

基于判断聚合逻辑的偏好聚合分析

代利 唐晓嘉

(西南大学政治与公共管理学院逻辑与智能研究中心 重庆 400715)

摘要 如何将个体理性偏好聚合为群体理性偏好是社会理性认知研究面临的主要难题,判断聚合研究为偏好聚合问题的分析提供了新思路。从逻辑的视角探究判断聚合与偏好聚合之间的关系,分析了判断聚合模态逻辑 JAL ,证明利用一阶逻辑语言基于 JAL 可以构建一个偏好聚合的模态逻辑 $JAL(L^K)$,以将偏好聚合转化为判断聚合来处理,因而判断聚合模型更具一般性。

关键词 理性,偏好聚合,判断聚合,模态逻辑

中图法分类号 B819 **文献标识码** A

Analysis of Preference Aggregation Based on Judgment Aggregation Logic

DAI Li TANG Xiao-jia

(Institute of Logic and Intelligence, School of Political Science and Public Management, Southwest University, Chongqing 400715, China)

Abstract How to aggregate individual rational preference into collective rational preference is the main problem faced by the cognitive study of social rationality. The research about judgment aggregation brings about new ideas for analyzing preference aggregation questions. The close connection between judgment aggregation and preference aggregation was investigated from the logic perspective. After the analysis of the judgment aggregation logic JAL , it was proved that the modal logic $JAL(L^K)$ of preference aggregation could be constructed based on JAL in the language of first-order logic, thus preference aggregation questions could be changed into judgment aggregation questions, and the generality of the judgment aggregation model was illustrated.

Keywords Rationality, Preference aggregation, Judgment aggregation, Modal logic

社会理性认知研究中的一个主要难题是:如何将个体理性聚合起来形成群体理性以奠定群体决策的理性基础。美国著名经济学家阿罗(Kenneth Arrow)^[3]以公理化的方法刻画了个体理性偏好与群体理性偏好,并在此基础上证明将理性个体偏好聚合为理性群体偏好的不可能性。如何理解刻画这种不可能性以期化解,并寻求合理的群体理性聚合方法成为相关研究必须突破的理论瓶颈,近年出现的判断聚合研究为这一问题的突破提供了新思路。判断聚合从逻辑的视角更一般地研究聚合,探讨如何将多个一致的逻辑公式集聚合成一个一致的逻辑公式集。已有研究(如文献[6,12,13]等)表明:判断聚合与偏好聚合之间有着密切联系,判断聚合中也存在与阿罗定理类似的不可能性结论。与偏好聚合相比较,判断聚合在模型检测复杂性方面具有优势(如文献[1,2]等),从而为计算机自动化处理社会群体理性认知问题提供了前期准备。本文试图从逻辑的视角分析判断聚合与偏好聚合之间的关系,论证判断聚合模型相对偏好聚合模型的理论优势。我们将首先梳理偏好聚合与判断聚合的一些基本概念,然后重点分析一个判断聚合的模态逻辑 JAL ,利用一阶逻辑的语言基于 JAL 可以构建一个偏好聚合的逻辑系统 $JAL(L^K)$,以将偏好聚合转化为判断聚合来处理,进而突显判断聚合模型

的一般性。

1 偏好聚合与判断聚合

偏好聚合由社会福利函数(social welfare function)描述,它关注的中心是:当每个个体都被给定一个偏好关系时,如何将这些个体的偏好关系聚合成一个群体的偏好关系。判断聚合是从逻辑的视角更一般地研究聚合,它关注的中心是:当每个个体都被给予一个代表它们判断的一致逻辑公式集时,如何通过判断聚合规则(judgment aggregation rule),将这些逻辑公式集聚合成代表群体判断的一个一致逻辑公式集。

1.1 社会福利函数

社会福利函数是指这样一个过程或规则:以每个个体的偏好关系为输入,输出一个代表群体偏好的偏好关系。令 $K = \{a, b, c, \dots\}$ 表示一个备选方案的集合(一般假定至少有2个备选方案), $N = \{1, 2, \dots, n\}$ 表示一个有 n 个主体的主体集(一般假定至少有2个主体), R 表示 K 上的一个偏好关系, R_i 表示一个主体 i 的偏好关系, n 元组 $(R_1, R_2, \dots, R_n)$ 就是一个偏好组合。用 $L(K)$ 表示 K 上所有偏好关系的集合,则 $L(K)^n$ 是所有偏好组合的集合。一个社会福利函数就是一个以 $L(K)^n$ 为定义域、以 $L(K)$ 为值域的函数。

到稿日期:2011-08-15 返修日期:2011-12-01 本文受教育部社科规划项目(10YJA7204000)资助。

代利(1977—),男,博士生,主要研究方向为现代逻辑与人工智能等,E-mail:daili227@163.com;唐晓嘉(1954—),女,教授,博士生导师,主要研究方向为现代逻辑与人工智能等,E-mail:tangxj@swu.edu.cn(通信作者)。

$$F: L(K)^n \rightarrow L(K)$$

阿罗社会福利函数的一个基本假设是：作出偏好选择的所有主体与群体都是理性的。阿罗^[3]用偏好关系 R 必须具有的如下性质来定义理性¹⁾：

(1) 非对称性：对于任意两个备选方案 $x, y \in K$ ，如果 xRy ，那么并非 yRx 。 xRy 表示“ x 优于 y ”，也可记作 $(x, y) \in R$ 。

(2) 传递性：对于任意 3 个备选方案 $x, y, z \in K$ ，如果 xRy 并且 yRz ，那么 xRz 。

(3) 完全性：对于任意两个备选方案 $x, y \in K$ ，如果 $x \neq y$ ，那么 xRy 或者 yRx 。

阿罗^[3]指出：一个社会福利函数 F 还应该满足以下合理条件：

(1) 无关选项独立性 IIA (Independence of Irrelevant Alternatives)：群体对于任意两个备选方案的偏好排序仅仅依赖于个体们对这两个备选方案的偏好排序，与其他因素无关。可用公式表示为：

$$\forall (R_1, \dots, R_n) \in L(K)^n \quad \forall (S_1, \dots, S_n) \in L(K)^n \quad \forall a \in K \quad \forall b \in K (\forall i \in N (aR_i b \Leftrightarrow aS_i b) \Rightarrow (aF(R_1, \dots, R_n) b \Leftrightarrow aF(S_1, \dots, S_n) b))$$

