

调查传播算法和蚁群算法相结合求解可满足性问题

王 芙 周育人 叶 立

(华南理工大学计算机科学与工程学院 广州 510006)

摘 要 布尔可满足性问题(Boolean Satisfiability Problem, SAT)是逻辑学的一个基本问题,也是 NP-hard 问题。调查传播算法(Survey Propagation, SP)是求解 SAT 的一种非常高效的算法,但 SP 在难解区域极易不收敛,或者出现错误赋值。将 SP 算法与蚁群算法结合,把 SP 算法得到的消息值应用到蚁群算法中来求解 3-SAT 问题,使用这些消息值引导蚁群算法求解,并在算法中加入高效的局部搜索。新算法对于 SP 算法不收敛的一些实例也能很快找到解。

关键词 调查传播算法,难解区域,蚁群算法,局部搜索

中图法分类号 TP301 **文献标识码** A

Ant Colony Algorithm Combined with Survey Propagation for Satisfiability Problem

WANG Fu ZHOU Yu-ren YE Li

(School of Computer Science and Engineering, South China University of Technology, Guangzhou 510006, China)

Abstract Satisfiability problem is a basic problem in logic, and also is NP-hard. Survey propagation (SP) is a very effective algorithm for this problem. However, SP tends not to converge in hard region, or gives wrong assignments to the variables. An algorithm combined with SP and ant colony optimization (ACO) was proposed. The messages calculated in SP were used in ACO as guidance to help ACO find a solution. And local search was conducted in the new algorithm. The new algorithm can quickly find solutions for some instances that SP doesn't work.

Keywords Survey propagation, Hard region, Ant colony optimization, Local search

1 引言

布尔可满足性问题(SAT)是指合取范式(Conjunctive Normal Form, CNF)的可满足性问题,它是逻辑学的一个基本问题,并且第一个被证明是 NP 完全的,也是计算机科学的核心问题,在电路的形式化验证、自动化推理、人工智能、资源调度等领域都有广泛应用。

若 SAT 问题的每个合取范式所包含的子句长度都不超过 K , 则称这个 SAT 问题为 K -SAT。近年来, K -SAT 的研究进展迅速, 这些研究一般包括两个方向: 第一个方向是 SAT 理论研究, 如组合问题中的相变以及骨干等; 另一个方向是研究高效的求解 SAT 问题的算法。SAT 算法包括完备算法和不完备算法。完备算法可以给出合取范式的一个解或者证明其不可满足。不完备算法大多是基于局部搜索的方法, 在问题有解的情况下有高效的计算性能, 可能找到解, 但不能证明问题的不可满足性。

过去的几十年, 很多学者做了大量的工作, 提出了各种各样的算法。如经典的完备算法——DPLL 算法^[1], 是一种回溯搜索算法, 由 Davis 等人于 1962 年提出, 使用的是分枝回溯策略, 是对 N 个布尔变量形成的二叉树深度优先搜索, 其基本技术是不断地选择分支变量赋值并根据赋值简化实例,

有冲突发生时, 使用基于时间顺序的回溯。DPLL 算法对随机生成的实例比较有效, 对于实际应用转化而来的实例则表现不佳。在这之后, 又涌现出了很多高效的完备算法, 如 GRASP 算法^[2]、SATO 算法^[3]、relnsat 算法^[4]、chaff 算法^[5]、BerkMin 算法^[6]。

目前, chaff 是这方面算法的最出色代表。DPLL 之后的完备算法, 都是用分枝回溯方法, 但是使用了不同的分枝启发策略和不同的推导机制, 即每一步如何选择变量进行赋值, 该变量赋值后如何简化实例, 检查是否有冲突出现。

