为较一般的格,进而更有效地描述人类思维、判断和决策的不确定性。到目前为止,关于格值逻辑系统的研究还不够充分,特别是对具有较复杂真值域和真值域中不可比较元的逻辑系统的研究还比较薄弱。为解决这一问题,1993年徐扬在研究多值逻辑和不确定性推理的过程中将格与蕴涵代数相结合提出了格蕴涵代数的概念[2],为格值逻辑和近似推理提供了一个理论基础。我们知道,对格蕴涵代数的子结构的研究是格值逻辑系统中的一项重要内容,同时研究有限链型格蕴涵代数也是必要的[6]。文献[15]中,对有限格蕴涵代数的结构进行了探讨,提出了一种找到格蕴涵代数的子代数的方法,并且计算出了子代数的个数。滤子及理想作为格蕴涵代数的重要的子结构,在基于格蕴涵代数的自动推理和近似推理中具有重要作用,国内外多位学者对格蕴涵代数的滤子、LI-理想等结构做了较深入的讨论[2-5,10-16]。文献[7,9,13]提出了素滤子、固执滤子、超滤、布尔滤子等概念,并讨论了其中几种滤子之间的关系。但在这些研究工作中,滤子关系的讨论不全面,且关于子代数和乘积格蕴涵代数的子结构的研究很少。

基于以上的研究工作,本文将在上述研究成果的基础上作进一步的讨论,致力于对格蕴涵代数子结构作进一步研究,在探索乘积格蕴涵代数的子代数时采用了 MATLAB 编程,继续为以格蕴涵代数为真值域的格值命题逻辑系统研究做准备。

2 基本理论

在本文中,我们总是假设$(L,\vee,\wedge,',\rightarrow,O,I)$是一个格蕴涵代数,且简记为$L$。首先给出几个定义及定理,具体内容

到稿日期:2010-04-26 返修日期:2010-07-20 本文受国家自然科学基金项目(60875034)资助。

吴明慧(1986-),女,硕士生,主要研究方向为智能信息处理;刘 煦(1985-),男,硕士生,主要研究方向为工程力学;徐 扬(1956-),男,教授,博士生导师,CCF会员,主要研究方向为逻辑代数、智能信息处理、不确定性推理和自动推理等;马 骏(1973-),男,博士后,主要研究方向为智能决策、不确定性推理等。

请详见参考文献[9,15]。

定义 1[1] 设 L 是一个格蕴涵代数，$S\subseteq L$，如果

(1)$O\in S$；

(2)$x,y\in S$ 蕴涵 $x\rightarrow y\in S$；

则 S 是 L 的格蕴涵子代数。

显然格蕴涵子代数本身构成一个格蕴涵代数。对任意格蕴涵代数 L，其本身及 $\{O,I\}$ 都是它的格蕴涵子代数，称它们为 L 的平凡格蕴涵子代数。

以下记 L 的全体格蕴涵子代数构成的集合为 $S(L)$。

定义 2[17] 设 L 是一个格蕴涵代数，$J\subseteq L$，J 为 L 的滤子当且仅当

(1)$I\in J$；

(2)对任意的 $x,y\in L$，若 $x\in J$ 且 $x\rightarrow y\in J$，则 $y\in J$。

定义 3[17] L 是一个格蕴涵代数，$J\subseteq L$。J 是 L 的一个关联滤子当且仅当

(1)$I\in J$；

(2)$\forall x,y,z\in L$，如果 $x\rightarrow(y\rightarrow z)\in J$，$x\rightarrow y\in J$ 则 $x\rightarrow z\in J$。

定义 4 设 L 是一个格蕴涵代数，J 是 L 的滤子，称 J 是一个布尔滤子，如果 $\forall x\in L$，有 $x\vee x'\in J$。

定义 5[9] 设 L 是一个格蕴涵代数，P 是 L 的一个真滤子，如果满足对任意的 $a,b\in L$，若 $a\vee b\in P$ 有 $a\in P$ 或者 $b\in P$，则称 P 为一个素滤子。

定义 6[13] L 是一个格蕴涵代数，J 是 L 的非平凡滤子。J 被称为超滤，如果 $\forall x\in L$，$x\in J$ 当且仅当 $x'\notin J$。