(2) 帕累托最优原则 PO (Pareto optimality principle)：如果所有个体都认为一个备选方案优于另一个，那么群体也应同样如此认为。可用公式表示为：

$$\forall (R_1, \dots, R_n) \in L(K)^n \quad \forall a \in K \quad \forall b \in K (\forall i \in N (R_i b \Rightarrow aF(R_1, \dots, R_n) b))$$

(3) 非独裁性 ND1 (non-dictatorship)：不应使某个固定个体的偏好总是成为群体的偏好，而不管其他个体的偏好与之是如何不同。可用公式表示为：

$$\neg \exists i \in N \forall (R_1, \dots, R_n) \in L(K)^n F(R_1, \dots, R_n) = R_i$$

上述条件看上去是自然而合理的：理性群体的决策应基于其中所有理性个体的选择并与之保持一致，因此无关选项独立性与帕累托最优原则应该被满足；理性群体的决策应该是公平、公正的，因此非独裁性应该被满足。然而阿罗在《社会选择与个人价值》(Social Choice and Individual Values)一书中证明了一个令人惊讶的结论：

定理 1 (阿罗定理) 如果 $|K| \geq 3$ ，那么不存在同时满足 IIA、PO 及 ND1 这 3 个条件的社会福利函数。

对于阿罗不可能性定理的证明可参见文献[3]。阿罗定理断定了把理性个体偏好聚合为理性群体偏好的不可能性，它从偏好聚合的层面揭示了将个体理性聚合为群体理性是不可能的。

1.2 判断聚合规则

一个判断聚合规则是指这样一个过程或规则：以代表每个个体判断的多个一致的逻辑公式集为输入，输出一个代表这个群体共同判断的一致的逻辑公式集。令 $N = \{1, 2, \dots, n\}$ 是一个有 n 个主体的主体集（一般假定至少有 2 个主体）， L 是我们所讨论的判断聚合的一个基础逻辑，根据需要 L 可以是命题逻辑、一阶逻辑或认知逻辑等。 L 的语言 $\mathcal{L}(L)$ 具有通

常的逻辑语义。

判断聚合规则的一个基本的假设是：作出判断的所有主体与群体都是理性的。这里的理性是指其作出的判断既是一致的又是完全的，即无论是主体还是群体所作出的判断既不能具有矛盾，并且对于所有待断定的命题都要作出判断。相关概念定义如下：

(1) 议程 (agenda)：令 $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{L}(L)$ 是一个非空集合，如果对于任意一个公式 Φ ， $\Phi \in \mathcal{A}$ 当且仅当 $\neg \Phi \in \mathcal{A}$ ($\neg \Phi$ 表示“并非 Φ ”)，这里假设双重否定可以相互抵消，即 $\neg \neg \Phi$ 就是 Φ ，则称 $\mathcal{A}$ 是基于 L 之上的一个议程。对议程进行这样的规定是为了保证判断聚合中所要断定的命题都在议程中，且是语言 $\mathcal{L}(L)$ 所能够描述的。

议程 $\mathcal{A}$ 的元素被称作议项 (agenda item)。

(2) 一致 (consistent) 性：令 $A \subseteq \mathcal{A}(L)$ 是任一非空集合，如果不存在一个公式 $\Phi \in \mathcal{A}(L)$ ，使得 $A \vdash_L \Phi \wedge \neg \Phi$ ²⁾，则称 A 具有 L -一致性，或称 A 是 L -一致的。

(3) 完全 (complete) 性：如果对于任一不以 $\neg$ 开始的公式 $\Phi \in \mathcal{A}$ ， $\Phi \in A$ 或者 $\neg \Phi \in A$ ，则称 A 具有完全性，或称 A 是完全的。

(4) 判断集 (judgment set)：判断集是与主体与群体相关的，一个 (个体或群体) 判断集是一个一致的且完全的议项集。

判断集的一致性保证了由主体或群体所作出的判断推不出矛盾，判断集的完全性保证了主体或群体对任一议项都能作出判断。规定判断集是一致且完全的是为了保证作出判断的主体或群体都是完全理性的。

(5) 判断组合 (judgment profile)：判断组合是一个由个体判断集构成的 n 元组 $(A_1, \dots, A_n)$ ，其中 A_i ($1 \leq i \leq n$) 表示主体 i 的个体判断集。

(6) 判断聚合规则：令 $J(\mathcal{A}, L)$ 表示议程 $\mathcal{A}$ 上所有判断集的集合， $J(\mathcal{A}, L)^n$ 表示所有判断组合的集合。一个判断聚合规则就是一个以 $J(\mathcal{A}, L)^n$ 为定义域，以 $J(\mathcal{A}, L)$ 为值域的函数。

$$f: J(\mathcal{A}, L)^n \rightarrow J(\mathcal{A}, L)$$

一个判断聚合规则 f 通常应该满足以下合理条件：

(1) 独立性 IND (independence)：群体对于议程中任一议项的判断仅仅依赖于个体们对于这个议项的判断，与其他因素无关。可用公式表示为：

$$\forall p \in \mathcal{A} \forall (A_1, \dots, A_n) \in J(A, L)^n \quad \forall (B_1, \dots, B_n) \in J(A, L)^n (\forall i \in N (p \in A_i \Leftrightarrow p \in B_i) \Rightarrow (p \in f(A_1, \dots, A_n) \Leftrightarrow p \in f(B_1, \dots, B_n)))$$

判断聚合规则的独立性与社会福利函数的无关选项独立性相对应。

(2) 统一性 UNA (unanimity)：如果所有个体都赞同议程中的某个议项，那么群体也应赞同这个议项。可用公式表示为：

$$\forall p \in \mathcal{A} \forall (A_1, \dots, A_n) \in J(A, L)^n (\forall i \in N p \in A_i \Rightarrow p \in f(A_1, \dots, A_n))$$

