

一种基于粗糙集理论的规则提取方法

鄂 旭^{1,2,3} 邵良杉² 张毅智¹ 杨 芳⁴ 李 晗¹ 杨佳欣³

(辽宁工业大学电子与信息工程学院 锦州 121001)¹ (辽宁工程技术大学资源与环境学院 阜新 123000)²
(辽宁工程技术大学营销管理学院 葫芦岛 125105)³ (辽宁工业大学艺术与建筑学院 锦州 121001)⁴

摘 要 规则提取是实现智能信息系统的重要环节,也是一个难点。针对信息系统中的规则提取问题,提出了一种基于粗糙集的研究方法,并对规则提取涉及到的属性约简、属性值约简等问题进行了研究。根据粗糙集中的不可分辨关系建立了可辨识向量,以利用可辨识向量的加法法则运算求得核属性以及属性重要性,然后以核属性为基础、属性重要性为启发信息,求得信息表的一个属性约简。在此基础上,利用条件属性与决策属性之间的对应关系,对信息表中的每条规则通过删除冗余属性值来完成信息表的属性值约简,最终实现规则提取。数值实例和试验表明本算法是有效、可行的。

关键词 粗糙集,信息系统,规则提取,属性约简,属性值约简

中图法分类号 TP311 **文献标识码** A

Method of Rule Extraction Based on Rough Set Theory

E Xu^{1,2,3} SHAO Liang-shan² ZHANG Yi-zhi¹ YANG Fang⁴ LI Han¹ YANG Jia-xin³
(Electronic & Information Engineering College, Liaoning University of Technology, Jinzhou 121001, China)¹
(School of Resources and Environment Engineering, Liaoning Technical University, Fuxin 123000, China)²
(School of Marketing Management, Liaoning Technical University, Huludao 125105, China)³
(Art Design and Constructure School, Liaoning University of Technology, Jinzhou 121001, China)⁴

Abstract Rule extraction is an very important and difficult process for an intelligent information system. To deal with the problem, the paper proposed a method based on rough set theory, researched attribute reduction, attribute values reduction and so on. According to the indiscernible relation in rough set, discernible vector and its addition rule were defined to calculate the core attributes and all attributes' importance. The core attributes set was taken as the start point to obtain an attributes reduction set by using the attributes' importance as the heuristic information. Based on the attributes reduction set, attribute value reduction was realized through gradually deleting the redundant attribute values in every rule of the information table depending on the correlation of condition attributes and decision attributes. Finally, a concise rule set was obtained. The illustration and experiment results indicate that the method is effective and efficient for rule extraction.

Keywords Rough set, Information system, Rule extraction, Attribute reduction, Attribute value reduction

1 引言

规则提取是实现智能信息系统的重要组成步骤。原始数据本身并不是真正的信息,在大量的原始数据信息中挖掘出隐藏在数据中的知识、规则才是有用的信息,我们把从大量的原始数据信息中发现有用的规律信息叫做知识获取。粗糙集理论为规则获取提供了一条出路。基于粗糙集理论的规则获取主要是借助于信息表这样一种有效的知识表达方式,对数据进行属性约简、属性值约简,直至形成决策规则。

粗糙集理论^[1]是一种处理不确定、不完备知识的理论,由于具有不需要先验知识的特点,粗糙集理论相对于其它处理不确定知识的方法,更具有实用性。尤其是近几年,由于在数据挖掘、规则获取、决策支持等方面的广泛应用^[2],粗糙集理