定义 7[9] L 是一个格蕴涵代数，J 是 L 的非平凡滤子。J 被称为固执滤子，如果 $\forall x\in L$，$y\notin J$ 有 $x\rightarrow y\in J$，$y\rightarrow x\in J$。

定理 1 J 是格蕴涵代数 L 的滤子。则下面的结论等价：

(1)J 是布尔滤子；

(2)J 是关联滤子。

定理 2[9] 格蕴涵代数的超滤都是固执滤子。

定理 3[9] J 是格蕴涵代数 L 的滤子，则下面的结论等价：

(1)J 是固执滤子；

(2)J 是极大关联滤子。

定理 4 L 是一个格蕴涵代数，J 是 L 的滤子，J 是布尔滤子当且仅当 $\forall x\in L,n\in N^{+}$，$nx\in J$，则 $x\in J$。

推论 1 J 是格蕴涵代数 L 的滤子。则下面的结论等价：

(1)J 是固执滤子；

(2)J 是超滤。

证明：(1)⇒(2)：假设 J 是固执滤子，并且 $x\notin J$，则只需要证明 $x'\in J$。假设存在 $x\notin J$，并且 $x'\notin J$，则 $x'\rightarrow x=2x\in J$。由定理 3 和定理 4 可以得到 $x\in J$。

(2)⇒(1)：由定理 2 可以得到。

定理 5[9] L 是一个格蕴涵代数，$J\subseteq L$，下面的结论等价：

(1)J 是超滤；

(2)J 是极大真滤子。

图 1 示出几种滤子之间的关系。

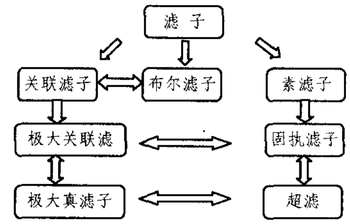

图 1 几种滤子之间的关系

引理 1[9] 如果 L 是一个有限链型的格蕴涵代数，则它一定是一个有限的 Lukasiewicz 链。

引理 2[6] 一个有限的格蕴涵代数可以分解为有限的 Lukasiewicz 链的直积。

引理 3[15] 设 $L(n+1)$ 是一个 $n+1$ 元 Lukasiewicz 格蕴涵代数，如果 $L(n+1)$ 有非平凡格蕴涵子代数，则 n 不是素数，且 L 的全体格蕴涵子代数的集合为：$S(L)=\{L(p+1):p|n,p\in N,p\geqslant 1\}$，其中 $p|n$ 表示 p 整除 n。

定理 6[13] 设 $L_m=\{a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_m\}$ 和 $L_n=\{b_1\leqslant b_2\leqslant\cdots\leqslant b_n\}$ 是两个分别含有 m,n 个元素的 Lukasiewicz 格蕴涵代数，则：

(1)Lukasiewicz 格蕴涵代数只有平凡滤子；

(2)令 $L=L_m\times L_n$，则 L 的滤子仅为以下 4 种型：L，$\{(a_m,b_n)\}$，$L_m\times\{b_n\}$，$\{a_m\}\times L_n$。

3 格蕴涵代数 $L_m\times L_n$ 的子代数

首先给出几个特殊符号，设 $L_n=\{a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n\}$ 是一个 n 元有限链的格蕴涵代数；式子 $p.d=n$，$d=\{i-j\,|\,i,j\in N$，其中 i,j 为下角标$\}$被称为宽度，$p=\frac{n}{i-j}$ 为整数，被称为阶数。

定理 7 设 $L_1=(L_1,\vee,\wedge,',\rightarrow O_1,I_1)$ 和 $L_2=(L_2,\vee,\wedge,',\rightarrow O_2,I_2)$ 是格蕴涵代数，S_1,S_2 分别是 L_1,L_2 的子集，$S_1\times S_2$ 是 $L_1\times L_2$ 的格蕴涵子代数当且仅当 S_1,S_2 分别是 L_1 和 L_2 的格蕴涵子代数。

