部分 K 值逻辑中完满对称函数集最小覆盖判定的一些结果

龚志伟¹ 刘任任²

(中南林业科技大学理学院 长沙 410004)¹ (湘潭大学信息工程学院 湘潭 411105)²

摘要 根据部分 K 值逻辑的完备性理论,从二元完满对称关系 G_2 的关系图的特点出发,首先证明了两类保二元的完满对称函数集不属于部分 K 值逻辑的准完备集之最小覆盖。然后对关系图中边的数目分情况进行讨论,定出了部分 K 值逻辑中保二元的完满对称函数集在边数小于等于 K 时的准完备集之最小覆盖成员。

关键词 多值逻辑,完备性,Sheffer 函数,完满对称函数集

中图分类号 TP301 文献标识码 A

Some Results on the Decision of the Minimal Covering for Full Symmetric Function Sets in Partial K -valued Logic

GONG Zhi-wei¹ LIU Ren-ren²

(School of Sciences, Central South University of Forestry and Technology, Changsha 410004, China)¹

(College of Information Engineering, Xiangtan University, Xiangtan 411105, China)²

Abstract According to the completeness theory in partial K -valued logic, starting with the chart of binary full symmetric relations, this paper first proved two kinds of preserving binary full symmetric relations function sets unbelong to the minimal covering members in partial K -valued logic, and then discussed the edge number of chart, decided the emergence of preserving binary full symmetric relations function sets in the minimal covering members in partial K -valued logic.

Keywords Multi-valued logic, Completeness, Sheffer function, Full symmetric function sets

1 引言

多值逻辑是指一切逻辑值的取值数大于 2 的逻辑,它是由二值逻辑扩展而来的。多值逻辑的研究内容大体可分为 3 个方面,即多值逻辑的数学理论、多值电路与多值数字系统、多值逻辑的应用。多值逻辑函数结构理论是多值逻辑理论中一个重要的研究方向,其中函数系完备性之判定问题是一个基本而重要的问题,同时也是自动机理论、多值逻辑网络中必须解决的问题,此问题的解决依赖于定出多值逻辑函数集中的所有准完备集。多值逻辑完备性理论的另一个重要问题是 Sheffer 函数的判定和构造,此问题可归结为定出所有准完备集的最小覆盖。完全多值逻辑函数的判定问题已由 Schofield 和 Kudrjavcev 等完全解决,但是部分多值逻辑函数集中 Sheffer 函数的判定问题还未彻底解决。

根据部分多值逻辑的完备性理论^[1,2], $f(x_1, \dots, x_n)$ 是 Sheffer 函数当且仅当对 P_k^* 中的任何准完备集 A 都有 $f \notin A$ 。因此,判定 Sheffer 函数的最简单的方法是定出 P_k^* 中的所有准完备集的最小覆盖。

在多值逻辑理论的研究中,罗铸楷教授定出了 P_k^* 中所有的准完备集,并把所有准完备集分为 7 类^[3],即保 E 函数集 T_E ($0 < E < E_k$)、完满对称函数集 $F_{S,m}$ 、单纯可离函数集 $S_{T,m}$ 、正则可离函数集 $S_{R,m}$ 、 L 型函数集 $L_{G_{1,2}}$ 、拟线性函数集

L_P 以及 $P_k \cup \{*\}$ 。

在部分多值逻辑 Sheffer 函数判定与构造的研究中,部分二值、三值和四值逻辑的研究已经取得了一些成果^[4-6]。对于一般的 K 值逻辑,作者已经证明了准完备类 $T_E, L_{G_{1,2}}$ 和 L_P 在 P_k^* 的准完备集之最小覆盖中必须出现^[7-10]。其它 3 类函数集情况较为复杂,有的在最小覆盖中必须出现,有的则可以剔除^[11-13]。本文根据部分 K 值逻辑的完备性理论,对 $m=2$ 的完满对称函数集进行了深入研究,从二元完满对称关系 G_2 的关系图的特点出发,首先证明了两类保二元的完满对称函数集不属于部分 K 值逻辑的准完备集之最小覆盖。然后对关系图 D 中边的数目分情况进行讨论,定出了 P_k^* 中保二元完满对称函数集在边数小于等于 K 时的准完备集之最小覆盖成员。