判断聚合规则的统一性与社会福利函数的帕累托最优原

¹⁾ 这里的偏好关系指的是严格偏好关系，本文下面所讨论的偏好关系都是严格偏好关系。

²⁾ “ $\vdash$ ”是推演符号，表示一种逻辑上的可推演关系。“ $A \vdash_L \Phi$ ”表示在逻辑 L 中存在从公式集 A 到 Φ 的推演， A 被称为前提， Φ 被称为 A 的推论。在 L 明确的情况下一般可省去符号“ $\vdash_L$ ”中的下标 L ，将“ $A \vdash_L \Phi$ ”简记为“ $A \vdash \Phi$ ”。

则相对应。

(3)非独裁性 ND2(non-dictatorship):不应使某个固定个体的判断总是成为群体判断,而不管其他个体的判断与之是如何的不同。可用公式表示为:

$$\rightarrow \exists i \in N \forall (A_1, \dots, A_n) \in J(A, L)^n f(A_1, \dots, A_n) = A_i$$

判断聚合规则的非独裁性与社会福利函数的非独裁性相对应。

与偏好聚合类似,满足上述条件的判断聚合也存在悖论:

判断悖论(discursive paradox) 如果至少有3个主体要对至少2个不同的公式 p, q 以及它们的实质蕴涵式 $p \rightarrow q$ 作出判断,那么运用关于命题的多数投票聚合规则可能会得到一个不一致的群体判断。

可以运用下面的判断聚合逻辑 JAL 对这一命题进行证明。我们将基于判断聚合逻辑 JAL,探讨判断聚合与偏好聚合之间的关系。

2 判断聚合的模式逻辑 JAL

人们对一个逻辑感兴趣的是它的表达力,我们在这里所需要的是一个用于分析判断聚合的逻辑,这个逻辑的语言应该能够表达:一般的聚合规则如多数投票聚合规则等;判断聚合规则的一些通常被讨论的性质如独立性、非独裁性等;判断聚合之中的一些重要结论如判断悖论等。这样的一种逻辑语言似乎非常复杂,而 Thomas Ågones 等^[2]构建的判断聚合逻辑 JAL 的语形、语义都很简单,并且这种语言可以直接用判断聚合规则进行解释,其具有很强的表达力。

2.1 JAL 语形

判断聚合逻辑 JAL 的语言 $\mathcal{L}(N, \mathcal{A})$ 具有两个参数,其中 $N = \{1, 2, \dots, n\}$ 是一个有 n 个主体的主体集, $\mathcal{A}$ 是一个议程。JAL 的原子命题集为:

$$\Pi = \{i, \sigma, hp | i \in N, p \in \mathcal{A}\}$$

式中, σ 是一个常量,表示当前议题为群体所赞同, hp 表示当前议题是 p 。

JAL 语言 $\mathcal{L}(N, \mathcal{A})$ 的(合式)公式递归定义如下:

$$\Phi ::= \alpha | \Box \Phi | \blacksquare \Phi | \Phi \wedge \Phi | \rightarrow \Phi \quad (\alpha \in \Pi)$$

式中, $\Box$ 是与判断组合相关的一个模态词, $\Box \Phi$ 表示 Φ 在所有判断组合中都是真的。 $\blacksquare$ 是与议题相关的一个模态词, $\blacksquare \Phi$ 表示 Φ 对于所有议题来说都是真的。与在经典命题逻辑中一样,命题联结词“ $\vee$ ”、“ $\neg$ ”、“ $\leftrightarrow$ ”都可由“ $\rightarrow$ ”与“ $\wedge$ ”定义。

$\Box$ 和 $\blacksquare$ 的对偶算子定义如下:

$$\Diamond \Phi := \neg \Box \neg \Phi$$

$$\blacklozenge \Phi := \neg \blacksquare \neg \Phi$$

$\Diamond \Phi$ 表示 Φ 在某个判断组合中是真的; $\blacklozenge \Phi$ 表示 Φ 对于某个议题来说是真实的。

2.2 JAL 语义

JAL 语言 $\mathcal{L}(N, \mathcal{A})$ 的公式在一个三元组 $\langle f, \gamma, p \rangle$ 上进行解释,三元组 $\langle f, \gamma, p \rangle$ 被称为一个表(table),其中 f 是一个判断聚合规则, γ 是一个判断组合, p 是一个议题。给定一个表 $\langle f, \gamma, p \rangle$, $\mathcal{L}(N, \mathcal{A})$ 的一个公式 Φ 在这个表上是真的,记作 $f, \gamma, p \models \Phi$,归纳定义如下:

$$(1) f, \gamma, p \models Lhq \text{ 当且仅当 } p = q;$$

$$(2) f, \gamma, p \models Li \text{ 当且仅当 } p \in \gamma_i;$$

$$(3) f, \gamma, p \models L\sigma \text{ 当且仅当 } p \in f(\gamma);$$

$$(4) f, \gamma, p \models L\Box \Psi \text{ 当且仅当 } \forall \gamma' \in J(\mathcal{A}, L)^n f, \gamma', p \models L\Psi;$$

$$(5) f, \gamma, p \models L\blacksquare \Psi \text{ 当且仅当 } \forall p' \in \mathcal{A} f, \gamma, p' \models L\Psi;$$

$$(6) f, \gamma, p \models L\Phi \wedge \Psi \text{ 当且仅当 } f, \gamma, p \models L\Phi \text{ 并且 } f, \gamma, p \models L\Psi;$$

$$(7) f, \gamma, p \models L\neg \Phi \text{ 当且仅当 } f, \gamma, p \not\models L\Phi^{3)}。$$