证明：若 $S_1\times S_2$ 是 $L_1\times L_2$ 的格蕴涵子代数，则有 $(O_1,O_2)\in S_1\times S_2$，也就是 $O_1\in S_1$，$O_2\in S_2$。

对任意的 $a_1,a_2\in S_1$，$b_1,b_2\in S_2$，有 $(a_1,b_1)\in S_1\times S_2$，$(a_2,b_2)\in S_1\times S_2$，则 $(a_1,b_1)\rightarrow(a_2,b_2)=(a_1\rightarrow a_2,b_1\rightarrow b_2)\in S_1\times S_2$。因此 $a_1\rightarrow a_2\in S_1$，$b_1\rightarrow b_2\in S_2$，即 S_1,S_2 分别是 L_1 和 L_2 的格蕴涵子代数。

反过来，假设 S_1,S_2 分别是 L_1 和 L_2 的格蕴涵子代数，有 $O_1\in S_1$，$O_2\in S_2$，则 $(O_1,O_2)\in S_1\times S_2$。如果 $(a_1,b_1)\in S_1\times S_2$，$(a_2,b_2)\in S_1\times S_2$，则 $a_1,a_2\in S_1$，$b_1,b_2\in S_2$。因此可以得到 $a_1\rightarrow a_2\in S_1$，$b_1\rightarrow b_2\in S_2$。所以，$(a_1,b_1)\rightarrow(a_2,b_2)=(a_1\rightarrow a_2,b_1\rightarrow b_2)\in S_1\times S_2$。

文献[15]已经讨论了链型的子代数，我们还可以得到另外一个结论。

定理 8 设 $L=L_1\times L_2$ 是两个 Lukasiwicz 有限链的格蕴涵代数的乘积，其中 L_1 和 L_2 是分别含有 $m+1$ 和 $n+1$ 个元的 Lukasiwicz 有限链，如果它满足以下条件之一：

(1)m 和 n 是互素的；

(2)$m=1$；

(3)$n=1$；

则 $S=\{O,I\}$ 是唯一的链型格蕴涵子代数。

由引理 3 知，Lukasiewicz 有限链的格蕴涵子代数的元素在原格蕴涵代数中关于下角标是等距分布的。所以根据等分的思想，我们可以得到一个有趣的结论，即如果 Lukasiewicz 格蕴涵子代数只含有两个相邻的元素，不失一般性，这两个元素为 a_1,a_2，则格蕴涵子代数就是原格蕴涵代数本身。下面给出这个定理及理论证明。

定理 9 设 $L_m=\{a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_m\}$ 是含 m 个元素的 Lukasiewicz 格蕴涵代数，S 是 L_m 的格蕴涵子代数。若 $a_2\in S$，则 $S=L_m$。

证明：如果 S 是 L_m 的格蕴涵子代数，则 $a_1\in S$。S 关于"→"运算是封闭的，因此若 $a_2\in S$，则 $a_2\rightarrow a_1=a_{m-1}\in S, a_{m-1}\rightarrow a_2=a_3\in S,\cdots,a_{m-1}\rightarrow a_{m-3}=a_{m-2}\in S$，因此 $S=L_m$。

注：此定理也就是一个 Lucksiewicz 有限链一等分，即宽度 $d=1$，$p=m-1$，则子代数就为 L。

滤子作为格蕴涵代数的一个子结构，它的研究为基于格值命题逻辑与一阶逻辑的滤子归结提供了理论基础。由定理 6，有如下定理成立。

定理 10 设 $S_r=\{\alpha_1\leqslant\alpha_2\leqslant\cdots\leqslant\alpha_r\}$，$S_t=\{\beta_1\leqslant\beta_2\leqslant\cdots\leqslant\beta_t\}$ 是 L_m 的两个 Lukasiewicz 有限链型格蕴涵代数的子代数，则有下面的结论：

令 $S=S_r\times S_t$，则 S 的滤子只有以下 4 种型：S，$\{(\alpha_r,\beta_t)\}$，$S_r\times\{\beta_t\}$，$\{\alpha_r\}\times S_t$。