2 基本概念

定义 1 设 $E_k = \{0, 1, \dots, k-1\}, k \geq 2$ 。函数 $f(x_1, \dots, x_n): E_k^n \rightarrow E_k$ 称为完全 K 值逻辑函数。所有完全 K 值逻辑函数构成之集合记为 P_k 。

定义 2 设 $E_k = \{0, 1, \dots, k-1\}, k \geq 2$ 。函数 $f(x_1, \dots, x_n): E_k^n \rightarrow E_k \cup \{*\}$ 称为非完全 K 值逻辑函数。其中 $f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = *$ 表示函数 f 在 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 处无定义, $\alpha_i \in E_k, i=1, 2, \dots, n$ 。

到稿日期:2011-06-26 返修日期:2011-11-02 本文受国家自然科学基金(60673193),中南林业科技大学校青年基金(QJ2010021B)资助。

龚志伟(1980-),女,硕士,讲师,主要研究方向为多值逻辑, E-mail: zhiweigong@tom.com; 刘任任(1959-),男,博士,教授,主要研究方向为多值逻辑。

E_k 上的完全和非完全 K 值逻辑函数统称为部分 K 值逻辑函数。所有部分 K 值逻辑函数构成之集合记为 P_k^* 。显然 $P_k \subset P_k^*$ 。

定义 3 令 $\Sigma = \{A_i \mid A_i \subset P_k^*\}$ 是准完备集, $i=1, \dots, n$, 且 $\Sigma' \subseteq \Sigma$, 定义 $S_{\Sigma'} = \{f \in P_k^* \mid \exists A_j' \in \Sigma' \text{ 使得 } f \in A_j', 1 \leq j \leq n\}$, 即 $S_{\Sigma'}$ 表示 P_k^* 中所有属于 Σ' 中某个准完备集的函数之集合, 也即 $S_{\Sigma'} = \bigcup_{j=1}^n A_j', A_j' \in \Sigma', |\Sigma'| = n, j=1, \dots, n$ 。集合 $\Sigma' (\subseteq \Sigma)$ 是 Σ 的覆盖, 如果满足 $S_{\Sigma'} = S_{\Sigma}$ 。

显然, 函数 f 是 Sheffer 函数, 当且仅当 $f \notin S_{\Sigma'}$, 其中 Σ' 是 Σ 的覆盖; 覆盖 Σ' 是最小覆盖, 如果 Σ' 的任何一个真子集都不是集合 Σ 的覆盖。 P_k^* 的准完备集之最小覆盖记为 $\Sigma_{\min}$ 。

显然, 对于一个准完备集 A , 若存在一个函数 $f \in A$, 使得 f 不属于除 A 以外的任何一个准完备集, 则 $A \in \Sigma_{\min}$ 。

定义 4 设 N 是关于 $x_1, \dots, x_n$ 的一个完全函数集, 函数 $f(t_1, \dots, t_n)$ 是保 N 的, 如果对任意 $g_1(\tilde{x}), g_2(\tilde{x}), \dots, g_m(\tilde{x}) \in N$, 复合函数 $f(g_1(\tilde{x}), g_2(\tilde{x}), \dots, g_m(\tilde{x}))$ 或属于 N 或非完全, 其中, $(\tilde{x}) = (x_1, \dots, x_n)$ 。 P_k^* 中所有保 N 函数之集合记为 $T(N)$ 。

定义 5 若对任意 $f(\tilde{x}), g_1(\tilde{x}), g_2(\tilde{x}), \dots, g_m(\tilde{x}) \in N$, 复合函数 $f(g_1(\tilde{x}), g_2(\tilde{x}), \dots, g_m(\tilde{x}))$ 仍属于 N , 则称 N 是一个 n 元封闭集。

令 $G_m = \{\langle \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \rangle \mid \alpha_i \in E_k, i=1, 2, \dots, m\} \subseteq E_k^m$, $m \geq 2$, 称 G_m 为 E_k 上的一个 m 项关系。

定义 6 函数 $f(x_1, \dots, x_n) (\in P_k^*)$ 是保 m 项关系 G_m , 如果对任意保 G_m 的 n 元值组 $\bar{a}^1, \dots, \bar{a}^m$, 值组 $\langle f(\bar{a}^1), \dots, f(\bar{a}^m) \rangle$ 或未完全有定义或仍属于 G_m , P_k^* 中所有保 G_m 函数之集合记为 $T(G_m)$, 称为保 G_m 函数集。