论正日益受到重视且日趋完善,粗糙集已经逐渐成为学术界研究的一个热点^[3-4]。规则提取是粗糙集理论研究中的一项重要内容,它包括属性约简和属性值约简。目前国内外学者已经提出的许多有关属性约简和属性值约简的方法,如 Hu 等人^[5]、Jelonek 等人^[6]提出的基于分辨矩阵的属性约简方法;苗夺谦等人提出的基于信息熵概念^[78]的属性约简算法等;常犁云等^[9]提出了属性值约简方法。人们试图能够找到最佳属性约简和属性值约简,然而 S. K. M. Wong 和 W. Ziarko 等人已经证明求解最佳属性约简问题和属性值约简问题都是 NP-hard 问题^[10],目前还没有一种公认、有效的方法。主要问题是:计算求解核属性、核值的过程复杂,候选属性和属性值数目过多,极易造成组合爆炸^[8-10]。

本文借鉴了传统属性约简及属性值约简的一些优点,以

到稿日期:2010-03-03 返修日期:2010-05-02 本文受国家自然科学基金项目(70771007,70971059),辽宁省高等院校创新团队项目(2008T090),辽宁省博士科研启动基金资助项目(20091034),中国博士后基金项目(20100471475)资助。

鄂 旭(1971—),男,博士,教授,主要研究方向为数据挖掘与机器视觉,E-mail:exu21@163.com。

粗糙集理论为基础,提出了一种新的规则提取方法。

2 相关概念及定理

2.1 粗糙集相关概念

粗糙集理论中包含很多概念,具体内容可以参见文献[3, 4]。为了更好地描述本文提出的属性约简算法,下面定义几个相关的概念。

定义 1 设决策表为 $s=(U, A, V, f)$, 其中论域 $U=\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ 是一个非空有限对象集合; A 是对象的属性集合, 分别由条件属性集 $C=\{a_i | i=1, \dots, m\}$ 和决策属性集 $D=\{d\}$ 两个不相交的子集组成, 即 $A=C \cup D$ 且 $C \cap D=\emptyset$ 。

定义 2 在决策表 $s=(U, A, V, f)$ 中, 对于 $\forall x \in U$, 用 $des([x]_c)$ 表示等价类 $[x]_c$ 对于各条件属性值的特定取值, 用 $des([x]_d)$ 表示等价类 $[x]_d$ 对于决策属性值的特定取值, 则决策规则 dr_x 可定义为

$$dr_x: des([x]_d) \rightarrow des([x]_c)$$

定义 3 在决策表 $s=(U, A, V, f)$ 中, 对于任意属性子集 $B \subseteq C$, 决策规则 dr_x 关于属性子集 B 的支持度 $\mu(dr_x, B)$ 可定义为

$$\mu(dr_x, B) = \frac{|[x]_B \cap [x]_D|}{|[x]_B|}$$

定义 4 在决策规则 dr_x 中, 对于任意属性子集 $B \subseteq C$, 设属性 $a \in B$, 则 a 的属性值 $dr_x(a)$ 的重要性 $sig(dr_x(a), B)$ 定义为

$$sig(dr_x(a), B) = \mu(dr_x, B \cup \{a\}) - \mu(dr_x, B)$$

式中, 若 $B=\emptyset$, 则令 $\mu(dr_x, B)=1$ 。

定义 5 在决策表 $s=(U, A, V, f)$ 中, $a_i(x_j)$ 是样本 x_j 在属性 a_i 上的取值, 则可定义一个三元组作为可辨识向量。

$$DV=(O, DC, F)$$

式中, O 为可区分对象对; DC 为差别属性集; F 为一个频率向量, $F=(f(a_1), f(a_2), \dots, f(a_n))$, 它的每一项表示该属性出现的频率。其中,

$$DC = \begin{cases} \{a_k | a_k \in C \wedge a_k(x_i) \neq a_k(x_j)\}, & d(x_i) \neq d(x_j) \\ 0, & d(x_i) = d(x_j) \end{cases}$$

$$f(a_i) = \begin{cases} 1/|DC|, & a_i \in DC \\ 0, & a_i \notin DC \end{cases}$$