不完备算法的基本思想是随机局部搜索: 将不满足的子句数量看成优化目标, 在赋值空间中随机搜索。这类算法在很多类别的可满足实例上有效地运用, 在有些实例上性能远远高于完备算法。但是直到 20 世纪 90 年代初期, 局部搜索方法才得到重视, 之前一直是完备方法占主导。1992 年, Selman 等提出了 GSAT 算法^[7], 即先随机生成一个初始赋值, 然后挑选一个可以使满足子句个数增长最多的变量进行翻转, 直至达到最大翻转次数或者找到一个解。该算法原理比较简单, 极易陷入局部极小, 但在当时和完备算法比较效果还是很好的, 可以求解 2000 个变量的难解 3-SAT 随机实例, 而当时最好的完备算法还不能求解超过 400 个变量的 3-SAT 难解随机实例。GSAT 也可以说是局部搜索算法求解 SAT

到稿日期: 2011-05-22 返修日期: 2011-09-28 本文受国家自然科学基金(60873078, 61165003, 61170081), 广东省自然科学基金(9251064101000010)资助。

王 芙(1987—), 女, 硕士, 主要研究方向为智能与演化计算, E-mail: wangfu0086@163.com; 周育人(1965—), 男, 博士, 教授, 主要研究方向为演化计算、并行计算。

问题的一个突破。1994年, Selman等人提出了在GSAT中加入 random walk^[8], 新算法允许翻转变量后的目标值比当前目标值差, 以概率 p 在满足子句中随机挑选一个变量翻转, 以概率 $1-p$ 按GSAT的策略挑选变量翻转, 这样处理之后的算法非常高效。他们又在 random walk 基础上做了修改, 提出了新算法 walksat^[9], 该算法先随机选择一个不满足子句, 将翻转的变量局限在这个不满足的子句中, 以概率 p 在这个子句中随机挑选一个变量翻转, 以概率 $1-p$ 在这个子句中按GSAT的策略挑选变量翻转。Walksat 算法非常高效, 可以求解上万变量的 3-SAT 实例。在这之后, 1997年, David McAllester, Bart Selman 等人又提出了 NSAT^[10], 该算法与原来的 walksat 的框架相同, 共提出了两种最新的挑选变量策略 (Novert, R_Novert), 以避免陷入局部极小。这两种方法都证明是有效的。

最近几年, 有人提出基于统计物理的非完备算法, 其中最出名的是调查传播算法 (Survey Propagation, SP)^[14], 它可以求解百万变量的 3-SAT 实例, 其杰出的表现引起了该领域不少学者的关注。SP 算法首先使用统计物理的模型方法固定一部分变量, 然后调用 walksat 求解子问题。SP 算法对变量个数大的实例也能很快找到解, 但是在难解区域极易不收敛, 从而无法求解。本文将 SP 算法与蚁群算法结合, 新算法对于 SP 算法不收敛的一些实例也能找到解。

本文第1节介绍 SAT 问题的发展史; 第2节介绍 SAT 问题的相关定义; 第3节介绍调查传播算法及本文提出的算法; 第4节给出实验结果; 最后展望未来, 总结不足及未来还要做的工作。

2 SAT 问题

2.1 SAT 问题简介

设 X 为 N 个布尔变量的集合, $X = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$, X 的一个真值指派 (又叫赋值) A 是一个映射: $X \rightarrow \{\text{true}, \text{false}\}$, true 和 false 表示真和假, 则每个真值指派都是一个 N 元布尔向量。对于 $x_i \in X (i \in I = \{1, \dots, N\})$, x_i 和 $\neg x_i$ (x_i 取非) 称为文字, 这样一共有 $2 * N$ 个不同的文字。设 L 为这些文字的集合, $L = \{l_1, l_2, \dots, l_{2N}\}$ 。 L 中若干文字的析取叫做 X 上的子句, 记为 a 。设 a 中包含的 k 个变量为 $i_1, \dots, i_k$, 记为集合

$$V(a) = \{i_1, \dots, i_k\}$$

沿用统计物理中的记号, a 中 k 个文字的正负用 k 个数 $J_i^a \in \{\pm 1\}$ 表示, 则子句 a 可改写为

$$(z_{i_1} \vee \dots \vee z_{i_r} \vee \dots \vee z_{i_k})$$

式中, 当 $J_i^a = -1$ 时, $z_{i_r} = x_{i_r}$; 当 $J_i^a = 1$ 时, $z_{i_r} = \neg x_{i_r}$ 。