定义 7 非完全关系 G_m 是完满对称的, 如果

$$G_m = \bigcup_{i,j=1, i \neq j}^m G_m(\{i, j\}) \cup G_m^*$$

式中, $G_m(\{i, j\}) = \{\langle a_1, a_2, \dots, a_m \rangle \mid a_i = a_j, a_r \in E_k, 1 \leq r \leq m\}$, 而 G_m^* 或者为空集 ($m \neq 2$), 或者仅含 m 元不同序列, 且 G_m 对 S_m 是对称的, 即对任意 $\sigma \in S_m$, 有 $G_m = G_m^\sigma = \{\langle a_{\sigma(1)}, \dots, a_{\sigma(m)} \rangle \mid \langle a_1, \dots, a_m \rangle \in G_m\}$, 这里 S_m 是集合 $\{1, 2, \dots, m\}$ 上的对称群。所有保上述关系 G_m 的函数之集合记为 $F_{S_m} = T(G_m)$, 称为完满对称函数集。称完满对称关系 G_m 为 m 元完满对称关系 ($2 \leq m \leq k$)。

二元完满对称关系 G_2 中的序列都是二元序偶 $\langle a, b \rangle$, 它可表示成一个 k 个顶点的有向图 D , 称为 G_2 的关系图。又由完满对称关系的定义可知, G_2 是一个自反、对称关系。因此, 它可以用一个简单无向图来表示。为方便起见, 在讨论 D 的图型时, 可以忽略每个顶点上的圈。

定理 1^[14] 设 D 是二元对称关系 G_2 的关系图。于是, 若 D 不连通, 则 $T(G_2)$ 在 P_k^* 的最小覆盖中必须出现。

定理 2^[15] 设 D 是二元对称关系 G_2 的关系图。于是, 若 D 是一个 Hamilton 回路时, 则 $T(G_2)$ 在 P_k^* 的最小覆盖中必须出现。

3 主要结果及证明

定理 3 设 D 是二元完满对称关系 G_2 的关系图, 若 D

是一棵树 (忽略每个顶点上的圈), 则 $T(G_2) \notin \Sigma_{\min}$ 。

证明: 任取 $f(x_1, \dots, x_n) \in T(G_2)$ 。设 $f(0, \dots, 0) = i$, 因为 D 是一棵树, 所以存在一条路径 L 从顶点 0 到 i , 不妨设此路径为 $0, 1, 2, \dots, i$, 并且令 $|L|$ 为该路径长度。

(1) 若 $|L|=0$, 即 $i=0$, 于是 $f \in T_{\{0\}}$ 。

(2) 若 $|L|=1$, 即顶点 $0, i$ 相邻, $\langle 0, i \rangle \in G_2$, 设 $f(i, \dots, i) = a$, 则有 $\langle i, a \rangle \in G_2$ 。

(i) 若 $a \neq 0$, 则考虑从顶点 i 到 a 的边, 如此下去, 若一直不存在第 (ii) 种情况, 则由于不存在回路, 因此必然到达某一叶子结点, 此时不妨设存在 s 到 t 的一条边, 且 t 为叶子结点, $f(s, \dots, s) = t$ 。由于 t 为一叶子结点, 即 t 仅与 s 相邻, 故 $f(t, \dots, t) = s$ 。此即为第 (ii) 种情况。

(ii) 若 $a=0$, 下证 $f \in T_{\{0, i\}}$, 即对于 $\forall \alpha \in \{0, i\}^n, f(\alpha) \in \{0, i\}$ 。

假设 $f(\alpha) = t \notin \{0, i\}$, 因为 $\langle 0, 1 \rangle, \langle 0, 0 \rangle$ 都属于 G_2 , 于是有 $\langle f(0, \dots, 0), f(\alpha) \rangle \in G_2$ 。同理可证 $\langle f(i, \dots, i), f(\alpha) \rangle \in G_2$, 则有 $\langle i, t \rangle, \langle 0, t \rangle \in G_2$, 于是结点 t 分别与结点 $0, i$ 相邻, 而结点 0 与 i 相邻, 此与 D 为一棵树相矛盾。因此, $f(\alpha) = t \in \{0, i\}$, 于是 $f \in T_{\{0, i\}}$ 。