由定义可以看出 $f(a_i)$ 越大, 属性 a_i 的重要性越强。可以借助上面的定义, 把一个给定的信息表转化成与其等价的可辨识向量组, 即 $DVT=(DV_1, DV_2, \dots, DV_n)$, 其中它的任一项元素 $DV_i=(O_i, DC_i, F_i)$, n 为可区分对象对的个数。

定义 6 设两个可辨识向量 $DV_i=(O_i, DC_i, F_i)$, $DV_j=(O_j, DC_j, F_j)$, 可辨识向量加法法则可以定义为

$$DV_i + DV_j = (O_{ij}, DC_{ij}, F_{ij})$$

式中, $O_{ij}=O_i \cup O_j$

$$F_{ij} = F_i + F_j = (f_i(a_1) + f_j(a_1), f_i(a_2) + f_j(a_2), \dots, f_i(a_n) + f_j(a_n))$$

$$DC_{ij} = \begin{cases} DC_i, & DC_i \subseteq DC_j; \\ DC_j, & DC_j \subseteq DC_i; \\ DC_i \cup DC_j, & (DC_i \not\subseteq DC_j) \cap (DC_j \not\subseteq DC_i) \end{cases}$$

2.2 相关定理证明

根据上述定义及可辨识向量加法法则, 可以得到如下定理:

定理 1 在一个可辨识向量中, 如果它的频率向量中的某一项元素取值为 1, 则该元素所对应的属性为原信息表的核属性。

证明: 可辨识向量中的差别属性集只有一个属性, 而在整个属性集合中也只有这个属性能够区分这两个对象, 因此这个属性就是原信息表的核属性。

定理 2 在可辨识向量组中, 每个可辨识向量的差别属性集合取值为全属性, 则任一个属性都是原信息表的属性约简。

证明: 设原信息表中任意两个可分辨对象转化的可辨识向量为 $DV_i=(O_i, DC_i, F_i)$, 则整个信息表转化的可辨识向量组为 $DVT=(OT, DCT, FT)$, 即 $DVT=\bigcup_{i=1}^n DV_i$ 。如果信息表中的全部属性为 $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, 由题意知, $\forall i \in n$, 都有 $DC_i=\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ 。由于每一个差别集合在数理逻辑中是析取关系, 即 $DC_i=a_1 \vee a_2 \vee \dots \vee a_n$, 又根据可辨识向量组和信息表的对应关系可知, 整个可辨识向量组中各个可辨识向量集合是一种逻辑合取关系, 即逻辑表达式为 $\bigwedge_{i=1}^n DC_i=(a_1 \vee a_2 \vee \dots \vee a_n) \wedge (a_1 \vee a_2 \vee \dots \vee a_n) \wedge \dots \wedge (a_1 \vee a_2 \vee \dots \vee a_n)=(a_1 \vee a_2 \vee \dots \vee a_n)$ 。因此, $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ 中的任意一个元素都将是原信息表的一个属性约简。证明完毕。

定理 3 在可辨识向量组中任取两个可辨识向量 DV_i, DV_j 做加法运算, 如果它们的差别属性集合为 DC_i, DC_j , 且存在 $DC_i \subseteq DC_j$, 则用 DC_i 作为它们相加后的差别属性集合不会改变原信息表的属性约简。

证明: 设 $DC_i=\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$, $DC_j=\{a_1, a_2, \dots, a_m, a_{m+1}, \dots, a_{n-1}, a_n\}$, 由可辨识向量构造的方法可知, 每一个差别属性集合在数理逻辑中是析取关系, 即 $DC_i=(a_1 \vee a_2 \vee \dots \vee a_m)$, $DC_j=(a_1 \vee a_2 \vee \dots \vee a_m \vee a_{m+1} \vee \dots \vee a_{n-1} \vee a_n)$ 。而根据可辨识向量组和信息表的对应关系可知, 这两个差别属性集合在求解属性约简过程中是一种逻辑合取关系, 即逻辑表达式为