定理 11 设 $S_r=\{\alpha_1\leqslant\alpha_2\leqslant\cdots\leqslant\alpha_r\}$，$S_t=\{\beta_1\leqslant\beta_2\leqslant\cdots\leqslant\beta_t\}$ 是 L_m 的两个 Lukasiewicz 有限链型格蕴涵代数的子代数，则 $S_r\times\{\beta_t\}$，$\{\alpha_r\}\times S_t$ 是 $S_r\times S_t$ 的素滤子。

证明：显然，$(\alpha_r,\beta_t)\in S_r\times\{\beta_t\}$。

若 $(\alpha_i,\beta_u)\vee(\alpha_j,\beta_v)=(\alpha_i\vee\alpha_j,\beta_u\vee\beta_v)\in S_r\times\{\beta_t\}$，则 $\beta_u\vee\beta_v=\beta_t$，因此 $\beta_u=\beta_t$ 或者 $\beta_v=\beta_t$。因此有 $(\alpha_i,\beta_u)\in S_r\times\{\beta_t\}$ 或者 $(\alpha_j,\beta_v)\in S_r\times\{\beta_t\}$，即 $S_r\times\{\beta_t\}$ 是 $S_r\times S_t$ 的素滤子。

另一个可以类似证明。

很容易证明 $S_r\times\{\beta_t\}$，$\{\alpha_r\}\times S_t$ 不是超滤，由图 1 中各滤子间的关系，我们可以得到以下结论。

定理 12 设 $S_r=\{\alpha_1\leqslant\alpha_2\leqslant\cdots\leqslant\alpha_r\}$，$S_t=\{\beta_1\leqslant\beta_2\leqslant\cdots\leqslant\beta_t\}$ 是 L_m 的两个 Lukasiewicz 有限链型格蕴涵代数的子代数，则 $S_r\times S_t$ 只有平凡滤子和素滤子。

注：两个 Lukasiewicz 有限链型格蕴涵代数的乘积只有平凡滤子和素滤子。

4 程序的实现

本节介绍了编程的理论基础，并且通过一个例子展示程序运行的结果。可知程序中得到的子代数的个数与参考文献[15]中得到的个数是相等的。

格蕴涵代数可以分为以下两种：一种是链型的，另一种是非链型的。由引理 3，Lukasiewicz 有限链的格蕴涵子代数的元素在原格蕴涵代数中关于下角标是等距分布的。由定理 7 可知，乘积的格蕴涵子代数都可以由子代数的乘积生成，这些是非链型的；而链型的子代数却不能由子代数的乘积生成。由文献[15]知，乘积格蕴涵代数的子代数除了 $\{O,I\}$ 链型的子代数，还有其他的链型子代数，即两个有限链型格蕴涵子代数的元素个数相等时特殊元素所生成的格蕴涵代数。

基于以上所提及的，我们使用 MATLAB 找到了所有子代数的具体形式，更直观地把握了格蕴涵代数的结构特征。

为编程方便，我们令 $L_1\times L_2$ 是两个 Lukasiwicz 有限链的乘积格蕴涵代数，其中 L_1 和 L_2 是分别含有 $m+1$ 和 $n+1$ 个元的 Lukasiwicz 有限链，即 $L_1=L_{m+1}=\{a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_{m+1}\}$，$L_2=L_{n+1}=\{b_1\leqslant b_2\leqslant\cdots\leqslant b_{n+1}\}$。