(3) 若 $|L| > 1$, 由于 $\langle 0, 1 \rangle$ 和 $\langle 1, 0 \rangle$ 包含在 G_2 中, 因此 $\langle f(0, \dots, 0), f(1, \dots, 1) \rangle = \langle i, f(1, \dots, 1) \rangle$ 也被包含在 G_2 中。于是, $f(1, \dots, 1)$ 等于 i 或与 i 相邻的顶点。

(i) 若 $f(1, \dots, 1) = i$, 则考虑路径 L_1 : 从顶点 1 到 i , $|L_1| = |L| - 1$;

(ii) 若 $f(1, \dots, 1) = i-1$, 则考虑路径 L_2 : 从顶点 1 到 $i-1$, $|L_2| = |L| - 2$;

(iii) 若 $f(1, \dots, 1)$ 不等于 i 或 $i-1$, 不妨设 $f(1, \dots, 1) = i+1$, 则考虑路径 L_3 : 从顶点 1 到 $i+1$, $|L_3| = |L|$ 。

若是 (i)、(ii) 两种情况, 则所考虑的路径 L_n 的长度不断减小; 若是第 (iii) 种情况, 则由于 G_2 的关系图的基础图是一棵树, 因此不存在回路, 于是 $i+1$ 不能等于已被定义了函数值的顶点。例如 $f(2, \dots, 2)$ 不能等于 0 或 1 。

如此下去, 由于 $|L_3| = |L| > 1$, 因此总是至少存在一顶点的函数值未被定义。由于关系图的顶点有限, 因此总有 $|L_n| = 0$ 或 1 。

由 (1)、(2) 和 (3) 可知 $f \in \bigcup_{0 \subset E \subset E_k} T_E$, 即 $T(G_2) \subset T_E$, 又由文献 [7] 知 $T_E (\emptyset \subset E \subset E_k)$ 是最小覆盖成员, 即 $T_E \in \Sigma_{\min}$ 。故 $T(G_2) \notin \Sigma_{\min}$ 。

定理 4 设 D 是二元完满对称关系 G_2 的关系图, 当 D 为的边数为 K 时, 若 D 连通但不含 Hamilton 回路, 则 $T(G_2) \notin \Sigma_{\min}$ 。

证明: 因为二元完满对称关系 G_2 满足自反性, 即对每一个 $i \in E_k$, 均有 $\langle i, i \rangle \in G_2$, 所以 D 的顶点数目等于 K 。当边数也为 K 时, 若 D 连通, 则 D 必含回路。又因为 D 不含 Hamilton 回路, 故 D 中存在长度小于 K 的回路。不妨设此回路 L 为 $0, 1, 2, \dots, k-2, 0$, 点 $k-1 \notin L$, 则以下序偶 $\langle 0, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \dots, \langle k-2, 0 \rangle, \langle 1, 0 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 3, 2 \rangle, \dots, \langle 0, k-2 \rangle$ 必包含在 G_2 中。此时回路中已有 $K-1$ 条边, 只剩下一条边在回路外, 不妨设此边为 $\langle 0, k-1 \rangle$, 于是 $G_2 = \{\langle 0, 0 \rangle, \langle 1, 1 \rangle, \dots, \langle k-1, k-1 \rangle\} \cup \{\langle 0, 1 \rangle, \langle 1, 0 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 3, 2 \rangle, \dots\}$

$\langle k-2, 0 \rangle, \langle 0, k-2 \rangle, \langle 0, k-1 \rangle, \langle k-1, 0 \rangle$ 。

任取 $f(x_1, \dots, x_n) \in T(G_2)$ 。根据相似关系的定义, 只需看 $f(0, \dots, 0)$ 的取值, 因为 $f(x_1, \dots, x_n) \in T(G_2)$, 所以 $f(0, \dots, 0)$ 的取值只有 $0, 1, k-2, k-1$ 或 * 几种情况。

1) 若 $f(0, \dots, 0) = 0$ 或 *, 则 $f \in T_{\{0\}}$ 。

2) 若 $f(0, \dots, 0) = 1$, 则因 $\langle 1, 0 \rangle, \langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle \in G_2$, 而 $\langle 1, 3 \rangle, \langle 1, 4 \rangle, \dots, \langle 1, k-1 \rangle \notin G_2$, 可知 $f(1, \dots, 1) \neq 3, 4, \dots, k-1$ 。

i) 若 $f(1, \dots, 1) = 1$ 或 *, 则 $f \in T_{\{1\}}$;

ii) 若 $f(1, \dots, 1) = 0$ 或 2, 则 $f \in T_{\{0, 1, 2\}}$, 下证 $f \in T_{\{0, 1, 2\}}$ 。