设 C 为这些子句的集合, M 为子句个数, 则 $C = \{a_1, a_2, \dots, a_M\}$, 称子句集 C 是可满足的, 当且仅当 C 中所有子句在指派 A 下都取真值。 X 上的合取范式 (Conjunctive Normal Form, CNF) F 是 X 上的一些子句的合取, 记为 $F = \bigwedge_{j=1}^M a_j$ 。范式 F 在真值指派 A 下为真 (或者称在真值指派 A 下可满足), 当且仅当 F 中所有的子句在真值指派 A 下都为真。若一个合取范式所包含的每个子句的长度不超过 k , 则这个合取范式称为 k 元合取范式, 记为 k -CNF。

SAT 问题就是判定给定布尔变量集 X 和 X 上的合取范式 F , 是否存在真值指派 A 使得合取范式 F 为真。若存在,

则称 SAT 问题是可满足的, 否则称 SAT 问题为不可满足的。若给定的合取范式 F 为 k -CNF, 则称这个 SAT 问题是 k -SAT 问题。

SAT 问题可以用因子图表示, 因子图也是调查传播算法重要的数据结构。因子图是一个二分无向图 $G=(V, E)$, 图1即为问题 $(x_2 \vee x_3)(\neg x_2 \vee x_3)(x_3)$ 的因子图表示。

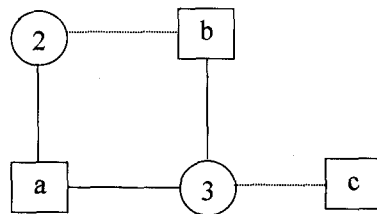


图1 SAT 问题因子图表示

每个变量都对应于图中的一个节点, 即变量节点 (图中的圆圈) $i \in I$, 每个子句对应于图中另一种类型的节点, 即功能节点 (图中的正方形) $a \in C$, 图中有边 (i, a) 当且仅当布尔变量 x_i 出现在子句 a 中 (或正或负)。若文字 x_i 出现在子句 a 中 ($J_i^a = -1$), 则边 (i, a) 为实线; 若文字 $\neg x_i$ 出现在子句 a 中 ($J_i^a = 1$), 则边 (i, a) 为虚线。

2.2 SAT 问题的相变现象

求解随机 k -SAT ($k \geq 3$) 问题时, 人们通过数值试验发现, 当子句个数与变量个数比 $\alpha = M/N$ 不变, 变量个数 N 足够大时, k -SAT 问题的可满足性会发生变化, 跟物理系统中的相变现象类似。存在一个临界值 $\alpha_c(k)$, 当 $\alpha < \alpha_c(k)$ 时, 问题是可以满足的; 当 $\alpha > \alpha_c(k)$ 时问题是不可满足的。自旋玻璃中的方法验证表明, 这个临界值是存在的, 并且可以计算出 $\alpha_c(3) \approx 4.267$ 。人们还发现一个中间区域, 即难解区域 $\alpha_d(k) < \alpha < \alpha_c(k)$, 而且 $\alpha_d(3) \approx 3.921$ 。在这个区域内, SAT 问题仍然是可满足的, 但是却很难找到解。

3 基于调查传播算法的蚁群算法

3.1 调查传播算法

调查传播算法 (Survey Propagation, SP) 源于统计物理中的自旋玻璃系统原理。自旋玻璃系统中的正反自旋 (spin), 取值为 1 和 -1。自旋对之间的相互作用有一半是铁磁作用, 另一半是反铁磁性的, 即有一半的自旋对的磁能由于自旋平行而降低, 另一半是磁能由于它们的自旋反平行而降低。这种二重性的行为使得自旋玻璃中的一个自旋取向不可能满足它与所有其他自旋的相互作用, 这样系统不能使它所有的相互作用同时得到满足, 这个系统是受挫的。在 SAT 问题中, 布尔变量取值 0 和 1, 对应于自旋玻璃中自旋的 -1 和 1, 自旋玻璃中的每一个相互影响的自旋对应于 SAT 问题中的一个约束, 布尔变量的取值难以使所有的约束得到满足, 找到自旋玻璃的一种最小能量状态对应于找到最少违反约束的一组 SAT 赋值。