$$\begin{aligned} DC_i \wedge DC_j &= (a_1 \vee a_2 \vee \dots \vee a_m) \wedge (a_1 \vee a_2 \vee \dots \vee a_m \vee a_{m+1} \vee \dots \vee a_{n-1} \vee a_n) \\ &= (a_1 \vee a_2 \vee \dots \vee a_m) \wedge ((a_1 \vee a_2 \vee \dots \vee a_m) \vee (a_{m+1} \vee \dots \vee a_{n-1} \vee a_n)) \\ &= ((a_1 \vee a_2 \vee \dots \vee a_m) \wedge (a_1 \vee a_2 \vee \dots \vee a_m)) \vee ((a_1 \vee a_2 \vee \dots \vee a_m) \wedge (a_{m+1} \vee \dots \vee a_{n-1} \vee a_n)) \\ &= (a_1 \vee a_2 \vee \dots \vee a_m) = DC_i \end{aligned}$$

定理 3 证明完毕。

3 规则提取求解思想

在粗糙集理论中, 规则提取包括属性约简和属性值约简。属性约简是粗糙集理论中决策规则抽取最重要的手段, 是原始属性集的一个最小子集, 并且这个子集具有和整个属性集同样的分类能力。学术界已经证明属性约简问题是一个 NP 问题, 因此求得一个信息系统的属性约简问题可以利用属性重要性作为启发信息求得。基本思路是, 首先利用条件属性与决策属性的对应关系求得信息系统核集, 以此作为属性约简集的基础, 然后按照属性的重要程度从大到小逐个加入属性, 直到新属性约简集与原始属性集的分类能力相等为止。

在规则提取中,一般是属性约简之后进行信息表冗余属性值的剔除。在信息系统中,每一个实例代表一条决策规则。但是决策规则中每个条件属性的取值不一定是必要的。属性约简就是要消去决策规则中的不必要条件属性值,使得原有的信息表变得更加精炼,蕴含的规则更加突出。属性值约简需要计算每条规则的核值和简化属性值集。最终决策规则形式为

$$dr_x: des([x]_d) \rightarrow des([x]_d)$$

4 规则提取算法描述

设属性约简集为 P , 并初始化 $P = \emptyset$; 计算原信息表的分类质量 E^0 。

Step1 根据原始信息表建立可辨识向量组, 对向量组进行一次扫描, 生成扫描向量 $S = (C, DF, R)$, C 为核属性集, DF 为差别属性集, R 为频率集。

Step2 从扫描向量中提取核属性集, 然后按照属性的重要程度从大到小逐个加入属性, 直到新属性约简集与原始属性集的分类能力相等为止。即计算信息表分类质量 E , 如果 $E \geq E^0$, 则属性约简过程结束。

Step3 在信息表 S 的条件属性集中保留集合 P 所对应的列, 其余条件属性列全部删除掉。

Step4 依次对信息表中的各决策规则作如下处理: 假设 $P \rightarrow Q$ 为 C, D 规则, 且 $a \in C$,

1) 当且仅当 $P \rightarrow Q$ 蕴含 $(P - \{a\}) \rightarrow Q$, 则属性 a 在规则 $P \rightarrow Q$ 中是冗余的, 在决策表中删除其属性及属性值。

2) 否则, 属性 a 在规则 $P \rightarrow Q$ 中是必要的, 在决策表中保留其属性及属性值。

3) 在规则中依次删除重要性最小的属性值, 直至规则发生冲突为止。

Step5 经过属性值约简后的各个决策规则即为我们所要提取的决策规则。

5 算例

为了说明本算法, 现在举例说明其运算过程。设原始信息表为表 1。

表 1 原始信息表

U	a	b	c	d	D
x1	1	1	0	1	1
x2	1	0	0	1	1
x3	0	0	0	1	0
x4	1	1	1	1	0
x5	1	2	1	1	2
x6	2	2	2	1	2
x7	2	2	2	2	2