直观上说,(1)的意思是“公式 hq 在表 $\langle f, \gamma, p \rangle$ 上为真,当且仅当在运用判断聚合规则 f 对判断组合 γ 的聚合中,当下所考虑的议题是 q ”;(2)的意思是“公式 Li 在表 $\langle f, \gamma, p \rangle$ 上为真,当且仅当在运用判断聚合规则 f 对判断组合 γ 的聚合中,议题 p 是主体 i 的个体判断集的元素”;(3)的意思是“公式 σ 在表 $\langle f, \gamma, p \rangle$ 上为真,当且仅当在运用判断聚合规则 f 对判断组合 γ 的聚合中,议题 p 是聚合得到的群体判断集 $f(\gamma)$ 的元素”;(4)的意思是“公式 $\Box \Psi$ 在表 $\langle f, \gamma, p \rangle$ 上为真,当且仅当对于议题 p 来说,在运用判断聚合规则 f 对所有的判断组合的聚合中, Ψ 都是真的”;(5)的意思是“公式 $\blacksquare \Psi$ 在表 $\langle f, \gamma, p \rangle$ 上为真,当且仅当在运用判断聚合规则 f 对判断组合 γ 的聚合中,对于所有议题来说, Ψ 都是真的”。命题联结词“ $\neg$ ”、“ $\wedge$ ”、“ $\vee$ ”、“ $\rightarrow$ ”、“ $\leftrightarrow$ ”与在经典命题逻辑中的语义解释一样。

例1 一个由3位专家组成的讨论组要对以下3个逻辑上相互关联的命题形成一个群体判断(决议):

p :二氧化碳的排放量高于某一限定值 x ;

q :全球将会变暖;

$p \rightarrow q$:如果二氧化碳的排放量高于某一限定值 x ,那么全球将会变暖。

如表1所列,专家1的判断是:赞同 $p \rightarrow q$,反对 p ,也反对 q ;专家2的判断是:赞同 p ,反对 q ,也反对 $p \rightarrow q$;专家3的判断是:对这3个命题都持赞同态度。可见,这3位专家的个体判断都是完全理性的,然而采用多数投票聚合规则聚合后所得到的群体判断却不是理性的。

表1

	p	q	$p \rightarrow q$
专家1	否	否	是
专家2	是	否	否
专家3	是	是	是
f_{maj}	是	否	是

用判断聚合逻辑 JAL 刻画例1:主体集 $N = \{1, 2, 3\}$;议程 $\mathcal{A} = \{p, \neg p, p \rightarrow q, \neg(p \rightarrow q), q, \neg q\}$;基础逻辑 L 为命题逻辑;令 $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ 分别表示专家1、专家2、专家3的个体判断集,由这3位专家的投票所构成的判断组合 $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$,其中 $\gamma_1 = \{\neg p, p \rightarrow q, \neg q\}$, $\gamma_2 = \{p, \neg(p \rightarrow q), \neg q\}$, $\gamma_3 = \{p, p \rightarrow q, q\}$ 。这里所用的判断聚合规则是 f_{maj} ,因此有:

$$\textcircled{1} f_{maj}, \gamma, p \models L\neg 1 \wedge 2 \wedge 3$$

在运用判断聚合规则 f_{maj} 对判断组合 γ 的聚合中,对于议题 p 的判断是:专家1断定 p 为假,专家2与专家3都断定 p 为真;

$$\textcircled{2} f_{maj}, \gamma, p \models L\sigma$$

在运用判断聚合规则 f_{maj} 对判断组合 γ 的聚合中,群体

3) $f, \gamma, p \not\models L\Phi$ 表示“并非 $f, \gamma, p \models L\Phi$ ”。

断定项 p 为真;

$$\textcircled{3} f_{maj}, \gamma, p \vdash_L \Diamond(2 \wedge 3)$$

在运用判断聚合规则 f_{maj} 对判断组合 γ 的聚合中, 存在一个项, 专家 2 与专家 3 对它都持赞同态度。注意: 公式 $\Diamond(2 \wedge 3)$ 为真, 并不依赖于这个表 $\langle f_{maj}, \gamma, p \rangle$ 上的项是哪一个;

$$\textcircled{4} f_{maj}, \gamma, p \vdash_L \Diamond((1 \leftrightarrow 2) \wedge (1 \leftrightarrow 3) \wedge (2 \leftrightarrow 3))$$

在运用判断聚合规则 f_{maj} 对判断组合的聚合中, 存在一个判断组合, 其中所有的专家对项 p 都持赞同态度。注意: 公式 $\Diamond((1 \leftrightarrow 2) \wedge (1 \leftrightarrow 3) \wedge (2 \leftrightarrow 3))$ 为真, 并不依赖于这个表 $\langle f_{maj}, \gamma, p \rangle$ 上的判断组合是哪一个;

$$\textcircled{5} f_{maj}, \gamma, p \vdash_L \Box(\sigma \leftrightarrow \bigvee_{G \subseteq \{1, 2, 3\}, |G| \geq 2} \bigwedge_{i \in G} i)$$

这里的判断聚合规则 f_{maj} 是多数投票聚合规则。

令 f 是一判断聚合规则, Φ 是一 $\mathcal{L}(N, \mathcal{A})$ 公式, 如果对于议程 $\mathcal{A}$ 上任一判断组合 γ 、任一项 $p \in \mathcal{A}$, 都有 $f, \gamma, p \vdash_L \Phi$, 则 Φ 在 f 中为真, 记作 $f \vdash_L \Phi$; $f \vdash_L \Phi$ 当且仅当对于任一 f , 都有 $f \vdash_L \Phi$ 。一个输出 o 是一个合取式 $k_1 \wedge \dots \wedge k_n$, 其中每一个 $k_i (1 \leq i \leq n)$, 要么是 i , 要么是 $\neg i$ 。通常用 O 表示所有可能输出的集合。

如果一个公式在一个判断聚合规则 f 中是真的当且仅当 f 具有某一性质, 那么我们说这个公式表达了这一性质。判断聚合规则的一些性质可以用 JAL 语言 $\mathcal{L}(N, \mathcal{A})$ 表达:

$$(1) \text{独立性: } \Box \bigwedge_{o \in O} \Box((o \wedge \sigma) \rightarrow \Box(o \wedge \sigma));$$

$$(2) \text{统一性: } \Box \Box((1 \wedge \dots \wedge n) \rightarrow \sigma);$$

$$(3) \text{非独裁性: } \bigwedge_{i \in N} \Diamond \Diamond(\sigma \leftrightarrow i).$$