SAT 问题中布尔变量 i 在所有解中的平均值与自旋 i 处的磁场相对应, 当玻璃处于顺磁态时, 自旋没有极化, 即平均而言, 在所有 SAT 解中变量 i 取 0 和 1 的可能性大致相当。这时, SAT 问题处于易解区域, 所有的解连在一起。当子句个数与变量个数比达到某个临界值, SAT 问题处于难解区域, 此时玻璃处于自旋玻璃态, SAT 解空间被劈分为若干个

簇。在每个簇里面,自旋倾向于固定在某个方向上,变量 i 发生冻结。有的变量会冻结到某个值,也就是说这个变量在这个簇中的所有解的取值相同。有的变量未被冻结,这样的变量在该簇中的所有解的取值不一定相同。SP 算法就充分考虑到这一点,给每一个变量另外增加一个状态,叫百搭态,用 ‘*’ 表示。这样,每个变量有 3 个状态 $\{0, 1, *\}$ 。

SP 算法采用一种消息传递技术,并利用调查迭代函数反复计算因子图中传递的消息。若此过程收敛,则收敛到一组警告纵览,然后使用这些纵览评估每个变量在所有解中的统计特性,即每个变量取值的边缘概率分布,称为偏量。这种偏量分为 3 种:正偏量 $W_i^{(+)}$ 、负偏量 $W_i^{(-)}$ 、约束不足偏量 $W_i^{(0)}$ 。正偏量指当随机选取一个簇时,变量 i 取被冻结到 1 的概率,负偏量指当随机选取一个簇时,变量 i 冻结到 0 的概率。这样,所有变量根据各自的偏量分为 3 类:

约束不足变量: $W_i^{(0)} \approx 1$;

偏倚变量: $W_i^{(+)} \approx 1$ 或者 $W_i^{(-)} \approx 1$;

平衡变量: $W_i^{(+)} \approx W_i^{(-)}$, $W_i^{(0)}$ 很小。

然后 SP 算法会选择一个(或一些)变量固定。固定平衡变量会改变问题解簇的结构,从而损失大量解簇。而约束不足变量不能提供足够的求解信息,因此 SP 选择已经冻结的偏倚变量固定,即那些具有最大 $|W_i^{(+)} - W_i^{(-)}|$ 值的变量。若 $W_i^{(+)} > W_i^{(-)}$,则此变量取值为 1,否则取值为 0。然后调用消解步骤来对问题进行简化,移除已经满足的子句,删掉未满足子句中包含此变量的文字。接着在子问题上重新进行迭代,直到不收敛或者求解成功,或者进入顺磁态(所有纵览均为零,这时的问题常常是约束不足的)。进入顺磁态后,便将子问题交与其他方法(如 walksat)求解。

因此,SP 算法大致分为两步:

1)调用消息传递子过程,评估每个变量的偏量。若此轮迭代收敛到一组纵览值,进入 2),否则退出,输出不收敛。

2)进入消解过程,固定最偏变量,将问题进行简化。简化得到的子问题重新进入 1)进行新一轮的迭代。

1)和 2)两步如此反复进行,直至找到一个解或者迭代若干轮后进入顺磁态,或者 1)中迭代不收敛。

若变量个数 N 比较小,当 N 在 1000 左右时,对于这样的一些实例,SP 算法常常不收敛。但是对于给定的 $\alpha < 4.3$, SP 算法收敛的概率随着 N 的增大而增加。当 α 接近 $\alpha_c \approx 4.267$ 时,算法通常不收敛,也就是当接近难解区域时,SP 常常求解失败。

对于 3-SAT 问题,通过数值试验发现,当 α 的值在 4.2 左右时,SP 算法常常不收敛,可能是因为迭代过程出错,进而对一些变量进行了错误的赋值,导致最后算法对子问题无法求解。在难解区域,解的个数不多,一旦一步迭代出错,调用消解算法移除已赋值的变量后找不到解的可能性也增加。本文将 SP 算法得到的消息值应用到蚁群算法中来求解 3-SAT 问题,使用这些消息值引导蚁群算法求解。由于在求解的过程中没有消解过程,因此以全局的观念来求解,算法能很快找到解。下面将详细介绍本文的算法。