把原始信息表转换成可辨识向量组, 其中每一项 $DV_i = (O_i, DC_i, F_i)$, 具体表示如表 2 所列。

经计算可得原信息表分类质量 $E^0 = E(C, D) = 1$ 。然后对可辨识向量组中的可辨识向量进行扫描, 并按上述定义的可辨识向量加法法则进行加法计算。因为表 2 中可辨识向量 DV_2 中 $f(c) = 1, DV_6$ 中 $f(a) = 1, DV_{14}$ 中 $f(b) = 1$, 所以扫描向量中的核属性项 $C = \{a, b, c\}$ 。令 $P = P \cup \{a, b, c\}$, 计算信息表的分类质量可得 $E(P, D) = E(C, D) = E^0 = 1$ 。所以, $P = \{a, b, c\}$ 就是原信息表的最小属性约简。属性约简后的信息

表如表 3 所列。

表 2 可辨识向量组

O	DC	F
(x1, x3)	(a, b, c)	(1/3, 1/3, 1/3, 0)
(x1, x4)	(c)	(0, 0, 1, 0)
(x1, x5)	(b, c)	(0, 1/2, 1/2, 0)
(x1, x6)	(a, b, c)	(1/3, 1/3, 1/3, 0)
(x1, x7)	(a, b, c, d)	(1/4, 1/4, 1/4, 1/4)
(x1, x7)	(e, f)	(0, 0, 0, 0, 1/2, 1/2)
(x2, x3)	(a)	(1, 0, 0, 0)
(x2, x4)	(b, c)	(0, 1/1, 1/2, 0)
(x2, x5)	(b, c)	(0, 1/1, 1/2, 0)
(x2, x6)	(a, b, c)	(1/3, 1/3, 1/3, 0)
(x2, x7)	(a, b, c, d)	(1/4, 1/4, 1/4, 1/4)
(x3, x5)	(a, b, c)	(1/3, 1/3, 1/3, 0)
(x3, x6)	(a, b, c)	(1/3, 1/3, 1/3, 0)
(x3, x7)	(a, b, c)	(1/3, 1/3, 1/3, 0)
(x4, x5)	(b)	(0, 1, 0, 0)
(x4, x6)	(a, b, c)	(1/3, 1/3, 1/3, 0)
(x4, x7)	(a, b, c, d)	(1/4, 1/4, 1/4, 1/4)

表 3 属性约简后的信息表

U	a	b	c	D
x1	1	1	0	1
x2	1	0	0	1
x3	0	0	0	0
x4	1	1	1	0
x5	1	2	1	2
x6	2	2	2	2
x7	2	2	2	2

表 3 中第 6 条规则与第 7 条规则相同, 故删除第 7 条规则。在表 3 中取第一个规则进行属性值约简:

$$a(1) \wedge b(1) \wedge c(0) \rightarrow D(1)$$

$$a(1) \cap b(1) \not\subseteq D$$

$$a(1) \cap c(0) \subseteq D$$

$$b(1) \cap c(0) \subseteq D$$

由此可见, 第 1 条规则中的核值为 $c(0)$, 提取的规则为 $a(1)c(0) \rightarrow D(1)$ 。

表 4 从 Iris 数据集中提取的决策规则

序号	提取的规则	准确性	覆盖率
1	petal-length([1.0, 2.5]) $\rightarrow$ class(Iris-setosa)	1.0	1.0
2	petal-length([2.5, 4.5]) $\rightarrow$ class(Iris-versicolor)	1.0	0.58
3	sepal-width([3.9, 4.4]) $\rightarrow$ class(Iris-setosa)	1.0	0.12
4	petal-length([4.5, 5.0]) AND petal-width([0.1, 1.6]) $\rightarrow$ class(Iris-versicolor)	1.0	0.32
5	petal-length([4.5, 5.0]) AND sepal-width([3.0, 3.9]) AND sepal-length([4.3, 5.9]) $\rightarrow$ class(Iris-versicolor)	1.0	0.06
6	petal-length([5.0, 6.9]) AND petal-width([0.1, 1.6]) $\rightarrow$ class(Iris-virginica)	1.0	0.06
7	sepal-length([4.3, 5.9]) AND petal-length([5.0, 6.9]) $\rightarrow$ class(Iris-virginica)	1.0	0.1
8	sepal-length([4.3, 5.9]) AND petal-width([1.6, 1.8]) $\rightarrow$ class(Iris-virginica)	1.0	0.02
9	sepal-length([6.0, 6.8]) AND petal-width([1.6, 1.8]) $\rightarrow$ class(Iris-versicolor)	1.0	0.08
10	sepal-length([6.0, 6.8]) AND petal-length([5.0, 6.9]) $\rightarrow$ class(Iris-virginica)	1.0	0.46
11	sepal-length([6.8, 7.9]) AND petal-width([1.8, 2.5]) $\rightarrow$ class(Iris-virginica)	1.0	0.34
12	sepal-length([6.8, 7.9]) AND petal-length([4.5, 5.0]) $\rightarrow$ class(Iris-versicolor)	1.0	0.06
13	sepal-width([2.0, 3.0]) AND petal-width([1.8, 2.5]) $\rightarrow$ class(Iris-virginica)	1.0	0.34

同理,可以求得表3中的决策规则为:

规则1 $a(1)c(0) \rightarrow D(1)$

规则2 $a(1) \vee b(1), c(1) \rightarrow D(0)$

规则3 $b(2) \rightarrow D(2)$

以上提取的规则正确率和覆盖率均为100%。

为了进一步验证本算法,本文从UCI机器学习数据库中选取了著名的Iris数据集进行试验。Iris数据集只包含有连续属性的数据,每个实体包含有petal-length, petal-width, sepal-length, sepal-width共4个连续型属性;该数据库中共有150个实体,共分为Iris-setosa, Iris-versicolor, Iris-virginica共3个类别。经过本算法处理后,得到的规则如表4所列。

结束语 本文就规则提取中的属性约简和属性值约简问题进行了研究。应用粗糙集中的不可分辨关系将原始信息表转换成可辨识向量组,利用可辨识向量加法运算实现属性约简。同时又根据属性值在规则中的重要性,实现规则提取。从数值实例和数据库的运算结果可以看出本算法是有效可行的。

参考文献

[1] Pawlak Z. Rough Set[J]. International Journal of Computer and

Information Science[J]. 1982(1):341-356

[2] 武森,高学东, Bastian M. 数据仓库与数据挖掘[M]. 冶金工业出版社,2003

[3] 王国胤. Rough集理论与知识获取[M]. 西安:西安交通大学出版社,2003

[4] 张文修,吴伟志,梁吉业,等. 粗糙集理论与方法[M]. 北京:科学出版社,2001

[5] Hu X H, Cerccone N. Learning in relational databases: a rough set approach[J]. Computational Intelligence, 1995, 11(2): 323-337

[6] Jelonek J, Krawiec K, Slowinski R. Rough set reduction of attributes and their domains for neural networks[J]. Computational Intelligence, 1995, 11(2): 339-347

[7] 苗夺谦,胡桂荣. 知识约简的一种启发式算法[J]. 计算机研究与发展, 1999, 36(6): 681-684

[8] 孟庆生. 信息论[M]. 西安:西安交通大学出版社,1986

[9] 常犁云,王国胤,吴渝. 一种基于 Rough set 理论的属性约简及规则提取方法[J]. 软件学报, 1999, 10(11): 1206-1211

[10] Ohrn A. Discernibility and Rough Sets in Medicine: Tools and Applications[D]. N-749 Trondheim, Norway: Norwegian University of Science and Technology, Department of Computer and Information Science, 1999: 53

(上接第213页)