命题 1 如果至少有 3 个主体, 并且项含有至少 2 个不同的公式 p, q 以及它们的实质蕴涵式 $p \rightarrow q$, 那么下述结论成立:

$$f \vdash_L \Diamond((\Box(\sigma \leftrightarrow \bigvee_{G \subseteq N, |G| \geq \frac{n}{2}} \bigwedge_{i \in G} i)) \rightarrow \perp) (\perp = \sigma \wedge \neg \sigma)$$

证明: 假设上面命题不成立, 则有: 议程 $\mathcal{A} = \{p, \neg p, p \rightarrow q, \neg(p \rightarrow q), q, \neg q, \dots\}$, $\mathcal{A}$ 上存在一个聚合规则 f , 使得 $f \vdash_L \Box \Box(\sigma \leftrightarrow \bigvee_{G \subseteq N, |G| \geq \frac{n}{2}} \bigwedge_{i \in G} i)$ 。令一判断组合 $\gamma = (A_1, A_2, A_3)$, 其中主体 1 的个体判断集 $A_1 = \{p, p \rightarrow q, q, \dots\}$, 主体 2 的个体判断集 $A_2 = \{p, \neg(p \rightarrow q), \neg q, \dots\}$, 主体 3 的个体判断集 $A_3 = \{\neg p, p \rightarrow q, \neg q, \dots\}$ 。由于对于任一项 p' , 都有 $f, \gamma, p' \vdash_L \Box(\sigma \leftrightarrow \bigvee_{G \subseteq N, |G| \geq \frac{n}{2}} \bigwedge_{i \in G} i)$, 因而 $f, \gamma, p \vdash_L \sigma \leftrightarrow \bigvee_{G \subseteq N, |G| \geq \frac{n}{2}} \bigwedge_{i \in G} i$ 。由 $f, \gamma, p \vdash_L 1 \wedge 2$, 可得 $f, \gamma, p \vdash_L \sigma$ 。同理可得 $f, \gamma, p \rightarrow q \vdash_L \sigma, f, \gamma, q \vdash_L \neg \sigma$ 。即有: $p \in f(\gamma), p \rightarrow q \in f(\gamma), q \notin f(\gamma)$ 。由于 $f(\gamma)$ 是完全的, 故 $\neg q \in f(\gamma)$, 而这又与 $f(\gamma)$ 是一致的相矛盾。所以假设不成立, 原命题得证。

命题 1 是对判断悖论的一种逻辑表述。

给定基础逻辑 L 、主体集 N 及 L 之上的一个有穷议程 $\mathcal{A}$, 基于语言 $\mathcal{L}(N, \mathcal{A})$ 可以定义一个可靠且完全的判断聚合逻辑 $JAL(L)$ (当 L 明确时, 直接记为 JAL), JAL 的公理及推演规则可参见文献[2]。

定理 2 (JAL 的可靠性与完全性) 如果议程是有穷的, 那么对于任一公式 $\Psi \in \mathcal{L}(N, \mathcal{A})$, $\vdash_{JAL(L)} \Psi$ 当且仅当 $\vdash_L \Psi$ 。

对于此定理的具体证明可参见文献[2]。

3 基于 JAL 的偏好聚合逻辑 $JAL(L^K)$

如上所述, 根据分析问题的需要, 判断聚合逻辑 $JAL(L)$ 的基础逻辑 L 可以是命题逻辑、一阶逻辑或认知逻辑等, 这就决定了判断聚合逻辑 $JAL(L)$ 应用的一般性。 $JAL(L)$ 不仅是判断聚合的逻辑, 还可以用于分析包括偏好聚合在内的一些聚合问题。当把下面定义的简单谓词逻辑 L^K 作为 $JAL(L)$ 的基础逻辑时, 就可以得到一个偏好聚合的逻辑 $JAL(L^K)$ 。Dietrich, List^[6] 已证明可以将偏好聚合嵌入到判断聚合之中, 基于此证明, 我们将从逻辑的视角进一步论证判断聚合模型的一般性。

给定一个有穷备选方案的集合 $K = \{a, b, c, \dots, w\}$ (一般假定至少有 2 个备选方案), 可定义一个简单的谓词逻辑 L^K 如下:

— L^K 的语言 $\mathcal{L}(L^K)$ 具有如下符号:

(1) 个体常元符号: $a, b, c, \dots, w$ (用于表示备选方案集 $K = \{a, b, c, \dots, w\}$ 中的每一个备选方案);

(2) 个体变元符号: $v_1, v_2, \dots$ (用于表示不确定的备选方案);

(3) 一个二元等同谓词符号: $=$;

(4) 一个二元谓词符号: P (用于表示严格偏好关系);

(5) 辅助符号: $(,)$;

(6) 一阶逻辑的联结词: $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$;

(7) 一阶逻辑的量词符号: $\forall, \exists$ 。

— 一阶逻辑的公式形成规则、公理及推演规则都对 L^K 适用。

— L^K 还具有下列刻画理性偏好的公理:

$\forall v_1 \forall v_2 (v_1 P v_2 \rightarrow \neg v_2 P v_1)$ (对应了偏好关系的非对称性)

$\forall v_1 \forall v_2 \forall v_3 (v_1 P v_2 \wedge v_2 P v_3 \rightarrow v_1 P v_3)$ (对应了偏好关系的传递性)

$\forall v_1 \forall v_2 (\neg v_1 = v_2 \rightarrow (v_1 P v_2 \vee v_2 P v_1))$ ⁴⁾ (对应了偏好关系的完全性)

可以把偏好聚合看作判断聚合的一个特例: 给定一个备选方案集 $K = \{a, b, c, \dots\}$, 则存在一个偏好议程 $\mathcal{A}^K = \{a P b, \neg a P b; a, b \in K, a \neq b\}$ ($a P b$ 表示命题“ a 比 b 好”) 与之相对应; 对于 K 上任意一个偏好关系, 都存在 $\mathcal{A}^K$ 上一个 L^K —致且完全的判断集与之相对应。显然, 备选方案集 K 上所有偏好关系的集合与偏好议程 $\mathcal{A}^K$ 上所有 L^K —致且完全的判断集的集合之间有一个一一对应的关系。给定 K 上的一个社会福利函数 F , 与之相对应的偏好议程 $\mathcal{A}^K$ 上的判断聚合规则 f^F 定义如下: $f^F(A_1, \dots, A_n) = A$, 其中 A 是与 $F(L_1, \dots, L_n)$ 相对应的 L^K —致且完全的群体判断集, L_i 是与 L^K —致且完全的个体判断集 A_i 相对应的个体偏好关系。

