变精度上近似与程度下近似粗糙集模型的正域及其算法

张贤勇[1] 熊 方[2] 莫智文[1] 程 伟[3]
（四川师范大学数学与软件科学学院 成都 610068）[1] （四川天一学院信息工程系 成都 610100）[2]
（电子科技大学计算机科学与工程学院 成都 611731）[3]

摘 要 针对变精度近似与程度近似的结合问题及正域的核心地位，组建了变精度上近似与程度下近似粗糙集模型，并定义了其中的正域概念。研究了模型正域与精度量化指标和程度量化指标关联的内涵及意义，得到了模型正域的精确刻画与性质。为了计算模型正域，提出了自然算法与原子算法，并进行了算法分析与算法比较，得到了自然算法与原子算法具有相同的时间复杂性，而原子算法却具有更优的空间复杂性的结论。最后用一个医疗实例对模型正域及其算法进行了分析与说明。变精度上近似与程度下近似粗糙集模型的正域，从膨胀的优势方向完全扩展了经典粗糙集模型的正域，对与精度参数和程度参数相关的必然性知识发现具有意义。

关键词 人工智能，粗糙集理论，粗糙集模型，变精度近似，程度近似，正域
中图法分类号 TP18 **文献标识码** A

Positive Region and its Algorithms in Rough Set Model of Variable Precision Upper Approximation and Grade Lower Approximation

ZHANG Xian-yong[1] XIONG Fang[2] MO Zhi-wen[1] CHENG Wei[3]
(College of Mathematics and Software Science, Sichuan Normal University, Chengdu 610068, China)[1]
(Department of Information Engineering, Sichuan Tianyi University, Chengdu 610100, China)[2]
(School of Computer Science and Engineering, University of Electronic Science and Technology of China, Chengdu 611731, China)[3]

Abstract Based on the combination of variable precision approximations and grade approximations, as well as the core position of positive region, rough set model of variable precision upper approximation and grade lower approximation was constructed, and positive region in the model was defined. Related to precision and grade quantitative indexes, the connotation and significance of the positive region were investigated, and precise description and some properties were obtained. In order to calculate the positive region, natural and atomic algorithms were proposed and analyzed, and a conclusion was drawn that natural and atomic algorithms have the same time complexity while atomic algorithm has more advantages in space complexity. Finally, a medical example was given to analyze and explain the positive region and the algorithms. Positive region in rough set model of variable precision upper approximation and grade lower approximation has completely expanded positive region in classical rough set model in a perfect direction, and has great values to necessity knowledge discovery related to precision and grade parameters.

Keywords Artificial intelligence, Rough set theory, Rough set model, Variable precision approxi-mation, Graded approximation, Positive region

1 引言

粗糙集理论是一种处理不确定性信息的重要理论，在信息系统分析、人工智能、知识发现、数据挖掘等方面都取得了成功的应用。经典粗糙集模型没有反映出知识等价类和概念集相交的量化信息，而这种量化信息在实际中往往很重要，因此经典粗糙集模型需要扩展。进而产生的变精度粗糙集[1]与程度粗糙集[2]一方面完全扩展了经典粗糙集，更重要的是引入了知识等价类与概念集相交的精度相对量化信息与程度绝对量化信息。这两个粗糙集模型的理论和应用都有丰富的成果，尤其是变精度粗糙集的研究和应用，一直都是科研热点，见文献[3-5]。变精度粗糙集与程度粗糙集有密切的联系，两者的结合研究具有精度与程度复合刻画的优势，能够使量化信息更加全面与深刻，同时能够构建一些更高层次的扩展粗糙集模型，因而具有重要的研究价值。文献[6-10]对此有一些研究。文献[6,7]从同向近似组合的角度研究了变精度粗

到稿日期：2011-02-20 返修日期：2011-04-21 本文受国家自然科学基金（11071178），国家自然科学基金青年科学基金（60803028），四川省科技支撑计划（09ZC1838），四川省教育厅青年基金项目（10ZB004）资助。

张贤勇（1978－），男，博士，副教授，CCF会员，主要研究方向为不确定性的数学理论及其应用，E-mail：xianyongzh@sina.com；**熊 方**（1981－），女，硕士，讲师，主要研究方向为计算机控制、不确定性处理；**莫智文**（1963－），男，博士，教授，博士生导师，主要研究方向为不确定性数学、自动机、心电图等；**程 伟**（1976－），男，博士，副教授，硕士生导师，主要研究方向为量子计算与量子信息理论、非经典自动机与形式语言理论。

