

# 人工蜂群算法的收敛性分析:数形结合

火久元 王野 胡卓娅

(兰州交通大学电子与信息技术学院 兰州 730070)

**摘要** 现有人工蜂群算法的收敛性分析多是基于整体收敛性的分析方法,这些收敛性分析无法展现出人工蜂群算法在收敛过程中的收敛变化。文中采用数形结合的方式,结合目标函数图像,用阶段性分析的方法大致把蜂群算法的收敛过程分为全局搜索阶段和最优区域搜索阶段,利用人工蜂群算法在转移时需遵循一定程度上的平均分布的特征,逐步分析每个阶段的收敛过程和变化,最终得出人工蜂群算法的收敛结果和收敛特征。该方法可以清晰地展现出人工蜂群算法的收敛优势和缺陷以及算法收敛概率的变化过程。

**关键词** 人工蜂群算法,马尔可夫链,全局收敛,数形结合

中图法分类号 TP301.6 文献标识码 A DOI 10.11896/j.issn.1002-137X.2018.10.039

## Convergence Analysis of Artificial Bee Colony Algorithm: Combination of Number and Shape

HUO Jiu-yuan WANG Ye HU Zhuo-ya

(School of Electronic and Information Engineering, Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou 730070, China)

**Abstract** The convergence analysis of existing methods for artificial bee colony algorithm(ABC) is based on the analysis method of global convergence. But these convergence analysis methods can't show the convergence change in the convergence process of ABC. Firstly, the method of combination of number and shape is adopted, and the objective function diagram is combined to divide the convergence process of ABC into the global search stage and the optimal region search stage by using stage analysis. Then, the convergence process and changes of each stage are analyzed one by one based on transferring character that the artificial bees follow a certain degree of average distribution. Finally, the convergence results and change of ABC are obtained. This method can clearly show the convergence advantages and defects of the ABC algorithm, and reveal the changing process of the convergence probability of the algorithm.

**Keywords** Artificial bee colony algorithm, Markov chain, Global convergence, Combination of number and shape

## 1 引言

人工蜂群算法(ABC)是由 Karaboga 于 2005 年提出的一种模拟蜜蜂群智能采蜜行为的蜂群智能优化算法<sup>[1]</sup>。相对于其他智能算法而言,ABC 算法具有控制参数少、易于实现和计算简单等优点,因此已被广泛应用于函数优化和工程领域<sup>[2-9]</sup>等一系列问题中;同时,研究者也不断地提出新的具有针对性的改进 ABC 算法。与其他智能算法如蚁群算法、遗传算法和粒子群算法<sup>[10-17]</sup>相比,针对 ABC 算法的收敛变化和收敛方法的研究还不够透彻,且该算法的有效性和针对性大多通过仿真实验来证明,这在很大程度上制约了 ABC 算法的应用与改进。

Markov 链是指数学中具有马尔可夫性质的离散事件的随机过程。在马尔可夫链的每一步中,系统基于概率分布可以从一个状态变到另一个状态,也可以保持当前状态。Markov 链现已被广泛应用于智能算法的数学性质分析中。有学者依赖 Markov 过程的收敛性质给出了 ABC 算法的收

敛证明<sup>[18]</sup>,最终证明 ABC 算法依概率收敛到全局最优。还有学者利用鞅方法证明了 ABC 算法具有几乎必然强收敛性<sup>[19]</sup>。但这两种方法都是从整体上进行分析,未展现出 ABC 算法在收敛过程中的收敛速度和收敛强度的变化,而这些变化过程会给我们研究并针对性地改进算法提供极大的帮助和指导。例如,全局最优解引导的全局人工蜂群算法(GABC)<sup>[20]</sup>即是针对算法前期收敛精度低、收敛速度慢而做出的针对性改进。

本文根据 ABC 算法中蜜蜂进行转移时在一定程度上遵循平均分布的特征,首次使用了数形结合的方式,并利用 Markov 链理论分析 ABC 算法的收敛过程;将蜂群算法的收敛过程分为两个阶段,逐步分析每个阶段蜂群的转移行为和收敛变化,最终得到收敛结果。在这一过程中,本文充分展现了 ABC 算法的收敛变化过程和收敛特性,从而为 ABC 算法的研究与应用提供了新的理论基础。