这样, 我们就能利用 $JAL(L^K)$ 来分析偏好聚合了: 这里的逻辑语言是 $\mathcal{L}(N, \mathcal{A}^K)$, 其中 N 为某一主体集, L^K 为基础逻辑。在 K 上的一个社会福利函数 F 、一个偏好组合 $L \in L(K)$ 及一个有序对 $(a, b) \in K \times K (a \neq b)$ 中对公式 Φ 的解释定义如下:

$$F, L, (a, b) \models^{sf} \Phi \Leftrightarrow f^F, \gamma^L, a P b \vdash_{L^K} \Phi$$

⁴⁾ 通常把“ $\neg v_1 = v_2$ ”记作“ $v_1 \neq v_2$ ”。

式中, γ' 是与偏好组合 L 相对应的判断组合。

例2 3个主体准备结伴出外旅游,他们要对3个旅游景点 x, y, z 的其中之一作出选择。3个主体的个体偏好如表2所列,这里所用的社会福利函数是两两比较的多数投票聚合规则。

表2

	$\{x, y\}$	$\{y, z\}$	$\{x, z\}$
成员1	(y, x)	(z, y)	(z, x)
成员2	(x, y)	(z, y)	(z, x)
成员3	(x, y)	(z, y)	(x, z)
F_{maj}	(x, y)	(z, y)	(z, x)

用 $JAL(L^K)$ 刻画例2: 主体集 $N = \{1, 2, 3\}$; 偏好议程 $\mathcal{A}^K = \{xPy, \neg xPy, xPz, \neg xPz, yPz, \neg yPz\}$; 基础逻辑为上面定义的谓词逻辑 L^K 。令 L_1, L_2, L_3 分别表示主体1、主体2、主体3的偏好关系, 由这3个主体的偏好关系构成的偏好组合 $L = (L_1, L_2, L_3)$, 其中 $L_1 = \{(y, x), (z, y), (z, x)\}$, $L_2 = \{(x, y), (z, y), (z, x)\}$, $L_3 = \{(x, y), (z, y), (x, z)\}$ 。这里所用的社会福利函数是 F_{maj} , 因此有:

① $F_{maj}, L, (z, y) \models^{swf} 1 \wedge 2 \wedge 3$

在运用社会福利函数 F_{maj} 对偏好组合 L 的聚合中, 对于 z 与 y 的偏好排序是: 所有主体都认为 z 比 y 好;

② $F_{maj}, L, (z, y) \models^{swf} \Diamond \rightarrow (1 \leftrightarrow 2)$

在运用社会福利函数 F_{maj} 对偏好组合 L 的聚合中, 存在一对备选方案, 主体1与主体2对它们的偏好排序不同;

③ $F_{maj}, L, (z, y) \models^{swf} \Diamond \rightarrow (1 \wedge 2)$

在运用社会福利函数 F_{maj} 对偏好组合的聚合中, 存在一个偏好组合, 其中主体1与主体2对某两个备选方案的偏好排序相同;

④ $F_{maj}, L, (z, y) \models^{swf} \sigma \leftrightarrow \bigvee_{G \subseteq \{1, 2, 3\}, |G| \geq 2} \bigwedge_{i \in G} i$

这里的社会福利函数 F_{maj} 是两两比较的多数投票聚合规则。

令 F 是一社会福利函数, Φ 是一 $\mathcal{L}(N, \mathcal{A}^K)$ 公式, 如果对于任一偏好组合 L 、任一备选方案有序对 (a, b) , 都有 $F, L, (a, b) \models^{swf} \Phi$, 则 Φ 在 F 中为真, 记作 $F \models^{swf} \Phi$ 。 $\models^{swf} \Phi$ 当且仅当对于任一 F , 都有 $F \models^{swf} \Phi$ 。

如果一个公式在一个社会福利函数 F 中是真的当且仅当 F 具有某一性质, 那么我们说这个公式表达了这一性质。社会福利函数的一些性质可以用 JAL 语言 $\mathcal{L}(N, \mathcal{A})$ 表达:

(1) 无关选项独立性: $\Box \bigwedge_{o \in O} \Box ((o \wedge \sigma) \rightarrow \Box (o \wedge \sigma))$;

(2) 帕累托最优原则: $\Box \Box ((1 \wedge \dots \wedge n) \rightarrow \sigma)$;

(3) 非独裁性: $\bigwedge_{i \in N} \Diamond \rightarrow (\sigma \leftrightarrow i)$ 。

命题2 令 F 是一社会福利函数, $|K| > 2$ 当且仅当 $F \models^{swf} \Diamond \rightarrow (\Diamond(1 \wedge 2) \wedge \Diamond(1 \wedge \neg 2))$ 。

证明: $(\Rightarrow)$ 假设 $|K| > 2$, 令 a, b, c 为3个不同的备选方案。令 $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n) (n \geq 2)$ 为一判断组合, 其中主体1的个体判断集 $\gamma_1 = \{aPb, aPc, bPc, \dots\}$, 主体2的个体判断集 $\gamma_2 = \{aPc, aPb, cPb, \dots\}$ 。所以对于任一判断聚合规则 f , 都有 $f, \gamma, aPb \models L^K 1 \wedge 2$ 且 $f, \gamma, bPc \models L^K 1 \wedge \neg 2$ 。即有: 对于任一社会福利函数 $F, F \models^{swf} \Diamond \rightarrow (\Diamond(1 \wedge 2) \wedge \Diamond(1 \wedge \neg 2))$ 。

$(\Leftarrow)$ 假设 $F \models^{swf} \Diamond \rightarrow (\Diamond(1 \wedge 2) \wedge \Diamond(1 \wedge \neg 2))$ 。由假设可得: 存在一个判断组合 γ , 存在 $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in K \times K$, 其中 $a_1 \neq b_1, a_2 \neq b_2$, 使得 ① $a_1 Pb_1 \in \gamma_1$; ② $a_1 Pb_1 \in \gamma_2$; ③ $a_2 Pb_2 \in$