接下来，我们通过一个例子来展示 MATLAB 程序所得到的 $L_1\times L_2$ 的格蕴涵子代数的具体形式。

例 1　考虑格蕴涵代数 $L_9=L_3\times L_3$，如图 2 所示。

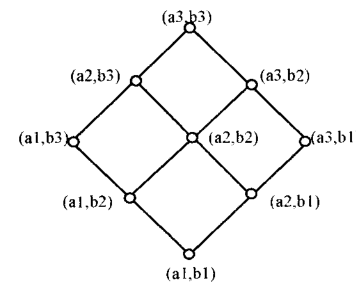

图 2　两个有限链格蕴涵代数 L_3 和 L_3 的乘积

这里 $m=2,n=2$。

程序运行结果如下：

```
输入的值为(链长-1)
输入 m 值:(m>0)m=2
输入 m 值:(n>0)n=2
非链型子代数:
阶数 p 分别为:2 2
ans=
  '(a1,b1)''(a1,b2)'(a1,b3)'
  '(a2,b1)''(a2,b2)'(a2,b3)'
  '(a3,b1)''(a3,b2)'(a3,b3)'
阶数 p 分别为:2 1
ans=
'(a1,b1)''(a1,b3)'
'(a2,b1)''(a2,b3)'
'(a3,b1)''(a3,b3)'
阶数 p 分别:1 2
ans=
  '(a1,b1)''(a1,b2)'(a1,b3)'
  '(a3,b1)''(a3,b2)'(a3,b3)'
阶数 p 分别为:1 1
ans=
'(a1,b1)''(a1,b3)'
'(a3,b1)''(a3,b3)'
链型子代数为:
阶数 p 分别为:2 2
'(a1,b1)'
'(a2,b2)'
'(a3,b3)'
阶数 p 分别为:1 1
'(a1,b1)'
'(a3,b3)'
```

程序运行结果其一及其对应的结果分析图如图 3 所示，则它的非链型格蕴涵子代数由灰色的圈标记出来。

```
阶数 p 为:2 1
ans =
    '(a1,b1)' '(a1,b3)'
    '(a2,b1)' '(a2,b3)'
    '(a3,b1)' '(a3,b3)'
```

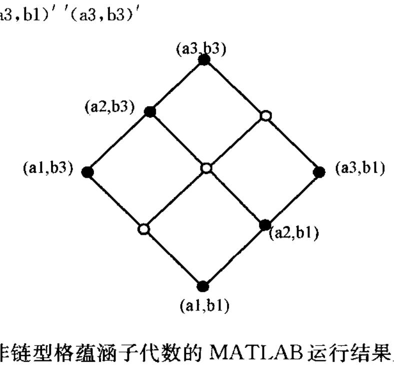

图 3　非链型格蕴涵子代数的 MATLAB 运行结果及分析图

注：

1. 此程序中，只需要输入两个链型格蕴涵代数的链长，就可以直接得到乘积格蕴涵子代数的具体形式，减少了运算量。

2. "阶数 p 分别为:2 1" 的意思是，这两个子代数分别被

（下转第 289 页）

在自主研发的 HUST-CAID 系统中，创建了 DFOM 表示的两个实现，如图 6 所示。用户可以自由选择任意一个实现，也可以增加约束来降低实现的个数。如果向暗孔中增加约束，使得该暗孔没有阻隔，那么用户只能看到图 6(a)中的实现，因为实现图 6(b)中的暗孔中间是阻隔的。

结束语 本文提出了一种新的对象族模型——陈述式对象族模型，定义了该模型的几何结构和拓扑结构，给出了简单模型的约束图，在系统中实现了几个简单的模型。该几何模型可以维护特征的语义，克服了传统几何模型的基于设计过程的一些缺点。但该模型很不完善，后期工作主要是对该模型的几何约束求解和拓扑求解，以及对支持对象族建模的工具进行研究。

参考文献

[1] Bidarra R, Bronsvoort W F. Semantic feature modeling[J]. Computer-Aided Design, 2000, 32(3): 201-225

[2] Bonnefoi P F, Plemenos D, Ruchard W. Declarative modeling in computer graphics: current results and future issues[C]// Proceedings ICCS 2004, International Conference on Computational Science. Poland: Poland, 2004, 3039: 80-89

[3] Gaildrat V. Declarative modelling of virtual environments, overview, issues and applications[C]// Proceedings 3IA'2007, International Conference on Computer Graphics and Artificial Intelligence. Greece, 2007, 10

[4] Hoffmann C M. Constraint-based computer-aided design [J]. Journal of Computing and Information Science, 2005, 5(3): 128-187

[5] van der Meiden H A, Bronsvoort W F. Solving topological constraints for declarative families of objects[J]. Computer-Aided Design, 2007, 39(8): 652-662

[6] van der Meiden H A, Bronsvoort W F. Modeling Families of Objects: Review and Research Directions[J]. Computer-Aided Design, 2009, 6(3): 291-306