## 2 人工蜂群算法

ABC 算法通过模拟实际蜜蜂的采蜜机制将人工蜂群分

为 3 类: 采蜜蜂、观察蜂和侦察蜂。整个蜂群通过一系列的搜寻工作, 最终找到花蜜量(适应度值)最大的蜜源(全局最优)。在 ABC 算法中, 采蜜蜂利用已知的蜜源信息寻找新的蜜源并与观察蜂分享蜜源信息; 观察蜂依据采蜜蜂分享的蜜源信息寻找新的蜜源; 侦察蜂的任务是在蜂房附近随机地寻找一个新的更有价值的蜜源, 蜜源价值通过适应度值  $fit$  进行比较。假设蜂群搜索的可行域是  $d$  维空间, 算法随机生成初始解  $x_i$  ( $i=1, 2, \dots, SN$ ),  $SN$  为种群数量。初始化后, 整个蜂群通过 3 种蜂搜寻过程的不断循环, 最终找到最优蜜源, 即达到算法的停止准则。

在搜索过程中, 采蜜蜂和观察蜂产生新蜜源的公式为:

$$v_{ij} = x_{ij} + \varphi_{ij} (x_{ij} - x_{kj}) \quad (1)$$

其中,  $k \in (1, 2, \dots, SN)$ ,  $j \in (1, 2, \dots, d)$ , 且  $x_{ij} \neq x_{kj}$ ,  $\varphi_{ij}$  为  $[-1, 1]$  之间的随机数。新旧蜜源通过贪婪法则来选择, 即比较新旧蜜源的适应度值  $fit$ , 并选取  $fit$  值更大的蜜源作为当前蜜源。当所有采蜜蜂完成搜寻过程后, 在舞蹈区用跳摇摆舞的方式将蜜源信息分享给观察蜂。观察蜂通过式(2)计算选择蜜源的概率:

$$P_i = fit_i / \sum_{k=1}^{SN} fit_k \quad (2)$$

然后, 随机产生一个  $[0, 1]$  区间的随机数, 如果  $P_i$  大于该随机数, 则观察蜂通过使用式(1)并比较适应度值  $fit$  进行蜜源更新。如果所有观察蜂在有限次循环的搜索之后有蜜源不能被更新, 则与此对应的采蜜蜂放弃该蜜源并转变为侦察蜂。侦察蜂按式(3)搜索新蜜源:

$$x_{ij} = x_{\min j} + \text{rand}(0, 1)(x_{\max j} - x_{\min j}) \quad (3)$$

其中,  $j \in (1, 2, \dots, d)$ ; 然后返回采蜜蜂搜索过程, 开始新的重复循环。

优化问题一般分为最大值优化和最小值优化。设  $f(\cdot)$  是优化问题的目标函数, 如果是最小值优化问题, 则适应度值为:

$$fit(x_i) = \begin{cases} \frac{1}{1+f(x_i)}, & f(x_i) > 0 \\ 1 + \text{abs}(f(x_i)), & f(x_i) \leq 0 \end{cases} \quad (4)$$

如果该问题是最大值优化问题, 则适应度值为目标函数值, 且 ABC 算法的贪婪选择如下:

$$v_i = \begin{cases} v_i, & fit(v_i) > fit(x_i) \\ x_i, & fit(v_i) \leq fit(x_i) \end{cases} \quad (5)$$

后文若不加特殊说明, 均按优化最大值问题考虑。

### 3 ABC 的 Markov 链模型和相关理论

为了阐述 ABC 算法的 Markov 链模型, 需要先给出一些相关的数学描述和定义<sup>[17-18]</sup>。

**定义 1** 设  $X$  表示一个序数为  $|X|$  的集合, 在 ABC 算法中, 有限集合  $s$  中的元素称为个体, 用字母  $i, j, k, \dots$  表示; 设  $m$  为正整数, Markov 链模型的状态空间取为  $S = s * s * \dots * s$ , 其元素被称为种群, 用字母  $x$  表示, 即:

$$S = \{(x_1, x_2, \dots, x_m) | x_k \in s, 1 \leq k \leq m\}$$

其中,  $m$  为种群规模。

**定义 2** ABC 算法中人工蜂群的状态序列  $\{s(t) : t > 0\}$  是有限齐次 Markov 链<sup>[18]</sup>。

**定义 3** ABC 产生新蜜源的公式为  $v_{ij} = x_{ij} + \varphi_{ij} (x_{ij} -$

$x_{kj})$ , 其中  $\varphi_{ij}$  为  $[-1, 1]$  之间的随机数, 其他为定值, 故而转移概率符合一定程度上的平均分布。

**定义 4** 人工蜂群算法迭代过程中, 对于任意两个状态  $X_i \in s, X_j \in s$ , 人工蜂由  $X_i$  一步转移至  $X_j$ , 记为  $P(X_i \rightarrow X_j)$ 。本文采用数形结合的方式, 从图 1 可以看出,  $X_i$  从某一取值范围  $l$  转移至取值范围为  $l_1$  中的  $X_j$ , 这一行为符合均匀分布, 故  $P(X_i \rightarrow X_j) = l_1/l$ 。