γ_1 ; ④ $a_2 Pb_2 \notin \gamma_2$ 。由②、④可得: $(a_1, b_1) \neq (a_2, b_2)$ 。再由①、③可得: γ_1 包含两个不同的元素 $a_1 Pb_1$ 与 $a_2 Pb_2$ 。但是如果 $|K| = 2$, 这是不可能的。其原因是: 如果 $|K| = \{a, b\}$, 那么 $\mathcal{A}^K = \{aPb, \neg aPb, bPa, \neg bPa\}$, 由于不能够使 $aPb, bPa \in \gamma_1$, 因而 $\gamma_1 \subseteq \mathcal{A}^K$ 是不可能的。

我们可以用 JAL 的公式把孔多赛悖论(Condorcet paradox) 表达为社会福利函数的一个普遍有效的逻辑性质。

命题3 如果至少有3个主体, 那么 $\models^{swf} \Diamond \rightarrow (\Diamond(1 \wedge 2) \wedge \Diamond(1 \wedge \neg 2)) \rightarrow \Diamond \Diamond \rightarrow (\sigma \leftrightarrow \bigvee_{G \subseteq N, |G| \geq \frac{n}{2}} \bigwedge_{i \in G} i)$ 。

证明: 假设 $f^F, \gamma, aPb \models L^K \Diamond \rightarrow (\Diamond(1 \wedge 2) \wedge \Diamond(1 \wedge \neg 2))$, 其中 f^F 是任意一个判断聚合规则, γ 是任意一个判断组合, a, b 是备选方案集 K 中的任意两个元素。由命题2可得: 存在3个不同的备选方案 $a, b, c \in K$ 。再假设 $f^F, \gamma, aPb \models L^K \Box \Box (\sigma \leftrightarrow \bigvee_{G \subseteq N, |G| \geq \frac{n}{2}} \bigwedge_{i \in G} i)$ 。令 γ' 是与偏好组合 $L = \{(\langle a, b \rangle, \langle a, c \rangle, \langle b, c \rangle), \langle \langle c, a \rangle, \langle c, b \rangle, \langle a, b \rangle \rangle, \langle \langle b, c \rangle, \langle b, a \rangle, \langle c, a \rangle \rangle\}$ 相对应的判断组合。由 $f^F, \gamma', aPb \models L^K (\sigma \leftrightarrow \bigvee_{G \subseteq N, |G| \geq \frac{n}{2}} \bigwedge_{i \in G} i)$, 可得 $f^F, \gamma', aPb \models L^K 1 \wedge 2$ 。再由 $f^F, \gamma', aPb \models L^K \sigma \leftrightarrow \bigvee_{G \subseteq N, |G| \geq \frac{n}{2}} \bigwedge_{i \in G} i$, 可得 $f^F, \gamma', aPb \models L^K \sigma$, 即有 $aPb \in f^F(\gamma')$ 并且 $(a, b) \in F(L)$ 。同理可得: $(c, a) \in F(L), (b, c) \in F(L)$ 。然而这是不可能的, 因为: 由传递性可得 $(a, c) \in F(L)$, 这与 $F(L)$ 是非对称的相矛盾。因而假设不成立, 即有: $f^F, \gamma, aPb \models L^K \Box \Box (\sigma \leftrightarrow \bigvee_{G \subseteq N, |G| \geq \frac{n}{2}} \bigwedge_{i \in G} i)$ 。

对于偏好聚合逻辑 $JAL(L^K)$ 来说, 任意一个判断聚合规则 f , 都存在一个社会福利函数 F , 使得 $f \in f^F$, 再由定理2, 可得 $JAL(L^K)$ 是可靠且完全的。

定理3 如果备选方案集 K 是有穷的, 那么对于任一公式 $\Psi \in \mathcal{L}(N, \mathcal{A}^K)$, 都有 $\models_{JAL(L^K)} \Psi$ 当且仅当 $\models^{swf} \Psi$ 。

结束语 基于判断聚合逻辑 JAL , 我们探究了判断聚合与偏好聚合之间的关系。 JAL 的语言可以直接用判断聚合规则进行解释, 这个逻辑能够表达一些聚合规则如多数投票聚合规则等; 这个逻辑也能够表达一些聚合规则的性质如独立性、非独裁性等; 一些重要结论如判断悖论、孔多赛悖论等可以在这个逻辑中被推演出来。这是一个可靠且完全的公理化系统。这一逻辑不仅可以用于分析判断聚合问题, 还可以作为一个一般框架来分析包括偏好聚合在内的聚合问题, 从而表明可以把偏好聚合看作是判断聚合的一个特例, 显现了判断聚合模型的一般性。

判断聚合的一些不可能性结论已得到不断的证明^[10,12], 而其中的重要意义并不仅仅在于从判断聚合的层面证明了将个体理性聚合为群体理性的不可能性, 而在于可以让我们深刻洞察到为找到让人接受的聚合规则, 需要放宽哪些聚合要求, 从而为寻求合理的群体理性聚合方法提供了新思路。在下一步的研究工作中, 我们将从逻辑的视角探寻判断聚合难题的一些化解方案。在文献[2]中, 普遍定义域是 JAL 的一个公理, 我们将试图构建一个更弱的逻辑, 使之对于受一定限制的判断组合构成的模型是完全的, 这就像对偏好组合进行单峰限制一样, 可以得到一个可能性的结果, 而不是一个不可能性结论^[7]。另外, 为了得到一个可能性的聚合结果, 也可以放宽对于判断集是完全的且一致的要求, 以此作为判断集的一个性质, 我们将力图用逻辑语言进行刻画。最近, 有些学者对于阿罗定理及相关不可能性结论的形式表示又有了新的研

(下转第254页)