设 $\alpha_i \in \{0, 1, 2\}, i = 1, \dots, n$, 有 $f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 0$ 或 1 或 2; 若 $f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 3$ 或 4 或 ... 或 $k-1$, 则有 $f\left(\begin{smallmatrix} 0, \dots, 0 \\ \alpha_1, \dots, \alpha_n \end{smallmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ 或 $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ 或, ..., 或 $\begin{pmatrix} 1 \\ k-1 \end{pmatrix}$, 由于 $\langle 0, \alpha_i \rangle \in G_2$, 而 $\langle 1, 3 \rangle, \langle 1, 4 \rangle, \dots, \langle 1, k-1 \rangle \notin G_2$, 此与 $f \in T(G_2)$ 矛盾, 故 $f \in T_{\{0, 1, 2\}}$ 。

3) 若 $f(0, \dots, 0) = k-2$, 因为 $\langle k-2, 0 \rangle, \langle k-2, k-2 \rangle \in G_2$, 而 $\langle k-2, 1 \rangle, \langle k-2, 2 \rangle, \dots, \langle k-2, k-3 \rangle, \langle k-2, k-1 \rangle \notin G_2$, 可知, $f(k-2, \dots, k-2) \neq 1, 2, \dots, k-3, k-1$ 。

i) 若 $f(k-2, \dots, k-2) = k-2$ 或 *, 则 $f \in T_{\{k-2\}}$;

ii) 若 $f(k-2, \dots, k-2) = 0$, 下证 $f \in T_{\{0, k-2\}}$ 。

设 $\alpha_i \in \{0, k-2\}, i = 1, \dots, n$, 于是 $\langle 0, \alpha_i \rangle \in G_2$ 。因为 $\langle k-2, 1 \rangle, \langle k-2, 2 \rangle, \dots, \langle k-2, k-3 \rangle, \langle k-2, k-1 \rangle \notin G_2$, 故有 $f(k-2, \dots, k-2) \neq 1, 2, \dots, k-3, k-1$, 于是 $f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 0$ 或 $k-2$, 故 $f \in T_{\{0, k-2\}}$ 。

4) 若 $f(0, \dots, 0) = k-1, \langle k-1, 0 \rangle, \langle k-1, k-1 \rangle \in G_2$, 而 $\langle k-1, 1 \rangle, \langle k-1, 2 \rangle, \dots, \langle k-1, k-2 \rangle \notin G_2$, 可知, $f(k-1, \dots, k-1) \neq 1, 2, \dots, k-2$ 。

i) 若 $f(k-1, \dots, k-1) = k-1$ 或 *, 则 $f \in T_{\{k-1\}}$;

ii) 若 $f(k-1, \dots, k-1) = 0$, 而 $f(k-1, \dots, k-1) \neq 1, 2, \dots, k-2$, 仿照 3) 之 ii) 可证 $f \in T_{\{0, k-1\}}$ 。

综上, 有 $f \in \bigcup_{0 \leq E \leq E_k} T_E$, 故 $T(G_2) \notin \sum_{\min}$ 。

定理 5 D 是二元完满对称关系 G_2 的关系图(忽略每个顶点上的圈), 设 D 中边的数目为 $E (E \in Z^+)$, 当 $E \leq K$ 时有:

(1) 当 $E < K-1$ 时, $T(G_2) \in \sum_{\min}$ 。

(2) 当 $E = K-1$ 时, 分情况讨论:

(a) D 是树, 则 $T(G_2) \notin \sum_{\min}$;

(b) D 不是树, 则 $T(G_2) \in \sum_{\min}$ 。

(3) 当 $E = K$ 时, 分情况讨论:

(a) D 不连通, 则 $T(G_2) \in \sum_{\min}$;

(b) D 是一个 Hamilton 回路, 则 $T(G_2) \in \sum_{\min}$;

(c) D 是连通的非 Hamilton 图, 则 $T(G_2) \notin \sum_{\min}$ 。

证明: 因为二元完满对称关系 G_2 满足自反性, 即对每一 $i \in E_k$, 均有 $\langle i, i \rangle \in G_2$, 所以 D 的顶点数目等于 K 。

(1) 当 $E < K-1$ 时, D 不连通。根据定理 1 有 $T(G_2)$ 在最小覆盖中必须出现, 即 $T(G_2) \in \sum_{\min}$ 。