**定义 5** 称二阶矩随机序列  $X_n(\omega)$  依概率 1 收敛<sup>[21]</sup>于  $X(\omega)$ , 若对于  $X \epsilon > 0$ , 有:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{|X_n(\omega) - X(\omega)| < \epsilon\} = 1 \quad (6)$$

### 4 人工蜂群算法收敛性分析

本文将 ABC 算法的收敛过程分为两个阶段, 即全局搜索阶段和最优区域搜索阶段; 并根据算法原理构造数学图像模型(见图 1—图 3)。

如图 1 所示, 假设  $f(x)$  为目标函数的图像, 其中  $D$  为函数的取值范围, 长度记为  $d$ ;  $X_{\max}$  为函数最大值;  $X_{\max 2}$  是函数次大值;  $D_{\max}$  是函数值低于最大值并高于次大值的取值范围, 称为最优区域, 长度记为  $d_{\max}$ ;  $D_{x-\max}$  是全局最优区域, 可以认为到达全区域, 即到达局最优, 范围为  $[(X_{\max} - \epsilon, X_{\max} + \epsilon)]$ , 称为全局最优, 长度记为  $2\epsilon$ 。

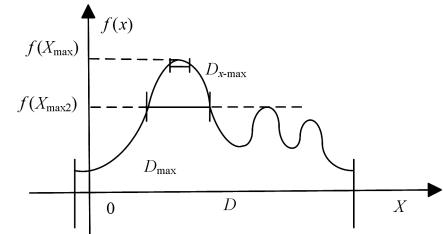


图 1 ABC 算法的目标函数

Fig. 1 Objective function of ABC algorithm

#### 4.1 全局搜索阶段

ABC 算法刚开始运行时, 蜜蜂在目标函数的取值范围内随机搜索, 直到所有的蜜蜂到达最优区域, 称为全局搜索阶段。

ABC 算法开始时, 蜜蜂需要初始化位置, 此时蜜蜂初始位置处于  $D_{\max}$  区域的概率为:

$$P_1 = \frac{d_{\max}}{d} \quad (7)$$

此时大部分蜜蜂都离散地分布在  $D$  区域内, 蜜蜂开始进行迭代。蜜蜂在全局搜索阶段, 对于当前迭代,  $X_i$  和任意  $X_k$  之间的可转移范围为  $X_i + X_k$  与  $X_i - X_k$  这两点之间的区域。该区域与  $D_{\max}$  区域之间的关系又分为 4 种情况: 1) 相交, 即  $X_i, X_k$  两点之间的区域与  $D_{\max}$  区域之间有部分重叠; 2) 包含, 即  $X_i, X_k$  两点之间的区域包含  $D_{\max}$  区域; 3) 相离, 即  $X_i, X_k$  两点之间的区域和  $D_{\max}$  区域之间没有重叠部分; 4) 包含于, 即  $X_i, X_k$  两点之间的区域包含在  $D_{\max}$  区域中(此情况下即可视为蜜蜂成功转移到  $D_{\max}$  区域, 该蜜蜂进入最优区域搜索阶段)。

记  $X_i, X_k$  两点之间的区域长度为  $d_{ik}$ ,  $i \in (1, 2, \dots, n)$ , 重叠或包含的区域长度记为  $d_{\cap ik}$ ,  $i \in (1, 2, \dots, n)$ , 此过程中蜜蜂一步转移到  $D_{\max}$  区域的概率  $P(X_i \rightarrow D_{\max})$  为:

$$P(X_i \rightarrow D_{\max}) = p \cdot \sum_{k=1}^{SN-1} \frac{d_{\cap ik}}{SN \cdot d_{ik}} \quad (8)$$