3.2 蚁群算法

仿生学家通过长期研究发现,蚂蚁虽然没有视觉,但是可以通过在路径上释放信息素来寻找路径。蚂蚁会在走过的路径上释放跟路径长度有关的信息,信息量越大的路径以后被

选中的概率越大。这样,信息素的作用使整个蚁群行为具有非常高的自组织性。蚂蚁之间交换着路径信息,最终通过蚁群行为找出最优路径。蚁群算法最早成功用于解决著名的 TSP 问题,后来在解决各种传统 NP-Hard 问题时也有出色的表现。本文使用蚁群算法求解 SAT 问题,下面将详细介绍本文算法。

对于一个变量个数为 N 、子句个数为 M 的实例,设变量集合为 $v = \{1, 2, \dots, N\}$,子句集合为 $C = \{a_j | j = 1, \dots, M\}$ 。

构造如图 2 所示的结构图。

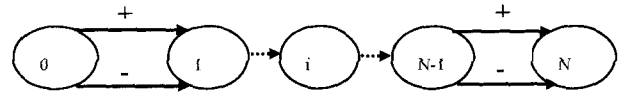


图 2 N 变量结构图

每个变量取值有两种(+, -),结构图有 $2 * N$ 条边 $\{(i-1, i)^+, (i-1, i)^- | 1 \leq i \leq N\}$ 。其中 $(i-1, i)^+$ 表示变量 i 取正值, $(i-1, i)^-$ 表示变量 i 取负值。一只蚂蚁要得到一个真值赋值,要遍历 N 条边。

SP 算法中,SP 收敛后都会给每个变量计算 3 个偏量 $\{W_i^{(+)}, W_i^{(-)}, W_i^{(0)}\}$,这 3 个偏量表征了每个变量的取值属性。本文将这些偏量应用到蚁群算法中作为启发信息,即对于边 $(i-1, i)^+$ ($1 \leq i \leq N$),启发信息值 $\eta^+ = W_i^{(+)}$,边 $(i-1, i)^-$ 上的启发信息值 $\eta^- = W_i^{(-)}$ 。

记边 $(i-1, i)^+$ 上的信息素值为 τ_i^+ ,边 $(i-1, i)^-$ 上的信息素为 τ_i^- ,这些信息素初始值为常数。

每只蚂蚁的适应值 $f = \sum_{j=1}^M s_j$, 其中 $s_j = \begin{cases} 0, & \text{若子句 } a_j \text{ 满足} \\ 1, & \text{否则} \end{cases}$ 。

3.2.1 边选择规则

在搜索过程中,蚂蚁根据各条路径上的信息量以及路径的启发信息来计算转移概率。蚂蚁从顶点 i ($0 \leq i \leq N-1$) 走到顶点 $i+1$,有两条路径:一条取正值,一条取负值。取负值和取正值的概率分别为

$$P_i^- = \frac{(\tau_i^-)^\alpha (\eta^-)^\beta}{(\tau_i^-)^\alpha (\eta^-)^\beta + (\tau_i^+)^\alpha (\eta^+)^\beta} \quad (1)$$

$$P_i^+ = \frac{(\tau_i^+)^\alpha (\eta^+)^\beta}{(\tau_i^-)^\alpha (\eta^-)^\beta + (\tau_i^+)^\alpha (\eta^+)^\beta} \quad (2)$$

蚂蚁运行时先根据式(1)和式(2)计算概率值,然后根据轮盘赌规则选择边。式(1)、式(2)中, α 为信息启发式因子, β 为期望启发式因子。本文在初始化时将 α 设置为极小, β 较大,以充分利用启发信息引导蚂蚁求解。在迭代超过一定次数而解没有得到改善时,就增加 α ,减小 β ,以改善陷入局部极小的状况。