糙集与程度粗糙集的逻辑或、逻辑差结合。文献[8-10]则主要在引入误差参数的情况下讨论了变精度粗糙集与程度粗糙集的一些结合。

粗糙集理论把知识视为分类能力。在论域与知识组成的近似空间中，主要通过上近似、下近似的确定概念来近似逼近目标概念。下近似、上近似的补集及上下近似的差，分别称为正域、负域与边界域。正域是粗糙集理论的核心概念，对应肯定性、确定性与必然性知识发现，决策表的约简、知识的依赖度、属性的相关程度、决策规则的近似质量等都涉及到正域的计算，同时如何有效计算正域对提高各相关算法的性能都至关重要。对正域的研究非常广泛，如文献[11]研究了正域的计算；文献[12,13]研究了正域的性质；文献[14]研究了基于正域的决策树算法。更多的研究则集中在基于正域的约简求核上，见文献[15,16]。本文从反向近似组合角度出发，主要结合变精度上近似与程度下近似，比较自然地建立一种新的粗糙集模型。研究了其中的正域核心概念，此正域从膨胀的优势方向完全扩展了经典粗糙集模型的正域，并具有精度参数与程度参数复合刻画的特定含义。同时提出了计算该模型正域的两个算法，进行了算法分析与算法比较。其中的精度参数范围采用的是文献[6,7]中研究的扩展范围：[0,1]。

2 变精度上近似与程度下近似粗糙集模型的正域及其算法

定义 1 (U,R)为有限近似空间，$\overline{R}_\beta$ 为变精度上近似算子，$\underline{R}_k$ 为程度下近似算子，称$(U,R,\overline{R}_\beta,\underline{R}_k)$为变精度上近似与程度下近似粗糙集模型。

$\forall A\subseteq U, posR_{\beta\underline{k}}A=\overline{R}_\beta A\cap\underline{R}_k A$

称为集合 A 的变精度上近似与程度下近似粗糙集模型$(U,R,\overline{R}_\beta,\underline{R}_k)$的正域。

基于变精度上近似与程度下近似，定义 1 比较自然地组建了变精度上近似与程度下近似粗糙集模型$(U,R,\overline{R}_\beta,\underline{R}_k)$，它以一种特定形态结合了变精度粗糙集与程度粗糙集。由于变精度上近似与程度下近似无必然地包含关系或子集关系，故变精度上近似与程度下近似粗糙集模型的正域 $posR_{\beta\underline{k}}A$，采用了变精度上近似与程度下近似进行集合交运算的定义，这是经典粗糙集模型正域 $posRA$ 的一种自然且合理的提升，因为在经典粗糙集模型中，$posRA=\underline{R}A=\overline{R}A\cap\underline{R}A$。

定理 1 (1)$\beta=0,k=0$ 时，$(U,R,\overline{R}_\beta,\underline{R}_k)$为$(U,R,\overline{R},\underline{R})$，$posR_{\beta\underline{k}}A=\underline{R}A=posRA$；

(2)$\beta\neq1,k=0$ 时，$posR_{\beta\underline{k}}A=\underline{R}A=posRA$。

证明：由 $\beta=0$ 时 $\overline{R}_\beta A=\overline{R}A$，$k=0$ 时$\underline{R}_kA=\underline{R}A$，及$\underline{R}A\subseteq\overline{R}A$，$\beta\neq1$ 时$\underline{R}A\subseteq\overline{R}_\beta A$，

易证。

定理 1 表明，基于变精度近似与程度近似对经典近似的扩展性，变精度上近似与程度下近似粗糙集模型$(U,R,\overline{R}_\beta,\underline{R}_k)$完全扩展了经典粗糙集模型$(U,R,\overline{R},\underline{R})$。同时，变精度上近似与程度下近似粗糙集模型的正域 $posR_{\beta\underline{k}}A$ 也完全扩展了经典粗糙集模型的正域 $posRA$。从后面的定理 4 可见，在一般情况下，变精度上近似与程度下近似粗糙集模型的正域对经典粗糙集模型的正域进行了集合膨胀，即说明上述完全扩展是往正域变大的方向进行的。而正域关联的是肯定性、确定性与必然性推理，正域变大意味着必然性知识发现能力增强，相对地蕴涵着不确定性变弱。故上述完全扩展的方向是一个优势方向。综上，变精度上近似与程度下近似粗糙集模型的正域具有重要的研究价值。