上层采取何种攻击策略,下层目标函数值都是相同的,即此时模型退化为单层中断问题。也就是说本文提出的双层模型扩大了原有中断模型的应用范围。

综上所述,策划对敌网络系统实施空袭时,应用基于双层主从决策的多机协同关键设施攻击模型能够在一定程度上有效解决多机攻击任务分配的优化决策问题。模型中上层决策对下层目标值的影响显著,说明在敌方防御火力会对己方战机造成伤害的前提下,决策者在策划空袭任务时,只有充分预估机群可能的执行情况,才能尽量避免己方资源不必要的损失,同时高质量地完成任务;而下层目标在某些情况下会与上层目标发生较大冲突,如果决策者采取某些手段使模型特定参数发生变化,则可以改善这一矛盾,使上下层目标趋于一致,进而使整体(预期)空袭效果更优。

结束语 本文对空袭作战环境下网络关键设施节点的攻击问题进行了新的研究。考虑空袭任务执行者的自主性,提出了基于双层主从决策的多机协同关键设施攻击模型。模型在现有中断问题的基础上,通过引入上下层主从决策关系,在下层规划中对机群的战场生存几率和任务执行质量进行分析和建模,使其能够依据敌方网络火力的布防情况自主选择是否绕开目标节点以避免自身损失过重,从而优化整体空袭策略。文中构造实例验证了模型的可行性和有效性,研究了模型参数变化与上下层利益冲突的关系,分析了模型和原单层中断模型相比在实际应用中的优势,证明了本模型能够对真实空袭实战策划的制定有一定的帮助。考虑到实际空袭问题中所涉及的数据量可能要远远大于文中举例,目前算法的计算效率较低,本文下一步要进行的工作是研究更为快速高效模型的求解算法。

参考文献

[1] 张寒梅. 高技术空袭下重点经济目标的防护[J]. 中国高新技术企业, 2008, 16: 132-132

[2] Woilmer R. Removing Arcs from a Network[J]. Operations Re-

search, 1964, 12(6): 934-940

[3] Wood R K. Deterministic network interdiction [J]. Mathematical and Computer Modeling, 1993, 17: 1-18

[4] Cormican K J, Morton D P, Wood R K. Stochastic network interdiction[J]. Operations Research, 1998, 46(2): 184-197

[5] Fulkerson D R, Harding G C. Maximizing the minimum source-sink path subject to a budget constraint[J]. Mathematical Programming, 1977, 13: 116-118

[6] Israeli E, Wood R K. Shortest-path network interdiction [J]. Networks, 2002, 40: 97-111

[7] Church R L, Scaparra M P, Middleton R S. Identifying critical infrastructure: the median and covering facility interdiction problems[J]. Annals of the Association of American Geographers, 2004, 94(3): 491-502

[8] 杨磊,张敏. 基于P-中位模型的网络关键设施识别问题的算法设计与实现[J]. 管理科学, 2008, 21(4): 46-53

[9] Church R L, Scaparra M P. Protecting critical assets: the r-interdiction median problem with fortification[J]. Geographical Analysis, 2006

[10] Scaparra M P, Church R L. A bilevel mixed program for critical infrastructure protection planning[J]. Computers & operations research, 2008, 35: 1905-1923

[11] 王世伟. 最坏失效状况下的P中值选址问题研究[D]. 武汉:华中科技大学, 2009

[12] Bard J F. Practical bilevel optimization: algorithms and applications[M]. USA: Kluwer Academic Publishers, 1998

[13] 张苗. 基于双层规划的多目标校车路径优化研究[D]. 四川:西南交通大学, 2008

[14] Church R L, Cohon J L. Multiobjective location analysis of regional energy facility siting problems[R]. BNL 50567. US Energy Research and Development Administration. 1976

[15] 王广民,万仲平. 二(双)层规划综述[J]. 数学进展, 2007, 36(5): 513-529

[16] Cruz J B Jr, Simmaan M A. Moving Horizon Nash Strategies for a Military Air operation[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2002, 38(3): 989-998