其中,  $SN$  是种群大小;  $p$  是选择蜜源的概率, 并且  $p = \begin{cases} P_i, & P_i < 1 \\ 1, & P_i \geq 1 \end{cases}$ ;  $d_{ik}$  始终大于 0。因此,  $P(X_i \rightarrow D_{\max})$  的大小仅与  $d_{\cap ik}$  有关。正常情况下, 蜂群在  $D$  区域内的位置是随机且离散的, 因此对于大部分  $X_k$  来说,  $X_i, X_k$  两点之间的区域和  $D_{\max}$  区域之间的关系多为相交和包含, 因此多数的  $d_{\cap ik}$  都是大于 0 的, 即  $P(X_i \rightarrow D_{\max})$  是大于 0 的。少数情况下, 如蜂群初始化的位置不够离散、最优区域较小、位置较偏僻、蜂群转移过程中陷入局部最优等,  $X_i$  经过数次迭代后, 有极小的概率回到正常情况, 但大多都最终陷入局部最优, 根本无法转移到  $D_{\max}$  区域。当  $X_i$  陷入到局部最优时,  $X_i$  从采蜜蜂转变为侦查蜂, 此时的  $P(X_i \rightarrow D_{\max}) = p \cdot \frac{d_{\max}}{d}$ 。

**定理 1** 对于任意的蜜蜂  $X_i$ , 其必然可以转移到区域  $D_{\max}$ 。

证明: 蜜蜂  $X_i$  的一步转移概率为  $P(X_i \rightarrow D_{\max}) = p \cdot \sum_{k=1}^{SN} \frac{d_{\cap ik}}{SN \cdot d_{ik}} \neq 0$ , 其在经过  $n$  次迭代后无法转移到  $D_{\max}$  区域的概率为:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{i=m}^n (1 - P(X_i \rightarrow D_{\max})) = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - p \cdot \sum_{k=1}^{SN-1} \frac{d_{\cap ik}}{SN \cdot d_{ik}})^n \quad (9)$$

若蜜蜂  $X_i$  到达限制次数则转变为侦查蜂,  $P(X_i \rightarrow D_{\max}) = p \cdot \frac{d_{\max}}{d}$ , 此时:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{i=m}^n (1 - P(X_i \rightarrow D_{\max})) = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - p \cdot \frac{d_{\max}}{d})^{n-m} = 0 \quad (10)$$

因此, 其转移不到  $D_{\max}$  区域的概率为 0, 即其必然可以转移到  $D_{\max}$  区域。

**猜想 1** 存在极小的概率使得蜂群全部陷入某个极值区域, 从而使得整个蜂群全部围绕在某个局部最优值区域且无法跳出, 此情况下  $X_i \pm X_k$  两点之间的区域与  $D_{\max}$  区域之间相离, 不存在重合, 因而  $P(X_i \rightarrow D_{\max}) = 0$ , 从而使得蜂群无法转移到  $D_{\max}$  区域。

证明: 已知  $X_i$  转变为侦查蜂的概率  $P(X_i \rightarrow \text{侦查蜂})$  是始终存在的, 因此当迭代次数趋于无穷时,  $X_i$  转变为侦查蜂的次数  $\alpha$  也将趋向于无穷。

此时,  $X_i$  无法转移到  $D_{\max}$  区域的概率为:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{i=m}^n (1 - P(X_i \rightarrow D_{\max})) = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - p \cdot \frac{d_{\max}}{d})^\alpha \cdot (1 - P(X_i \rightarrow D_{\max}))^{n-\alpha} = 0 \quad (11)$$

因此猜想不成立, 即  $X_i$  必然可以转移到  $D_{\max}$  区域。

综上所述, 在几种情况下  $X_i$  无法转移到  $D_{\max}$  区域的概率都为 0, 因此其一定可以转移到  $D_{\max}$  区域。由此可知, 经过一定次数的迭代后, 蜂群必然会进入  $D_{\max}$  区域; 同时, 在本阶段, 由于  $P(X_i \rightarrow D_{\max})$  的初始数值较小, 因此其最初转移速度较慢, 但随着迭代次数的增加,  $X_i, X_k$  两点之间的区域长度会不断减小。因此,  $P(X_i \rightarrow D_{\max})$  将逐渐变大, 且其转移速度也会逐渐加快。故在全局搜索阶段, ABC 算法的初始收敛概率较小, 但收敛概率会随着迭代次数的增加而逐渐变大, 速度会