定理 2 $posR_{\beta\underline{k}}A=\cup\{[x]_R:c([x]_R,A)<1-\beta,|[x]_R|-|[x]_R\cap A|\leqslant k\}$。

定理 2 表明，变精度上近似与程度下近似粗糙集模型的正域，实质上进行了精度量化指标与程度量化指标的特定逻辑组合，进而在实际中能够描述与精度和程度都关联的特定概念，具有实用意义。$posR_{\beta\underline{k}}A$ 描述的是“关于集合 A 的错误分类率小于 $1-\beta$，且不属于集合 A 的元素数目不超过 k 个”的知识等价类的并集。

定理 3 $posR_{\beta\underline{k}}A=\cup\{[x]_R:|[x]_R\cap A|>\beta|[x]_R|,|[x]_R\cap A|\geqslant|[x]_R|-k\}$。

定理 4 (1)$\beta=1$ 时，$posR_{\beta\underline{k}}A=\phi\subseteq posRA=\underline{R}A$；

(2)$\beta\in[0,1)$时，对任意非负整数 k，$posR_{\beta\underline{k}}A\supseteq posRA=\underline{R}A$。

证明：(1)$\beta=1$ 时，$\forall A\subseteq U,\overline{R}_\beta A=\phi$，所以 $posR_{\beta\underline{k}}A=\phi$；

(2)现 $\beta\in[0,1)$。若$[x]_R\subseteq posRA=\underline{R}A$，即$[x]_R\subseteq A$，则$|[x]_R\cap A|=|[x]_R|$，有$|[x]_R\cap A|>\beta|[x]_R|$和$|[x]_R\cap A|\geqslant|[x]_R|-k$。

由定理 3 有$[x]_R\subseteq posR_{\beta\underline{k}}A$，即 $posR_{\beta\underline{k}}A\supseteq posRA$。

定理 3 给出了变精度上近似与程度下近似粗糙集模型正域的基本计算公式。在此基础上，定理 4 得到了变精度上近似与程度下近似粗糙集模型正域与经典粗糙集模型正域之间的关系。显然，$\overline{R}_\beta A\subseteq\overline{R}A$，$\underline{R}_kA\supseteq\underline{R}A$。实际上，变精度粗糙集与程度粗糙集在扩展经典粗糙集时，上近似缩小，下近似膨胀。但组合后是$\overline{R}_\beta A\cap\underline{R}_kA$ 更大，还是$\overline{R}A\cap\underline{R}A$ 更大呢？即是正域 $posR_{\beta\underline{k}}A$ 更大还是正域 $posRA$ 更大？从集合的表面不易看出，而通过定理 3 的基本计算公式容易分析，进而得到的定理 4 表明 $\beta=1$ 时 $posR_{\beta\underline{k}}A=\phi$ 且 $posRA$ 更大，这是一种极端情况；而在 $\beta\in[0,1)$的一般情况中，变精度上近似与程度下近似粗糙集模型的正域 $posR_{\beta\underline{k}}A$ 更大，且是以包含经典粗糙集模型正域 $posRA$ 的形态膨胀。

变精度上近似与程度下近似粗糙集模型正域的基本计算公式(定理 3)中仅涉及$\beta|[x]_R|$，$|[x]_R|-k$ 两个量。下面将通过这两个量的关系，得出由指标 β,k 决定的变精度上近似与程度下近似粗糙集模型正域 $posR_{\beta\underline{k}}A$ 的精确刻画。

定理 5 (1)$\beta=1$ 时，$posR_{\beta\underline{k}}A=\phi$；

(2)$\beta\in[0,1)$时，$posR_{\beta\underline{k}}A=(\cup\{[x]_R:|[x]_R|\leqslant\frac{k}{1-\beta},|[x]_R\cap A|>\beta|[x]_R|\})\cup(\cup\{[x]_R:|[x]_R|>\frac{k}{1-\beta},|[x]_R\cap A|\geqslant|[x]_R|-k\})$。

证明：只需证明(2)。设 $\beta\in[0,1)$，

若 $\beta|[x]_R|\geqslant|[x]_R|-k$，即$|[x]_R|\leqslant\frac{k}{1-\beta}$，则$[x]_R\subseteq\overline{R}_\beta A\Rightarrow[x]_R\subseteq\underline{R}_kA$；