[7] 龚雄. 陈述式几何约束系统的原理与方法研究[D]. 武汉：华中科技大学, 2007

(上接第 265 页)

平均分为两部分和一部分。

3. 程序运行的结果得到的 4 个非链型的子代数和 2 个链型的子代数与参考文献[15]中子代数的个数是相一致的。

4. 我们现在已经得到了乘积的格蕴涵子代数的具体形式，由滤子、LI-理想的结构性质，我们可以通过定理 6 得到乘积格蕴涵子代数的滤子和 LI-理想的具体形式。

结束语 本文进一步研究了格蕴涵代数中各种滤子间的关系，得到的几种滤子是相互等价的。讨论了乘积格蕴涵代数子结构的性质，得到了乘积格蕴涵代数的滤子只存在平凡滤子和素滤子的结论。通过使用 MATLAB 软件编程，得到了两个有限链型格蕴涵代数乘积的子代数、滤子、LI-理想的具体形式，并且通过一个例子，展示了程序的运行结果。格蕴涵代数是一类重要的逻辑代数，与其它逻辑代数有密切的关系，如何通过它们的子结构挖掘出它们之间的关系，是我们下一阶段的主要研究工作。

参考文献

[1] Xu Yang, Qin Keyun. Lattice properties of lattice implication algebra[C]// Symposium on Applied Mathematics. Chengdu Science and Technology University Press, 1992: 54-58

[2] 徐扬. 格蕴涵代数[J]. 西南交通大学学报, 1993, 28(1): 20-27

[3] Song Zhenming, Wang Jianping. Lattice implication homomorphism in implication filter spaces[J]. Chinese Quarterly Journal of Mathematics, 1998, 13(4): 17-23

[4] Jun Y B, Roh E H, Xu Y. LI-ideals in lattice implication algebras [J]. Bull Korean Math. Soc, 1998, 35(1): 13-24

[5] Jun Y B, Xu Yang, Qin Keyun. Positive implicative and associative filters of lattice implication algebras[J]. Bull Korean Math. Soc, 1998, 35(1): 53-61

[6] 刘军. 基于格蕴涵代数的格值逻辑系统及格值归结原理的研究[D]. 成都：西南交通大学, 1998

[7] 秦克云, 徐扬. 格蕴涵代数的超滤[J]. 西南交通大学学报, 1999, 34(1): 51-54

[8] 刘卫国, 陈昭平, 张颖. MATLAB 程序设计与应用[M]. 北京：北京高等教育出版社, 2002

[9] Xu Yang, Ruan D, Qin Keyun, et al. Lattice-Valued Logic[M]. Berlin: Spring-Verlag, 2003

[10] Liu Yong-lin, Liu San-yang, Xu Y, et al. ILI-ideals and prime LI-ideals in lattice implication algebras[J]. Information Sciences, 2003, 155: 157-175

[11] 朱华. 格蕴涵代数中滤子和理想的研究[D]. 成都：西南交通大学, 2005

[12] Ma Jun, Xu Yang. On structure and complementary elements of lattice implication algebra[J]. Fuzzy Mathematics and Systems, 2005, 19(1): 49-56

[13] Xu Yang, Chen Shuwei, Ma Jun. Linguistic truth-valued lattice implication algebra and its properties[C]// IMACS Multiconference on CESA. Beijing, October 2006

[14] Jun Y B, Yang Xu, Ma Jun. Redefined fuzzy implicative filters [J]. Information Sciences, 2007, 177(6): 1422-1429

[15] Xu Yang, Ma Jun, Lai Jiajun. Sub-algebras of finite lattice implication algebra[C]// Theoretical Advances and Applications of Fuzzy Logic and Soft Computing, ASC 42. 2007: 813-821

[16] Lai Jiajun, Xu Yang. On WLI-ideal space and the properties of WLI-ideals in lattice implication algebra[C]// Korean Society for Computational and Applied Mathematics 2008, J Appl Math Comput. 2009, 31: 113-127

[17] Xu Yang, Qin Keyun. On filters of lattice implication algebras [J]. The Journal of Fuzzy Mathematics, 1993, 1(2): 251-260