加快, 此时算法的收敛速度较快且收敛强度高。

## 4.2 最优区域搜索阶段

蜂群进入  $D_{\max}$  区域之后的搜索阶段被称为最优区域搜索阶段, 如图 2 所示。任何重新搜索到的不在此区域的新蜜源都将因为适应度值低而被放弃, 所以我们在此无需考虑不在  $D_{\max}$  区域内的算法运行和计算。此时, 算法的搜索速度会加快, 搜索精度也会变高。为了计算简便, 重新计算迭代次数, 即重新从 1 开始。

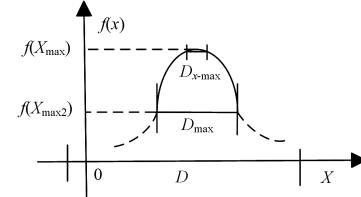


图 2 最优区域搜索阶段的目标函数

Fig. 2 Objective function in optimal region search stage

蜜蜂在此阶段的一步转移到最大值范围(近似全局最优)的概率  $P(X_i \rightarrow D_{x-\max})$  为:

$$P(X_i \rightarrow D_{x-\max}) = p \cdot \sum_{k=1}^{SN} \frac{d_{\cap x-\max}}{SN \cdot d_{ik}} \quad (12)$$

其中,  $d_{\cap x-\max}$  是  $X_i, X_k$  两点之间的区域与  $D_{x-\max}$  之间重叠部分的长度。此时蜜蜂从状态  $X_i$  转移到  $X_j$  的概率  $P(X_i \rightarrow X_j)$  为:

$$P(X_i \rightarrow X_j) = \begin{cases} p/2, & f(X_i) \leq f(X_k) \\ \frac{d_\Delta \cdot p}{2d_{ik}}, & f(X_i) > f(X_k) \end{cases} \quad (13)$$

其中,  $d_\Delta$  是  $X_i, X_k$  两点之间适应度值大于  $X_i$  的函数表现在横坐标轴中的总长度。

如果蜂群在  $D_{\max}$  区域的离散度足够大, 则  $d_{\cap x-\max}$  将并不全为 0, 此时的  $P(X_i \rightarrow D_{x-\max})$  也就不为 0。而如果蜂群离散度不够大导致  $d_{\cap x-\max}$  全为 0, 则此时所有蜜蜂必然全部集中于  $X_{\max}$  的左半边或右半边, 且此时蜜蜂从状态  $X_i$  转移到  $X_j$  的概率  $P(X_i \rightarrow X_j)$  变为:

$$P(X_i \rightarrow X_j) = p/2 \quad (14)$$

由式(14)可得, 蜜蜂从状态  $X_i$  转移到  $X_j$  的一步概率变为 1/2, 其转移速度也会加快。因为  $f(X_i)$  是单调非降的, 所以此时  $X_i$  会沿着  $f(X)$  的轨迹向  $f(X_{\max})$  移动, 会出现以下两种结果:

1) 随着  $X_i$  迭代次数的增加, 蜂群离散度变大,  $d_{\cap x-\max}$  重新变得不全为 0;

2)  $X_i$  到达限制次数, 转变为侦查蜂。

情况 2) 中,  $P(X_i \rightarrow D_{x-\max}) = \frac{2\epsilon}{d} \cdot p$ , 其一步转移概率

$P(X_i \rightarrow X_j) = \frac{d_\Delta}{d} \cdot p$ , 其中  $d_\Delta$  是目标函数值大于  $f(X_i)$  的区域长度, 因此其始终无法转移到下一个位置的概率  $\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{i=m}^n (1 - P(X_i \rightarrow X_j)) = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \frac{d_\Delta}{d} \cdot p)^n = 0$ , 所以经过一定次数的迭代,  $X_i$  必然可以向更优的蜜源位置转移, 然后转变为搜索蜂或直接找到全局最优。

若  $d_{\cap x-\max} \neq 0$ , 则  $P(X_i \rightarrow D_{x-\max}) = p \cdot \sum_{k=1}^{SN} \frac{d_{\cap x-\max}}{SN \cdot d_{ik}} \neq 0$ 。

此时,对于随机数列  $X_i$ ,有:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{|X_n - X_{\max}| \geq \epsilon\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - p \cdot \sum_{k=1}^{SN} \frac{d_{\cap x-\max}}{SN \cdot d_{ik}}) = 0 \quad (15)$$