若 $\beta|[x]_R|<|[x]_R|-k$，即 $|[x]_R|>\frac{k}{1-\beta}$，则 $[x]_R\subseteq \underline{R}_kA\Rightarrow[x]_R\subseteq\bar{R}_\beta A$。综上可证结论。

定理 5 得到了变精度上近似与程度下近似粗糙集模型正域基于知识等价类原子的微观精确刻画。$\beta=1$ 是一种极端情况，结果很明了。下面将在 $\beta\in[0,1)$ 的一般情形下给出计算变精度上近似与程度下近似粗糙集模型正域 $posR_{\bar{\beta}\underline{k}}A$ 的两种不同算法，并进行算法分析与算法比较。

算法 1(自然算法) (1)计算变精度上近似 $\bar{R}_\beta A$ 和程度下近似$\underline{R}_kA$；(2)由集合的交(即定义 1)得正域 $posR_{\bar{\beta}\underline{k}}A$。

算法 2(原子算法) (1)每个知识等价类根据其元素个数先分在区间$(0,k/1-\beta]$，$(k/1-\beta,+\infty)$内，再由定理 5 判断其是否在正域 $posR_{\bar{\beta}\underline{k}}A$ 内；(2)把在正域 $posR_{\bar{\beta}\underline{k}}A$ 内的知识等价类并成集合可得结果。

这两个算法中，核心的任务是：判断每个知识等价类是否在特定集合内，其主要的计算是比较大小。每个知识等价类 $[x]_R$，需要 2 个输入数据：$|[x]_R|$，$|[x]_R\cap A|$。设近似空间中知识等价类共有 n 个，则需要 $2n$ 个输入数据。下面以比较大小作为基本操作，来分析和比较自然算法与原子算法。

自然算法中，首先需要判断每个知识等价类是否在 $\bar{R}_\beta A$，$\underline{R}_kA$ 内，这时需要比较大小 2 次，需要 2 个辅助变量 $c([x]_R,A)$，$|[x]_R|-k$。其次需要 1 次集合的交运算。故自然算法的时间复杂性与空间复杂性分别为 $T(n)=2n$，$S(n)=2n$。

原子算法中，首先每个知识等价类的元素个数需要与 $k/1-\beta$比较大小 1 次。若 $|[x]_R|\leqslant k/1-\beta$，则 $|[x]_R\cap A|$ 需要与 $\beta|[x]_R|$ 比较大小 1 次，需要 1 个辅助变量 $\beta|[x]_R|$；若 $|[x]_R|>k/1-\beta$，则 $|[x]_R\cap A|$ 需要与 $|[x]_R|-k$ 比较大小 1 次，需要 1 个辅助变量 $|[x]_R|-k$。故原子算法的时间复杂性与空间复杂性分别为 $T(n)=2n$，$S(n)=n$。

显然，两个算法的时间复杂性与空间复杂性的渐近分析为 $T(n)=\Theta(n)$，$S(n)=\Theta(n)$，是一致的。但原子算法比自然算法更具有优势：(1)原子算法的时间复杂性与自然算法的相同，但原子算法的空间复杂性仅为自然算法的一半；(2)原子算法的辅助变量 $\beta|[x]_R|$，$|[x]_R|-k$ 比自然算法的辅助变量 $c([x]_R,A)$，$|[x]_R|-k$ 更优。

基本原因在于经过分析，定理 5 给出了变精度上近似与程度下近似粗糙集模型正域 $posR_{\bar{\beta}\underline{k}}A$ 基于原子的微观精确刻画。自然算法必须判断每个知识等价类的变精度上近似和程度下近似的 2 种集合归属，尔后还需要集合交来计算。而原子算法根据指标 β,k 构造 2 个区间：

$(0,k/1-\beta]$，$(k/1-\beta,+\infty)$

若 $|[x]_R|>k/1-\beta$，则只需判断知识等价类是否在程度下近似$\underline{R}_kA$ 内；若 $|[x]_R|\leqslant k/1-\beta$，则只需判断知识等价类是否在变精度上近似 $\bar{R}_\beta A$ 内。从而减少了辅助变量数目，进而求得结果。