3.2.2 信息素更新规则

每只蚂蚁得到一个赋值之后都会根据以下两式更新信息素:

$$\tau_i^+ = \begin{cases} (1-\rho)\tau_i^+ + \Delta\tau, & \text{若 } \tau_i^+ \text{ 在最优路径上} \\ (1-\rho)\tau_i^+, & \text{否则} \end{cases} \quad (3)$$

$$\tau_i^- = \begin{cases} (1-\rho)\tau_i^- + \Delta\tau, & \text{若 } \tau_i^- \text{ 在最优路径上;} \\ (1-\rho)\tau_i^-, & \text{否则} \end{cases} \quad (4)$$

式中, $\Delta\tau = C/f(\text{best_ant})$, C 为常数, $f(\text{best_ant})$ 为历史最优蚂蚁的适应值; ρ 为信息素残留因子, $\rho \in [0, 1]$ 。每次更新完

信息素之后,都要将信息素值限制在最大信息素值 $\tau_{\max}$ 和最小信息素值 $\tau_{\min}$ 之间。

3.2.3 局部搜索

通过实验发现,蚂蚁运行一次,适应值就降到了一个比较小的值,已经陷入了局部极小,于是就在蚂蚁得到一个真值赋值之后进行自适应的 walksat 局部搜索。在蚂蚁得到一个真值赋值后,计算适应值,若实例满足则退出;否则,按照 walksat 的方法选择一个变量翻转,若翻转达到一定次数而解没有得到改善,则增加 walksat 的噪声概率,否则减少噪声概率,直至找到一个解或者达到最大翻转次数。

3.2.4 基于调查传播算法的蚁群算法

综上所述,使用 SP 算法的蚁群算法伪代码如下。

输入:一个 SAT 实例 F,蚂蚁个数 ant_num,最大迭代次数 T,信息启发式因子 α ,期望启发式因子 β

输出:一组解或者‘UNSAT’

begin

调用 SP 算法的消息传递子过程,并且此过程只迭代一轮就终止;

if 消息传递子过程迭代一轮收敛到一组纵览值 then

使用这些纵览值评估每个变量的偏量值 $\{W_i^{(+)}, W_i^{(-)}\}$,并将蚁群算法的启发式信息初始化为这些偏量;

else

将蚁群算法的启发式信息全部初始化为 0;

end if

t=0;

while(t<T)

for i=1:ant_num

蚂蚁 i 根据边选择规则从起点走到终点,得到 SAT 问题 F 的一个赋值 A_i ;

评估 A_i 的适应值 f_i ;

if $f_i=0$ then

return SAT;

end if

对蚂蚁 i 进行局部搜索;

end for

保存最优蚂蚁;

更新信息素值;

if 超过指定迭代次数最优解没有得到改善 then

更新信息启发式因子 α 和期望启发式因子 β ;

end if

t=t+1;

end

return UNSAT;

end

4 实验结果

本文进行实验的环境为 Intel Pentium 2.80Hz, 512MB 内存,操作系统为 Ubuntu9.04,编程语言为 C。实验中 ant_num 为 15,最大信息素值 $\tau_{\max}$ 为 10,最小信息素值 $\tau_{\min}$ 为 0.01,常数 C 为 2,信息素残留因子 ρ 为 0.5,信息启发式因子 α 初始化为 1,期望启发式因子 β 初始值为 5。

实验包含两类测试实例,第一类实验测试的实例均来自 SAT 问题的研究资源网站^[23] <http://www.cs.ubc.ca/~hoos/SATLIB/index-ubc.html>,这些实例都是处于相变区域

的均匀随机实例。本文选取了其中 9 组可满足的实例集。这 9 个实例集是 uf50-218, uf75-325, uf100-430, uf125-538, uf150-645, uf175-753, uf200-860, uf225-960, uf250-1065,其中 ufn-m 表示变量个数为 n,子句个数为 m 的实例集。除 uf50-218 和 uf100-430 包含 1000 个实例,其他 7 组每组包含 100 个实例。本文只从 uf50-218 和 uf100-430 中选取前 100 个实例,这样 9 组实验每组都是 100 个实例,这里称这一类实例为标准实例。第二类是随机生成的 3-SAT 实例,规模与第一类相同,包含 9 组,每组 100 个实例,变量个数与子句个数也相同,称这类实例为随机实例,每组实例记为 randn-m, n 和 m 意义与第一类实例相同。