此时,  $X_i$  依概率 1 收敛于  $X_{\max}$ ,  $X_i$  必然可以收敛到  $D_{x-\max}$  区域,故  $X_i$  必然可以收敛到  $D_{x-\max}$  区域,即全局最优。

猜想 2 存在某种情况 3),蜂群到达某个极限,一直向极限收敛却无法抵达,且  $d_{\cap x-\max}$  始终为 0,蜜蜂不会一直为侦查蜂。

证明:  $d_{\cap x-\max}$  始终为 0,则有:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i < |X_{\max} - X_1| \quad (16)$$

其中,  $\alpha_i = X_j - X_i = \text{rand}(|X_i - X_k|)$ , 所以  $\alpha_i$  仅与随机数和  $|X_i - X_k|$  的大小有关,因此  $\alpha_i$  不存在极限且并非极小数。又因为蜜蜂不会一直为侦查蜂,所以  $\alpha_i$  不会一直为 0,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i = +\infty$ , 这与  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i < |X_{\max} - X_i|$  相反,因此猜想不成立,此情况不存在。

在最优区域搜索阶段,  $P(X_i \rightarrow X_j)$  的数值极大,所以 ABC 算法的转移速度极快,  $X_i, X_k$  两点之间区域的长度  $d_{ik}$  也会以极快的速度减小,  $P(X_i \rightarrow D_{x-\max})$  的值与  $d_{ik}$  成反比,因此  $P(X_i \rightarrow D_{x-\max})$  会迅速增大,ABC 算法的收敛概率会变大,并最终收敛到全局最优。此时,算法的收敛速度较快,但收敛强度较低。

#### 4.3 多极大值函数分析

如图 3 所示,如果目标函数  $f(x)$  的极大值同时对应多个  $x$  位置(比如周期函数或关于  $x=n$  的对称函数),则目标函数的图像中存在多个  $D_{\max}$  区域。当蜂群全部收敛到这些区域时,存在两种情况:

1) 蜂群全部收敛到某一个  $D_{\max}$  区域,这种情况下收敛证明与上文相同;

2) 蜂群收敛到多个  $D_{\max}$  区域,此时  $d_{\cap x-\max}$  必然不会全为 0(多区域必然会带来重合区域):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{|X_n - X_{\max}| \geq \epsilon\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - p \cdot \sum_{k=1}^{SN} \frac{d_{\cap x-\max}}{SN \cdot d_{ik}}) = 0 \quad (17)$$

此时,  $X_i$  依概率 1 收敛于  $X_{\max}$ ,  $X_i$  必然可以收敛到某个  $D_{x-\max}$  区域,即全局最优。

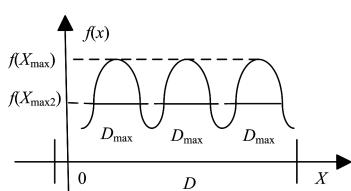


图 3 多极大值函数最优区域搜索阶段的函数图

Fig. 3 Function graph of optimal region search stage for multipole maximum value function

**结束语** 在 ABC 算法收敛性的研究中,已有少量文献证明了算法依概率 1 收敛且几乎处处收敛。与这些方法不同,本文采用数形结合的方法,通过分析目标函数图像,将 ABC 算法的运行过程分为全局搜索阶段和最优区域搜索阶段来进行收敛性分析。其中,全局搜索阶段容易产生局部最优,收敛

速度较慢,最终需要更多次迭代才可以到达最优区域,可以针对该特征对 ABC 算法进行调整或改进。在最优区域搜索阶段,算法的收敛速度迅速加快,收敛精度提高,ABC 算法的优势凸显出来,最终证明了 ABC 算法依概率 1 收敛到全局最优,并且得到了算法在运行收敛过程的收敛变化以及算法缺陷对收敛过程的影响。后续工作将集中在对 ABC 算法的改进、多目标 ABC 算法的收敛性分析以及稳定性分析的研究方面。