自然算法以变精度上近似与程度上近似基本概念为中心，基于变精度上近似与程度下近似粗糙集模型正域的定义进行宏观计算，比较常规与自然。原子算法则基于知识等价类的原子属性，以目标概念集的微观精确刻画为基础，采用构造性计算，计算更基本、更细微。从算法分析来看，原子算法与自然算法具有相同的时间复杂性，但原子算法比自然算法更具空间优势。在大量数据处理中，为了提高计算的效率与节约资源，选用原子算法无疑比选用自然算法更优化。

3 医疗实例与分析

知识表达系统 $S=(U,T,V,f)$ 中，论域 U 是 36 个检测病人，$T=\{r_1,r_2,r_3\}$，r_1,r_2,r_3 分别表示“发烧”、“头疼”和“流感”；$V_{r_1}=\{0,1,2\}$，$V_{r_2}=\{0,1,2\}$，$V_{r_3}=\{0,1\}$，$V_{r_3}=\{0,1\}$ 中的 0,1 分别表示“无流感”、“有流感”。表 1 为检测病人的初始医疗数据。表 2 为检测病人类别的统计数据，其中 R 表示基于“发烧”、“头疼”的等价关系，$[x]_m=(i,j)$ (m=1,2,…,9)为相应的知识等价类，A 表示“流感病人”集合。

表 1 检测病人的初始医疗数据

病人	发烧	头疼	流感	病人	发烧	头疼	流感	病人	发烧	头疼	流感	病人	发烧	头疼	流感
1	0	0	0	10	1	1	1	19	0	0	0	28	2	0	1
2	1	1	0	11	1	2	1	20	1	2	1	29	2	1	1
3	0	2	1	12	2	0	0	21	2	0	1	30	0	0	0
4	2	1	0	13	0	0	0	22	0	0	0	31	1	2	0
5	1	0	1	14	2	1	1	23	2	1	0	32	0	1	0
6	2	2	1	15	0	1	1	24	1	2	1	33	2	1	1
7	0	0	0	16	1	1	0	25	0	2	0	34	1	1	1
8	1	2	0	17	0	2	0	26	2	2	1	35	0	0	0
9	2	2	1	18	2	1	1	27	1	1	0	36	2	0	0

表 2 检测病人类别的统计数据

$[x]_m=(i,j)$	$[x]_m$ 元素	$\|[x]_m\|$	$[x]_m\cap A$ 元素	$\|[x]_m\cap A\|$	$c([x]_m,A)$
$[x]_1=(0,0)$	1,7,13,19,22,30,35	7	—	0	1
$[x]_2=(0,1)$	15,32	2	15	1	1/2
$[x]_3=(0,2)$	3,17,25	3	3	1	2/3
$[x]_4=(1,0)$	5	1	5	1	0
$[x]_5=(1,1)$	2,10,16,27,34	5	10,34	2	3/5
$[x]_6=(1,2)$	8,11,20,24,31	5	11,20,24	3	2/5
$[x]_7=(2,0)$	12,21,28,36	4	21,28	2	1/2
$[x]_8=(2,1)$	4,14,18,23,29,33	6	14,18,29,33	4	1/3
$[x]_9=(2,2)$	6,9,26	3	6,9,26	3	0

下面将在 $\beta=0.4$，$k=1$ 时用自然算法与原子算法计算变精度上近似与程度下近似粗糙集模型的正域 $posR_{\bar{\beta}\underline{k}}A$。

自然算法：(1)$\beta=0.4$ 时，$\bar{R}_\beta A=[x]_2\cup[x]_4\cup[x]_6\cup[x]_7\cup[x]_8\cup[x]_9$；$k=1$ 时，$\underline{R}_kA=[x]_2\cup[x]_4\cup[x]_9$。

(2)$posR_{\overline{0.4}\underline{1}}A=[x]_2\cup[x]_4\cup[x]_9$。

原子算法：(1)$\beta=0.4$，$k=1$，$k/1-\beta=5/3$，仅有 $|[x]_4|=1\leqslant5/3$，其余检测病人类别的元素个数全属于区间$(k/1-\beta,+\infty)$。$|[x]_4\cap A|=1>0.4\times1$，由定理 5 有$[x]_4\subseteq posR_{\overline{0.4}\underline{1}}A$。由定理 5 类似可以计算得到：

$[x]_2,[x]_9\subseteq posR_{\overline{0.4}\underline{1}}A$

$[x]_1,[x]_3,[x]_5,[x]_6,[x]_7,[x]_8\not\subseteq posR_{\overline{0.4}\underline{1}}A$