表 1、表 2 显示了本文算法与 SP 算法求解这两类实例的结果。表中显示的数据是 100 个实例算法成功求解的实例个数。

表 1 两个算法成功求解标准实例个数对比

实例集	100 个实例中成功求解的实例个数	
	SP	ACO
uf50-218	82	100
uf75-325	78	100
uf100-430	70	100
uf125-538	71	100
uf150-645	62	100
uf175-753	53	100
uf200-860	40	100
uf225-960	61	100
uf250-1065	52	100

表 2 两个算法成功求解随机实例个数对比

实例集	100 个实例中成功求解的实例个数	
	SP	ACO
rand50-218	48	55
rand75-325	29	47
rand100-430	37	54
rand125-538	30	43
rand150-645	27	49
rand175-753	23	38
rand200-860	25	36
rand225-960	25	46
rand250-1065	24	53

由于所选取的实例都接近于临界区,因此 SP 算法极易不收敛,从而找不到解。若收敛,则在每次选择一个变量进行赋值之后就消掉该变量,这样的赋值可能是错误的,从而问题就找不到解。本文的算法使用 SP 算法运行初期计算出来的概率值,引导蚁群算法求解。虽然这些概率值有可能是不准确的,但蚁群算法通过不断地迭代、积累信息素,能有效消除这样的不利影响。若从全局观念上求解,再加上高效的局部搜索,则对于一些 SP 无法求解的实例也能求到解,而且对于大多数实例能很快找到解。

表 3 算法运行时间对比

变量个数	子句个数	标准实例(s)		随机实例(s)	
		SP	ACO	SP	ACO
50	218	0.34	0.12	0.36	0.10
75	325	0.37	0.08	0.40	0.13
100	430	0.50	0.24	0.78	0.21
125	538	0.50	0.13	0.36	0.10
150	645	0.73	0.70	0.62	0.36
175	753	1.64	0.17	0.68	0.15
200	860	0.74	0.15	0.99	0.19
225	960	1.29	0.21	1.40	0.92
250	1065	0.34	0.17	1.71	0.76

表 3 给出了两种算法求解时间的对比。该实例是从上面求解成功的实例中随机选取的,即分别从这 18 组实例中各选择一个求解成功实例,然后用这两种算法各求解 100 次,算出平均时间,时间单位为秒(s),结果如表 3 所列。由表中可以看出,本文算法在运行时间上也有提高,说明本文算法是有效的。

结束语 调查传播算法(SP)是 2002 年才提出的基于统计物理学求解 SAT 问题的算法,其思路与之前的完备算法和局部搜索算法都不同,它是一种概率算法,能够在很短时间内求解百万变量的 3-SAT 实例。本文针对 SP 算法对于变量个数较小的问题在临界区极易不收敛的特征,将 SP 算法计算出来的偏量值运用到了蚁群算法中。新算法能够求解 SP 算法无法求解的实例,说明新算法是有效的。由于使用的实例变量个数不多,因此本文的算法能够很快找到解。而一旦变量个数增多,运行时间就会延长,这是未来努力的方向之一。