## 参 考 文 献

- [1] KARABOGA D. An idea based on honey bee swarm for numerical optimization[R]. Erciyes University, 2005.
- [2] KARABOGA D, BASTURK B. On the performance of artificial bee colony (ABC) algorithm[J]. Applied Soft Computing, 2008, 8(1):687-697.
- [3] HORNG M H. Multilevel thresholding selection based on the artificial bee colony algorithm for image segmentation[J]. Expert Systems with Applications, 2011, 38(11):13785-13791.
- [4] GAO W F, LIU S Y. A modified artificial bee colony algorithm [J]. Computers & Operations Research, 2012, 39(3):687-697.
- [5] ALKIN Y, ERDAL E. A discrete artificial bee colony algorithm for single machine scheduling problems [J]. International Journal of Production Research, 2016, 54(22):6860-6878.
- [6] YU W Y, HU D, TIAN N, et al. A novel search method based on artificial bee colony algorithm for block motion estimation [J]. EURASIP Journal on Image & Video Processing, 2017, 2017(1):66.
- [7] ONDER B, FATIH T M. An artificial bee colony algorithm for the economic lot scheduling problem[J]. International Journal of Production Research, 2014, 52(4):1150-1170.
- [8] KUANG F J, XU Y H, JIN Z. Artificial bee colony algorithm based on adaptive Tent chaotic search [J]. Control Theory and Application, 2014, 31(11):1502-1509. (in Chinese)  
匡芳君,徐蔚鸿,金忠. 自适应 Tent 混沌搜索的人工蜂群算法 [J]. 控制理论与应用,2014,31(11):1502-1509.
- [9] LUO J, LI Y. Swarm optimization algorithm with chaotic search strategy [J]. Control and Decision, 2010, 25(12):1913-1916. (in Chinese)  
罗钧,李研. 具有混沌搜索策略的蜂群优化算法 [J]. 控制与决策,2010,25(12):1913-1916.
- [10] ELKHATEEB N, BADR R. A Novel Variable Population Size Artificial Bee Colony Algorithm with Convergence Analysis for Optimal Parameter Tuning[J]. International Journal of Computational Intelligence & Applications, 2017, 16(3):1-15.
- [11] ZAZAS I, DALEY S. Stability and convergence analysis for different harmonic control algorithm implementations[J]. Journal of Vibration & Control, 2017, 23(8):1231-1247.
- [12] BONYADI, REZA M, ZBIGNIEW M. Analysis of Stability, Local Convergence, and Transformation Sensitivity of a Variant of the Particle Swarm Optimization Algorithm[J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2016, 20(3):370-385.
- [13] KIM S E, LEE J W, SONG W J. A noise-resilient affine projection algorithm and its convergence analysis[J]. Signal Processing, 2016, 121:94-101.
- [14] BONITO A, PASCIAK J E. Convergence analysis of variational

- and non-variational multigrid algorithms for the laplace-beltrami operator[J]. Mathematics of Computation, 2011, 81(279): 1263-1288.
- [15] REN Z H, WANG J, GAO Y L. The global convergence analysis of particle swarm optimization algorithm based on Markov China[J]. Control Theory and Applications, 2011, 28(4): 462-466. (in Chinese)  
任子晖, 王坚, 高岳林. 马尔科夫链的粒子群优化算法全局收敛性分析[J]. 控制理论与应用, 2011, 28(4): 462-466.
- [16] CLEGHORN C W, ENGELBRECHT A P, et al. Particle swarm variants: standardized convergence analysis[J]. Swarm Intelligence, 2015, 9(2/3): 1935-3812.
- [17] DANTAS A F O D A, MAITELLI A L, et al. A Modified Matrix PSO Algorithm Applied to System Identification with Convergence Analysis[J]. Journal of Control, Automation and Electrical Systems, 2015, 26(2): 149-158.
- [18] NING A P, ZHANG X Y. Convergence analysis of artificial bee colony algorithm [J]. Control and Decision, 2013, 28(10): 1554-1558. (in Chinese)  
宁爱平, 张雪英. 人工蜂群算法的收敛性分析[J]. 控制与决策, 2013, 28(10): 1554-1558.
- [19] KONG X Y, LIU S Y, WANG Z. Almost sure convergence of artificial bee colony algorithm: martingale method[J]. Computer Science, 2015, 42(9): 246-248. (in Chinese)  
孔翔宇, 刘三阳, 王贞. 人工蜂群算法的几乎必然强收敛性: 鞍方法[J]. 计算机科学, 2015, 42(9): 246-248.
- [20] ZHU G, KWONG S. Gbest-guided artificial bee colony algorithm for numerical function optimization[J]. Applied Mathematics and Conference on Computation, 2010, 217(2): 3166-3177.
- [21] 陈爱江, 张文良. 概率论与数理统计[M]. 北京: 中国质检出版社, 2011.