(2)进而 $posR_{\overline{0.4}\underline{1}}A=[x]_2\cup[x]_4\cup[x]_9$。

本医疗实例中，根据“发烧”和“头疼”属性，检测病人划分为 9 类。

下近似$\underline{R}A=[x]_4\cup[x]_9$

上近似 $\overline{R}A=[x]_2\cup[x]_3\cup[x]_4\cup[x]_5\cup[x]_6\cup[x]_7\cup[x]_8\cup[x]_9$

分别表示“一定和可能归入流感病人集合的检测病人”所在检测病人的类别。而

$posR_{\overline{0.4}\underline{1}}A=[x]_2\cup[x]_4\cup[x]_9$

刻画“关于流感病人集合的错误分类率小于 0.6，且不属于流感病人集合的检测病人数目不超过 1”的检测病人的类别。

由本医疗实例可见，变精度上近似与程度下近似粗糙集模型的正域，利用精度和程度两个量化指标复合刻画了特定概念，具有具体的实际意义。本实例中知识等价类有 9 个，自然算法的时间复杂性与空间复杂性为 $T(9)=18$，$S(9)=18$；而原子算法的时间复杂性与空间复杂性为 $T(9)=18$，$S(9)=9$。原子算法具有比较明显的空间优势。

4 性质

定理 6 (1) $posR_{\bar{\beta}\underline{k}}\phi=\phi$；

$\beta\neq1$ 时，$posR_{\bar{\beta}\underline{k}}U=U$；

$\beta=1$ 时，$posR_{\bar{\beta}\underline{k}}U=\phi$，$posR_{\bar{\beta}\underline{k}}A=\phi$。

(2) $A\subseteq B$ 时，$posR_{\bar{\beta}\underline{k}}A\subseteq posR_{\bar{\beta}\underline{k}}B$。

(3) $posR_{\bar{\beta}\underline{k}}(A\cup B)\supseteq posR_{\bar{\beta}\underline{k}}A\cup posR_{\bar{\beta}\underline{k}}B$。

(4) $posR_{\bar{\beta}\underline{k}}(A\cap B)\subseteq posR_{\bar{\beta}\underline{k}}A\cap posR_{\bar{\beta}\underline{k}}B$。

(5) $posR_{\bar{\beta}\underline{k}}(\sim A)=\sim(\underline{R}_{\beta}A\cup\overline{R}_{k}A)$。

(6) $\beta\geqslant\alpha$，$k\geqslant l$ 时，$posR_{\bar{\beta}\underline{l}}A\subseteq posR_{\bar{\beta}\underline{k}}A$，$posR_{\bar{\beta}\underline{k}}A\subseteq posR_{\bar{\alpha}\underline{k}}A$，$posR_{\bar{\beta}\underline{l}}A\subseteq posR_{\bar{\alpha}\underline{k}}A$。

定理 7 $posR_{\bar{\beta}\underline{k}}(posR_{\bar{\beta}\underline{k}}A)=posR_{\bar{\beta}\underline{k}}A$。

证明：1) $\beta=1$ 时，$posR_{\bar{\beta}\underline{k}}A=\phi$，所以 $posR_{\bar{\beta}\underline{k}}(posR_{\bar{\beta}\underline{k}}A)=posR_{\bar{\beta}\underline{k}}A=\phi$。

2) $\beta\in[0,1)$ 时，记 $posR_{\bar{\beta}\underline{k}}A=B$，则 $B=\cup\{[x]_R:|[x]_R\cap A|>\beta|[x]_R|,|[x]_R\cap A|\geqslant|[x]_R|-k\}$。

只需证 $posR_{\bar{\beta}\underline{k}}B=B$。

若 $[x]_R\subseteq B$，则 $|[x]_R\cap B|=|[x]_R|\geqslant|[x]_R\cap A|$，而 $|[x]_R\cap A|>\beta|[x]_R|$，$|[x]_R\cap A|\geqslant|[x]_R|-k$，故 $[x]_R\subseteq posR_{\bar{\beta}\underline{k}}B$。反之，若 $[x]_R\subseteq posR_{\bar{\beta}\underline{k}}B$，有 $|[x]_R\cap B|>\beta|[x]_R|\geqslant0$，而 $B=posR_{\bar{\beta}\underline{k}}A$ 为等价类的并，由分类的性质有 $[x]_R\subseteq B$。综上 $posR_{\bar{\beta}\underline{k}}B=B$。