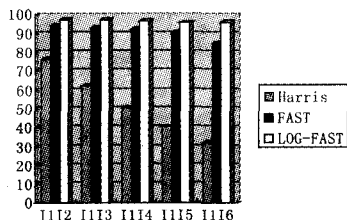


图 7 不同算子的点重复率

结束语 为提高角点检测的时间效率以及鲁棒性,基于 FAST 算子,并结合图像增强技术以及拉普拉斯-高斯边缘提取思想,提出了快速鲁棒的 LOG-FAST 角点算子。算法首先使用直方图均衡化方法进行图像增强,然后运用拉普拉斯-高斯函数对图像进行卷积,从而实现噪声最大化抑制和边缘增强,最后使用 FAST 算子检测角点。经过充分实验测试,LOG-FAST 算子保留了 FAST 算子时间效率高的特点,还具有光照不变性、抗噪声能力强、点重复率高、鲁棒性好等优点。该算子可应用于实时视频图像的处理应用场合,如实时全景图像构建、图像配准、智能识别以及实时车载系统等。

参考文献

- [1] 燕鹏,安如. 基于 FAST 改进的快速角点探测算法[J]. 红外与激光工程,2009,38(6):1104-1108,1115
- [2] Stephens M J, Harris C G. A combined corner and edge detector [C]// Processings Fourth Alvey Vision Conference. Manchester, 1988:147-151
- [3] 杨莉,张弘,李玉山. 一种快速自适应 RSUSAN 角点检测算法[J]. 计算机科学,2004,31(05):198-200
- [4] Lowe D G. Object recognition from local scale-invariant features [C]// International Conference on Computer Vision. Corfu,

Greece,1999:1150-1157

- [5] Lowe D G. Distinctive image features from scale-invariant key-points[J]. International Journal of Computer Vision, 2004, 60 (2):91-110
- [6] Bay A E H, Tuytelaars T, Van Gool L. SURF: Speeded Up Robust Features[J]. Computer Vision and Image Understanding (CVIU), 2008, 110(3):346-359
- [7] Drummond T, Rosten E. Fusing points and lines for high performance tracking [C]// IEEE International Conference on Computer Vision. 2005:1508-1511
- [8] 严国萍,戴若愚,潘晴,等. 基于 LOG 算子的自适应图像边缘检测方法[J]. 华中科技大学学报:自然科学版,2008,36(3):85-87,102
- [9] 吴熙,钱盛友. 基于 LoG 算子的图像边缘增强算法的改进[J]. 电气电子教学学报,2007,29(4):25-27
- [10] 关斌. 一种改进的自适应各向异性 LOG 算子[J]. 科学技术与工程,2010,10(12):2992-2994,3007
- [11] 吕冀,汪渤,高洪民. 快速 SUSAN-Laplace 角点算法[J]. 光学技术,2008,34(06):873-876
- [12] Gonzalez R C, Woods R E. Digital Image Processing (3 ed.) [M]. Prentice Hall, 2008
- [13] Marr D. Vision: A Computational Investigation into the Human Representation and Processing of Visual Information [M]. New York: Freeman, 1982
- [14] Rosten E, Drummond T. Machine learning for high-speed corner detection [C]// European Conference on Computer Vision. 2006:430-443
- [15] Demaine E, Bremner D, Erickson J, et al. Output-sensitive algorithms for computing nearest-neighbor decision boundaries[J]. Discrete and Computational Geometry, 2005, 33(4):593-604

(上接第 239 页)

究成果。在文献[11]中, Lin, Tang 利用一阶逻辑证明了阿罗定理,其中的基础证明步骤是由计算机程序完成的。在文献[9]中, Grandi, Endriss 对阿罗定理也进行了一阶逻辑的形式化,这为运用自动推理工具完全自动证明阿罗定理等类似不可能性结论提供了前期理论准备。虽然本文判断聚合逻辑 JAL 的语言可以被翻译为一阶逻辑的语言,但这里的形式化与文献[9,11]中形式化之间的联系还需要进一步探究。这些将是我们今后的重要研究方向。

参考文献

- [1] Ågotnes T, van der Hoek W, Wooldridge M. Towards a logic of social welfare[C]// The 7th Conference on Logic and the Foundations of Game and Decision Theory (LOFT 06). 2006
- [2] Ågotnes T, van der Hoek W, Wooldridge M. On the logic of preference and judgment aggregation[J]. Autonomous Agents and Multi-Agent Systems, 2011, 22:4-30
- [3] Arrow K J. Social Choice and Individual Values (2d edition) [M]. New York: Wiley, 1963
- [4] Blackburn P, de Rijke M, Venema Y. Modal Logic[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2001
- [5] Blackburn P, van Benthem J, Wolter F. Handbook of Modal Logic[M]. Amsterdam: Elsevier, 2007

- [6] Dietrich F, List C. Arrow's theorem in judgement aggregation [J]. Social Choice and Welfare, 2007, 29(1):19-33
- [7] Ehlers L, Storcken T. Arrow's possibility theorem for one dimensional single-peaked preferences[J]. Games and Economic Behavior, 2008, 64(2):533-547
- [8] Gaertner W. A Primer in Social Choice Theory[M]. New York: Oxford University Press, 2009
- [9] Grandi U, Endriss U. First-order logic formalisation of Arrow's Theorem[C]// Logic Rationality and Interaction, LORI-II 2009. Springer Press, 2009
- [10] Grossi D. Correspondences in the Theory of Aggregation[J]. Lecture Notes in Computer Science, 2010, 6006:34-60
- [11] Lin F, Tang P. Computer-aided proofs of Arrow's and other impossibility theorems[C]// Proceedings of the 23rd AAAI conference on artificial intelligence, 2008:114-1109
- [12] List C. The theory of Judgment aggregation: An introductory review. Synthese (forthcoming) [EB/OL]. <http://personal.lse.ac.uk/list/PDF-files/ReviewPaper.pdf>
- [13] List C, Puppe C. Judgment aggregation: a survey. The Oxford Handbook of Rational and Social Choice[M]// Anand P, Pattanaik P, Puppe C, eds. New York: Oxford University Press, 2009
- [14] 兰继斌,王艳青,韦晓静. 获取决策者偏好信息的一种决策方法[J]. 重庆理工大学学报:自然科学版,2010,24(11):97-101