参 考 文 献

- [1] Davis M, Logemann G, Loveland D. A Machine program for Theorem-Proving[J]. Communication of the ACM, 1962; 395-397
- [2] Silva J P M, Sakallah K A. GRASP-A New Search Algorithm for Satisfiability[C]//Proceedings of the International Conference on Computer-Aided Design. Los Alamitos: IEEE Computer Society Press, 1996; 220-227
- [3] Zhang Han-tao. SATO; and Efficient Propositional Prover[C]//International Conference on Automated Deduction(CADE'97). Springer-Verlag, 1997; 272-275
- [4] Bayardo R J Jr, Schrag R C. Using CSP Look-Back Techniques to solve Real-World SAT Instances[C]//Proceedings of the 14th National Conference on Artificial Intelligence(AAAI'97). AAAI Press/The MIT Press, 1997; 203-208
- [5] Moskewicz M W, Madigan C F, Zhao Ying, et al. Chaff: Engineering an Efficient SAT Solver[C]//Proceedings of the 38th Design Automation Conference(DAC'01). 2001; 530-535
- [6] Goldberg E, Novikov Y. BerkMin: A fast and robust SAT Solver [C]//Design, Automation and Test in Europe Conference and Exhibition(DATE'02). 2002; 142-149
- [7] Selman B, Levesque H, Mitchell D. A new method for solving hard satisfiability problems[C]//Proceedings of the Tenth National Conf on Artificial Intelligence(AAAI-92). 1992; 440-446
- [8] Selman B, Kautz H A, Cohen B. Local search strategies for satisfiability testing[C]//Proceedings of DIMACS. AMS, 1993; 661
- [9] Selman B, Kautz H A, Cohen B. Noise strategies for improving local search[C]//Proceedings of the 12-th National Conf on AI. Seattle: MIT Press, 1994; 337-343
- [10] McAllester D, Selman B, Kautz H. Evidence for invariants in local search[C]//Proceedings of the Fourteenth National Conf

- on Artificial Intelligence(AAAI-97). Providence, 1997; 321-326
- [11] Mazure B, Lakhdar G E. Tabu search for sat1997[C]//Proc of 14th National Conf on Artificial Intelligence. Providence, 1997; 281-285
- [12] Schuurmans D, Southey F. Local search characteristics of incomplete sat procedures[C]//Proc of the 17th National Conf on AI (AAAI-2000). Austin, 2000; 297-302
- [13] Hirsch E A, Kojevnikov A. UnitWalk: A new sat solver that use local search guides by unit clause eniimation[J]. Annals of Mathematics and Artificial Intelligence, 2005, 43(1-4): 91-111
- [14] Braunstein A, Mezard M, Zecchina R. Survey Propagation: An Algorithm for Satisfiability[J]. Random Structures & Algorithms, 2005, 27(2): 201-226
- [15] Gu Jun. Local search for satisfiability(SAT) problem[J]. IEEE Transactions on System, Man and Cybernetics, 1993, 23(4): 1108-1129
- [16] Mezrd M, Parisi G, Zecchina R. Analytic and algorithmic solution of random satisfiability problems[J]. Science, 2002, 297(5582): 812-815
- [17] Zhang Wei-xiong. Configuration landscape analysis and backbone guided local search[J]. Aitificial Intelligence, 2004, 158(1): 1-26
- [18] Hoos H H. An adaptive noise mechanism for walksat[C]//AAAI-02 Proceedings. Edmonton, 2002; 655-660
- [19] Mezard M, Zecchina R. The random S-satisfiability prolem: from an analytic solution to an efficient algorithm[J]. Phys. Rev. E, 2002, 66(5): 1-38
- [20] Kautz H, Selman B. The state of SAT [J]. Discrete Applied Mathematics, 2007, 155(12): 1514-1524
- [21] Braunstein A, Mezard M, Weigt M, et al. constraint satisfaction by survey propagation[R]. <http://lanl.arXiv.org/cond-mat/0212451>
- [22] Martin O C, Monasson R, Zecchina R. Statistical mechanics methods and phase transitions in optimization problems[J]. Theoretical Computer Science, 2001, 265(1/2)
- [23] Hoos H H. SATLIB: An Online Resource for Research on SAT [M]//Gent P, H M, Walsh, eds. IOS Press, 2000; 283-292
- [24] 鄢庆增. 自旋玻璃和复杂系统[J]. 物理, 1992, 21(7): 404-410
- [25] 荆明娥, 周电, 唐璞山, 等. 启发式极性决策算法解 SAT 问题[J]. 中国科学 E 辑: 信息科学, 2001, 37(12): 1597-1606
- [26] 李韶华, 张健. Survey Propagation: 一种求解 SAT 的高效算法[J]. 计算机科学, 2005, 32(1): 132-137
- [27] 李韶华. 可满足性问题和图染色的一些研究[D]. 北京: 中国科学院研究生院, 2005
- [28] 贺思敏. 可满足性问题的算法设计和分析[D]. 北京: 清华大学, 1997