推论 1 $\underline{R}(\underline{R}A)=\underline{R}A$，$posR(posRA)=posRA$。

定理 6 研究了变精度上近似与程度下近似粗糙集模型正域基于集合的一般性质。定理 7 则研究了其幂作用性质，得到了变精度上近似与程度下近似粗糙集模型的正域具有幂等性优良性质的结论。基于变精度上近似与程度下近似粗糙集模型正域对经典粗糙集模型正域的扩展性(定理 1)，推论 1 表明，经典粗糙集模型的正域与下近似算子也具有幂等性性质。

结束语 本文由变精度上近似与程度下近似组建的粗糙集模型，自然地复合了变精度粗糙集与程度粗糙集，类似可以做其它复合研究(如其对称模型：程度上近似与变精度下近似粗糙集模型)。其中提出的正域，具有与精度相对量化指标和程度绝对量化指标相关的特定逻辑复合含义，可以描述具体概念并量化研究，同时从正域膨胀的优势方向完全扩展了经典粗糙集模型中的正域，因而具有重要的理论意义与应用价值，对与精度参数和程度参数相关的必然性知识发现具有意义。本文主要研究了变精度上近似与程度下近似粗糙集模型的正域及其算法。基于正域的核心地位及广泛应用，本文的这种扩展的新正域产生以后，以其为基础的研究有待深入，如基于变精度上近似与程度下近似粗糙集模型正域的属性约简值得深入研究。

参 考 文 献

[1] Ziarko W. Variable precision rough set model [J]. Journal of Computer and System Sciences, 1993, 46(1): 39-59

[2] Yao Y Y, Lin T Y. Generalization of rough sets using modal logics[J]. Intelligent Automation and Soft Computing, 1996, 2(2): 103-120

[3] Xie F, Lin Y, Ren W W. Optimizing model for land use/land cover retrieval from remote sensing imagery based on variable precision rough sets[J]. Ecological Modelling, 2011, 222(2): 232-240

[4] Xie G, Yue W Y, Wang S Y, et al. Dynamic risk management in petroleum project investment based on a variable precision rough set model[J]. Technological Forecasting and Social Change, 2010, 77(6): 891-901

[5] Ningler M, Stockmanns G, Schneider G, et al. Adapted variable precision rough set approach for EEG analysis[J]. Artificial Intelligence in Medicine, 2009, 47(3): 239-261

[6] 张贤勇，熊方，莫智文. 精度与程度的逻辑或粗糙集模型[J]. 模式识别与人工智能, 2009, 17(5): 151-155

[7] 张贤勇，熊方，莫智文，等. 程度与精度的逻辑差粗糙集模型[J]. 电子科技大学学报, 2010, 39(5): 783-787

[8] 申锦标. 变精度与程度粗糙集的推广[J]. 计算机工程与设计, 2009, 30(18): 4275-4277

[9] 申锦标，吕跃进. 变精度与程度粗糙集的一种推广[J]. 计算机工程与应用, 2008, 44(36): 45-47

[10] 陈钉均，李涵，刘熠，等. 程度变精度覆盖粗糙集模型[J]. 辽宁工程技术大学学报: 自然科学版, 2010, 29(5): 877-879

[11] 刘少辉，盛秋戬，史忠植. 一种新的快速计算正区域的方法[J]. 计算机研究与发展, 2003, 40(5): 637-642

[12] 叶东毅，陈昭炯. Rough Set 中正区域的若干性质[J]. 福州大学学报: 自然科学版, 2002, 30(5): 521-523

[13] 黄晓涛，倪枫，卢正鼎. 信息系统中正区域性质的研究与应用[J]. 华中科技大学学报: 自然科学版, 2006, 34(12): 33-36

[14] 高静，杨炳儒，徐章艳，等. 一种改进的基于正区域的决策树算法[J]. 计算机科学, 2008, 35(5): 138-142

[15] 徐章艳，杨炳儒，蔡卫东，等. 一个基于正区域的快速求核算法[J]. 系统工程与电子技术, 2006, 28(12): 1902-1905

[16] 徐章艳，舒文豪，钱文彬，等. 基于序关系的快速计算正区域核的算法[J]. 计算机科学, 2010, 37(7): 208-211