(上接第 182 页)

- [4] SU Q, CHEN B. A novel blind color image watermarking using upper Hessenberg matrix[J]. AEU-International Journal of Electronics and Communications, 2017, 78: 64-71.
- [5] YE T Y. Perfectly blind image watermarking scheme with multi-purpose based on region segment for sub-block and self-embedding technology[J]. Journal on Communications, 2013, 34(3): 148-156. (in Chinese)  
叶天语. 基于子块区域分割和自嵌入技术的全盲多功能图像水印算法[J]. 通信学报, 2013, 34(3): 148-156.
- [6] SINGH D, SINGH S K. DWT-SVD and DCT based robust and blind watermarking scheme for copyright protection[J]. Multimedia Tools & Applications, 2017, 76(1): 13001-13024.
- [7] HE H J, ZHANG J S. Chaos-based scramble self-embedding watermarking algorithm [J]. Journal on Communications, 2006, 27(7): 80-86. (in Chinese)  
和红杰, 张家树. 基于混沌置乱的分块自嵌入水印算法[J]. 通信学报, 2006, 27(7): 80-86.
- [8] ANDALIBI M, CHANDLER D M. Digital Image Watermarking via Adaptive Logo Texturization[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2015, 24(12): 5060-5073.
- [9] SHANG F, WANG H Q, ZHAO M. A Watermarking Algorithm against Rotation Based on DCT [C] // Proceedings of CIHW. 2010. (in Chinese)  
尚飞, 王慧琴, 赵敏. DCT 域抗旋转攻击水印算法[C]//全国信息隐藏暨多媒体信息安全学术大会. 2010.
- [10] SHI H, LI M, FANG L. A robust digital image watermarking based on adaptive multifunctional scheme[J]. Optik-International Journal for Light and Electron Optics, 2015, 126(7/8): 804-812.
- [11] UPADHYAY A, DAVE M. Robust and imperceptible color image watermarking for telemedicine applications[C] // International Conference on Computing, Communication and Automation (IEEE). 2017: 1104-1109.
- [12] HAMID M, WANG C. A simple image-adaptive watermarking algorithm with blind extraction[C] // International Conference on Systems, Signals and Image Processing (IEEE). 2016: 1-4.
- [13] LOGANATHAN A, KALIYAPERUMAL G. An adaptive HVS based video watermarking scheme for multiple watermarks using BAM neural networks and fuzzy inference system[M]. Oxford: Pergamon Press, 2016.
- [14] ZHU G, ZHANG J L. Adaptive robust watermarking algorithm based on SVD and wavelet packet transform[J]. Application Research of Computers, 2013, 30(4): 1230-1233. (in Chinese)  
朱光, 张军亮. 基于 SVD 和小波包分解的自适应鲁棒水印算法[J]. 计算机应用研究, 2013, 30(4): 1230-1233.
- [15] LIU S, PAN Z, SONG H. Digital image watermarking method based on DCT and fractal encoding[J]. Iet Image Processing, 2017, 11(10): 815-821.
- [16] PATIL H M, RINDHE B U. Study and overview of combined NSCT-DCT digital image watermarking [C] // International Conference on Global Trends in Signal Processing, Information Computing and Communication (IEEE), 2017: 302-307.
- [17] FATHIMA N K, CHITRA P. A robust encryption and digital watermarking scheme for dicom images using quaternions and DWT-SVD[C] // Online International Conference on Green Engineering and Technologies (IEEE). 2017: 1-6.
- [18] WANG X Y, LI L, LI H F, et al. A Blind Watermark Decoder in DT CWT Domain using Multivariate Bessel K Form Distribution[J]. Chinese Journal of Computers, 2017, 40: 1-15. (in Chinese)  
王向阳, 李丽, 李海芳, 等. 基于二元 BKF 统计建模的双树复数小波域数字水印检测算法[J]. 计算机学报, 2017, 40: 1-15.
- [19] WANG D C, TIAN C C, CHEN B J. Dual watermarking for color images based on 4D quaternion frequency domain[J]. Journal of Jilin University (Engineering and Technology Edition), 2015, 45(4): 1336-1346. (in Chinese)  
王定成, 田翠翠, 陈北京. 基于四维四元数频域的彩色图像双重水印算法[J]. 吉林大学学报(工学版), 2015, 45(4): 1336-1346.
- [20] LIU X L, LIN C C, YUAN S M. Blind dual watermarking for color images' authentication and copyright protection[J]. IEEE Transactions on Circuits & Systems for Video Technology, 2016, PP(99): 1