(2) 当 $E = K-1$ 时, 若 D 连通, 则 D 是树, 根据定理 3 可知 $T(G_2) \notin \sum_{\min}$; 若 D 不是树, 则 D 不连通, 根据定理 1 有 $T(G_2) \in \sum_{\min}$ 。

(3) 当 $E = K$ 时, (a) 若 D 不连通, 根据定理 1 有 $T(G_2) \in \sum_{\min}$ 。若 D 连通, 则有两种情况: (b) D 是 Hamilton 回路, 根据定理 2 有 $T(G_2) \in \sum_{\min}$; (c) D 是连通的非 Hamilton 图, 根据定理 4 有 $T(G_2) \notin \sum_{\min}$ 。

结束语 本文根据部分 K 值逻辑的完备性理论, 首先证明了当二元完满对称关系 G_2 的关系图 D 是一棵树时, 保此关系的函数集 $T(G_2)$ 不属于 P_k^* 的准完备集之最小覆盖; 然后证明了当关系图 D 的边数为 K 时, 若 D 连通但不含 Hamilton 回路, 则 $T(G_2)$ 不属于 P_k^* 的准完备集之最小覆盖; 最后对关系图 D 中边的数目分情况讨论, 定出了当边数小于等于 K 时, $T(G_2)$ 在 P_k^* 的准完备集之最小覆盖中的成员。下一步研究将着重于定出边数大于 K 时, $T(G_2)$ 在 P_k^* 的准完备集之最小覆盖中的成员, 这将为部分 K 值逻辑中 Sheffer 函数的判定和构造提供依据。

参考文献

- [1] 罗铸楷. 部分多值逻辑函数集的完备性理论[J]. 数学学报, 1984, 27(5): 676-683
- [2] 罗铸楷. 部分多值逻辑函数集中的极大封闭集[J]. 数学学报, 1984, 27(6): 795-800
- [3] 罗铸楷, 胡谋, 陈廷槐. 多值逻辑的理论及应用[M]. 北京: 科学出版社, 1992
- [4] 何骞, 刘任任. 部分二值逻辑中 Sheffer 函数的构造与判定算法[J]. 计算机工程与应用, 2010, 46(5): 28-30
- [5] 何骞, 刘任任. 部分三值逻辑中 Sheffer 函数的判定算法[J]. 计算机工程与应用, 2009, 45(19): 52-54
- [6] 刘任任, 王婷, 谭易勋. 部分四值逻辑中完满对称函数集的分类及最小覆盖成员的判定[J]. 计算机科学, 2010, 37(11): 257-260
- [7] 刘任任. 部分 K 值逻辑中准完备集之最小覆盖的一些结果(I)[J]. 湘潭大学自然科学学报, 1992, 14(1): 123-129
- [8] 刘任任. 部分 K 值逻辑中准完备集之最小覆盖的一些结果(II)[J]. 湘潭大学自然科学学报, 1993, 15(2): 141-148
- [9] Liu Ren-ren. Some results on the decision for Sheffer functions in partial K -valued Logic(II)[C]//Proceedings of the 28th International Symposium on Multiple-Valued Logic. IEEE Computer Society Press, 1998: 77-81
- [10] Liu Ren-ren. Some results on the minimal coverings of precomplete Classes in partial K -valued logic functions[C]//2003 IEEE international conference on systems, Man & Cybernetics, 2003, 1: 2645-2650
- [11] Liu Ren-ren. Some results on the simply separable function sets in partial K -valued logic functions[C]//2004 IEEE international conference on systems, Man & Cybernetics, 2004, 1: 1238-1242
- [12] Liu Ren-ren. On the Categorizing of simply separable Relations in partial Four-valued logic, Advances in Natural Computation [C]//LNAI, 3612, 2005: 1251-1256
- [13] Liu Ren-ren. On the Categorizing of Fully Symmetric Relations in partial Four-valued logic, Advances in Natural Computation [C]//LNAI, 4223, 2006: 286-289
- [14] 刘任任. 部分 K 值逻辑中准完备集之最小覆盖的一些结果(III)[J]. 湘潭大学自然科学学报, 1995, 17(3): 109-113
- [15] Liu Ren-ren. Some results on the decision for Sheffer functions in partial K -valued Logic[J]. Muti. Val. Logic, 1996, 1: 253-269